

修士論文
アンサンブルカルマンフィルタを用いた
簡易大気モデルでの感度解析法の比較

西村 和裕
京都大学大学院理学研究科地球惑星科専攻

2011年2月

目次

第1章 序論

1.1 摂動の線型発展理論

1.1.2 節は山根 (2002) の 2.2.2 節を，1.1.3 節は 2.2.7 節を参考にしている．また 1.1.4 節は山根 (2002) の 2.3.3 節を，1.1.5 節は 2.3.4 節の一部を引用している．詳しくは山根 (2002) を参照．

1.1.1 力学系

N 次元の力学系を

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t), \quad X \in \mathbb{R}^N \quad (1.1.1)$$

と定義する．

1.1.2 接線形方程式

ある基準解 X_t に微小な摂動 δX_t を加えたときの δX_t の時間発展を考える．摂動を加えた解 $X_t + \delta X_t$ は式 (??) に従うので，

$$\frac{dX_t + d(\delta X_t)}{dt} = f(X_t + \delta X_t) \quad (1.1.2)$$

式 (??) の左辺を X_t のまわりでテーラー展開すると， $\delta X \times \delta X \ll 1$ より 2 次以下の項を無視すると

$$\frac{dX_t}{dt} + \frac{d(\delta X_t)}{dt} = f(X_t) + \frac{df}{dX} \delta X_t$$

となるので，式 (??) から

$$\frac{d(\delta X_t)}{dt} = J_X \delta X_t, \quad Y \in \mathbb{R}^N \quad (1.1.3)$$

と求めることができる．このとき J_X は，一般にヤコビアン行列と呼ばれるもので，

$$J_X = \frac{df}{dX} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_N}{dx_1} & \cdots & \frac{df_N}{dx_N} \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

である．式 (??) は一般に解 X_t に沿う接線形方程式と呼ばれる．初期値 $\delta X_{t_0} = \delta X_0$ をもとに，基本解 X_t に沿って時刻 t_0 から時刻 t まで積分すると， N 次の正方行列 \mathbf{M} 用いて

$$\delta X_t = \mathbf{M}(t, t_0) \delta X_0 \quad (1.1.5)$$

と求められる．このとき行列 $\mathbf{M}(t, t_0)$ は時刻 t_0 の摂動を時刻 t の摂動に写す行列で，

$$\mathbf{M}(t, t_0) = \mathbf{M}(t, t - \delta t) \cdots \mathbf{M}(t_i + \delta t, t_i) \cdots \mathbf{M}(t_a + \delta t, t_0) \quad (1.1.6)$$

である． \mathbf{M} は接線形演算子，レゾルベント，推移行列，伝播行列，基本行列，誤差行列などの名前で呼ばれるが，ここでは接線形演算子と呼ぶ．

1.1.3 随伴方程式

前節では，摂動 δX_t は誤差行列 $\mathbf{M}(t, t_0)$ に従うベクトルとして表された．ここでは，誤差行列 \mathbf{M} の随伴行列 \mathbf{M}^* に従うベクトル $\delta Z \in R^N$ について考える．随伴行列 $\mathbf{M}^*(t, t_0)$ は時刻 t の摂動を時刻 t_0 の摂動への写像を表す行列で，初期条件 δZ_t のもとで，

$$\delta Z_{t_0} = \mathbf{M}^*(t, t_0) \delta Z_t \quad (1.1.7)$$

で定義される．

ベクトル δZ_t には，行列 \mathbf{M} に従う任意の δX_t に対して，内積が保存する性質がある．

$$\begin{aligned} \langle \delta X_t, \delta Z_t \rangle &= \langle \mathbf{M}(t, t_0) \delta X_{t_0}, \delta Z_t \rangle \\ &= \langle \delta X_{t_0}, \mathbf{M}^*(t, t_0) \delta Z_t \rangle \\ &= \langle \delta X_{t_0}, \delta Z_0 \rangle \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

したがって任意の δX_t に対して，

$$\frac{d}{dt} \langle \delta X_t, \delta Z_t \rangle = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\left\langle \frac{d(\delta X_t)}{dt}, \delta Z_t \right\rangle + \left\langle \delta X_t, \frac{d(\delta Z_t)}{dt} \right\rangle = 0 \quad (1.1.10)$$

が成り立つ．式 (??) に接線形方程式 (??) を代入すると，

$$\langle J_X \delta X_t, \delta Z_t \rangle + \left\langle \delta X_t, \frac{d(\delta Z_t)}{dt} \right\rangle = 0 \quad (1.1.11)$$

$$\langle \delta X_t, J_X^* \delta Z_t \rangle + \left\langle \delta X_t, \frac{d(\delta Z_t)}{dt} \right\rangle = 0 \quad (1.1.12)$$

$$\left\langle \delta X_t, J_X^* \delta Z_t + \frac{d(\delta Z_t)}{dt} \right\rangle = 0 \quad (1.1.13)$$

となる．任意の δX_t に対して式 (??) が成り立つことから，

$$\frac{d(\delta Z_t)}{dt} = -J_X^* \delta Z_t \quad (1.1.14)$$

となることがわかる．この式は，ベクトル δZ_t の支配方程式で，随伴方程式と呼ばれる．随伴方程式を初期条件 Z_t のもとで，基本解 X_t に沿って，時刻 t から時刻 t_0 まで後方積分すると，

$$\delta Z_{t_0} = \mathbf{M}^*(t, t_0) \delta Z_t \quad (1.1.15)$$

を得ることができる．このとき， \mathbf{M}_{t_i, t_0}^* は随伴行列，アジョイント演算子などと呼ばれるが，ここではアジョイント演算子と呼ぶ．実数を扱う場合には随伴行列と転置演算は一致する．また \mathbf{M}_{t_i, t_0}^* は

$$\mathbf{M}^*(t, t_0) = [\mathbf{M}(t, t - \delta t) \cdots \mathbf{M}(t_i + \delta t, t_i) \cdots \mathbf{M}(t_0 + \delta t, t_0)]^* \quad (1.1.16)$$

から求められる．

1.1.4 特異値・特異ベクトル

N 次の正方行列 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ について考える． $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ は R^N から R^N への一次写像を表わす行列である．この行列の随伴行列 $(\mathbf{M}^*\mathbf{M})^*$ はもとの行列 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ に等しい．したがって， $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ は自己随伴行列である．

自己随伴行列 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ の N 個の固有値はすべて 0 以上の実数である．何故なら，正値対称行列 G_N^{-1} はある正則行列 H を使って， $G_N^{-1} = HH^T$ と表されるので， $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ は

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M} = G_N^{-1}\mathbf{M}^T G_N \mathbf{M} = H(H^T \mathbf{M}^T G_N \mathbf{M} H)H^{-1} \quad (1.1.17)$$

と表される．これは， $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ が半正値対称行列 $H^T \mathbf{M}^T G_N \mathbf{M} H$ と相似の関係にあることを意味する．半正値対称行列の固有値はすべて 0 以上の実数であり，また，相似の関係にある行列の固有値は一致するので， $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ の固有値もすべて 0 以上の実数である．

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ の N 個の固有値の平方根を行列 \mathbf{M} の特異値 (singular value) という．ここでは，値の大きい順に番号をつけて， \mathbf{M} の特異値を $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N)$ で表すことにする．

自己随伴行列 $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直行する．何故なら，相異なる二つの固有値 σ_i^2, σ_j^2 に属する固有値ベクトルを，それぞれ， v_i, v_j とすると，

$$\langle \mathbf{M}v_i, \mathbf{M}v_j \rangle = \langle \mathbf{M}^*\mathbf{M}v_i, v_j \rangle = \langle \sigma_i^2 v_i, v_j \rangle \quad (1.1.18)$$

であり，また

$$\langle \mathbf{M}v_i, \mathbf{M}v_j \rangle = \langle \mathbf{M}^*\mathbf{M}v_i, v_j \rangle = \langle \sigma_i^2 v_i, v_j \rangle \quad (1.1.19)$$

である．したがって， $\sigma_i^2 \langle v_i, v_j \rangle = \sigma_j^2 \langle v_i, v_j \rangle$ となり， $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ なので， $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ である．

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ の固有値に属する固有ベクトルを使って R^N の正規直交基底を構成することができる．この N 個の固有ベクトルを v_1, v_2, \dots, v_N とする．

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M}v_i = \sigma_i^2 v_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.20)$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.21)$$

$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである．このベクトル v_i を行列 \mathbf{M} の右特異ベクトル (right singular vector) という．

$\mathbf{M}v_i$ は R^N のベクトルである．内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から定義されるノルムを $\| \cdot \|$ とすると，

$$\|v_i\| = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.22)$$

であり，式 (??) から，

$$\|\mathbf{M}v_i\| = \sqrt{\langle \mathbf{M}v_i, \mathbf{M}v_i \rangle} \quad (1.1.23)$$

$$= \sqrt{\langle v_i, \mathbf{M}^* \mathbf{M} v_i \rangle} \quad (1.1.24)$$

$$= \sqrt{\langle v_i, \sigma_i^2 v_i \rangle} \quad (1.1.25)$$

$$= \sqrt{\sigma_i^2 \langle v_i, v_i \rangle} \quad (1.1.26)$$

$$= \sigma_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.27)$$

である．したがって， $\mathbf{M}v_i$ の大きさは特異値 σ_i に等しい．

$\mathbf{M}v_i$ の方向の単位ベクトルを u_i とする．

$$\mathbf{M}v_i = \sigma_i u_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.28)$$

$\sigma_i \neq 0, \sigma_j \neq 0$ のとき二つのベクトル u_i と u_j は直交する．

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle \sigma_i^{-1} \mathbf{M}v_i, \sigma_j^{-1} \mathbf{M}v_j \rangle \quad (1.1.29)$$

$$= \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \langle v_i, \mathbf{M}^* \mathbf{M} v_j \rangle \quad (1.1.30)$$

$$= \sigma_i^{-1} \sigma_j \langle v_i, v_j \rangle \quad (1.1.31)$$

$$= \delta_{ij} \quad (1.1.32)$$

このベクトル u_i を行列 \mathbf{M} の左特異ベクトル (right singular vector) という．最後に，2次元での右特異ベクトル v と左特異ベクトルの関係を図 ?? にまとめる．

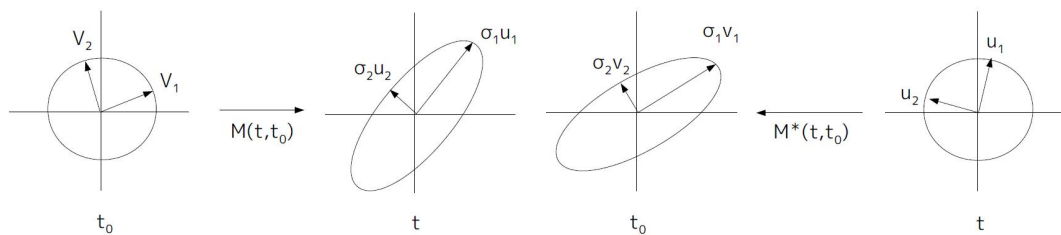


図 1.1: 左図：誤差行列 \mathbf{M}_{t, t_0} による写像． \mathbf{M} により時刻 t_0 の単位円は， $\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2$ を軸とする時刻 t の楕円に写される．右図：随伴行列 \mathbf{M}_{t, t_0}^* による写像． \mathbf{M}^* により時刻 t の単位円は， $\sigma_1 v_1, \sigma_2 v_2$ を軸とする時刻 t_0 の楕円に写される

1.1.5 摂動の拡大

力学系 (??) の解に沿う摂動 $\delta X(t)$ の時刻 t_0 から時刻 t までの拡大が誤差行列 $\mathbf{M}(t, t_0)$ の特異値・特異ベクトルで特徴づけられることを確認する．

時刻 t_0 の摂動の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{t_0}$ から定義されるノルムを $\| \cdot \|_{t_0}$ とし、時刻 t の摂動の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ から定義されるノルムを $\| \cdot \|_t$ とする。時刻 t_0 に $\delta X_{t_0} \neq 0$ である摂動の時刻 t_0 から時刻 t までの拡大係数は

$$\gamma(t, t_0, \delta X_{t_0}) = \frac{\| \mathbf{M}(t, t_0) \delta X_{t_0} \|_t}{\| \delta X_{t_0} \|_{t_0}} \quad (1.1.33)$$

で定義される。摂動の拡大係数 γ は t と t_0 だけではなく δX_{t_0} の方向にも依存する。 δX_{t_0} の大きさや向きには依存しない。式 (??) を変形すると、

$$\gamma(t, t_0, \delta X_{t_0}) = \sqrt{\frac{\langle \mathbf{M} \delta X_{t_0}, \mathbf{M} \delta X_{t_0} \rangle_t}{\langle \delta X_{t_0}, \delta X_{t_0} \rangle_{t_0}}} \quad (1.1.34)$$

$$= \sqrt{\frac{\langle \delta X_{t_0}, \mathbf{M}^* \mathbf{M} \delta X_{t_0} \rangle_{t_0}}{\langle \delta X_{t_0}, \delta X_{t_0} \rangle_{t_0}}} \quad (1.1.35)$$

となる。ここでは $\mathbf{M}(t, t_0)$ を単に \mathbf{M} で表記している。このとき式 (??) と式 (??) から時刻 t_0 の摂動 δX_{t_0} が右特異ベクトル v_i に等しいとき、その拡大係数 γ は特異値 σ_i に等しいことがわかる。

$$\gamma(t, t_0, \delta X_{t_0}) = \sigma_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.36)$$

よって、拡大係数 $\gamma(t, t_0, \delta X_{t_0})$ は、 δX_{t_0} の方向が v_1 の方向に等しいとき最大値 σ_1 をとり、 δX_{t_0} の方向が v_N の方向に等しいとき最小値 σ_N をとる。

1.2 感度解析

1.2.1 感度解析の定義とその目的

感度解析とは、モデルの入力 (次元 $[N \times 1]$) を変化させるとある注目する出力 (スカラー) がどのように変化するかを調べ、その結果から、ターゲットとする出力の変化を得るには、入力をどのように与えれば良いのかを見出す解析手法のことを言う。(淡路ら, 2009)

感度解析は、どの場所を観測すれば注目する地点での予測向上につながるのかといった機動的観測 (adaptive observation)、得られた観測のうちどの観測をデータ同化すれば注目する地点での解析値、予測値の向上につながるのかといった観測インパクト (observation impact)、過去のどのような物理過程が現在や未来の変動を引き起こすのかといった物理過程の推論、ある特定の大気や海洋中のシグナルや粒子がどこからきたのかといった逆追跡等を検討することにを目的として利用されている。

1.2.2 感度解析の手法

感度解析の手法には複数の手法がある。ま 1 つの目の手法が入力変数を自由度分だけ適当に変化させてモデルの計算を何度も繰り返すという手法である。しかし、この手法では入力変数

の設定方法は不確かな理論モデルや経験に頼らなくてはならず、また数値天気予報のような大自由系 ($\sim 10^7$) では実用的ではない。

次に2つ目の手法として特異ベクトルを用いた感度解析がある。特異ベクトルを用いた感度解析では、1.1.5節の式(?)の考え方を採用し、特異値解析を行うことである評価期間での最大成長率を示す摂動を求める。このような摂動を得ることによって、それを初期値に加えれば最終状態に大きな違いを生じさせる擾乱を詳しく特定できる。

さらに、3つ目の手法として、アジョイント感度 (adjoint sensitivity) を用いた感度解析の手法がある。アジョイント感度は Caccusi(1981) によって提案された手法で、数値モデルの物理過程に従いながら時間軸に遡って積分を実行するというアジョイントモデルの追跡機能を活かして求められる感度のことをいう。このとき感度とは入力の変化に対するある注目する出力の勾配のことを指す。入力の変化に対するある注目する出力の勾配 (すなわち、感度) を求めることで入力を少し変化させたときにある注目する出力の変化量を知ることができる。特異ベクトルを用いた感度解析ではある評価期間で最も誤差が成長する摂動に注目していたのに対し、アジョイント感度を用いた感度解析では入力の変化に対するある注目する出力の勾配に注目する。よって、アジョイント感度を用いた感度解析では、どの向きの誤差が最も成長するかという観点には注目していない。アジョイント感度を用いた感度解析では、アジョイントモデルを一回後方積分するだけで様々な入力変数に対する出力の感度を得ることができるという利点がある。

最後に4つ目の手法として、Hakim and Torn(2008) によって始めて調査されたアンサンブル感度 (ensemble sensitivity) を用いた感度解析の手法がある。アンサンブル感度とは複数の入力アンサンブルと出力アンサンブルの関係を重回帰分析することによって統計的に得られる重回帰係数のことをいう。本研究では重回帰分析を用いて求めたアンサンブル感度を第1アンサンブル感度と呼ぶことにする。また Hakim and Torn(2008), Ancell and Hakim(2007) で見られるように多次元系でも使えるように定義し直したアンサンブル感度を本研究では第2アンサンブル感度と呼ぶことにする。第1アンサンブル感度、第2アンサンブル感度を用いた感度解析では、アジョイント感度を用いた感度解析に比べて、アンサンブルを生成する分計算コストがかかるという欠点があるが、アジョイントモデルを生成する必要がないため、接線形の過程がなく、非線形発展のデータを用いることができるという利点がある。またアンサンブル感度の計算には、一旦入力アンサンブルデータと出力アンサンブルデータが得られれば、追加のモデルの積分計算は必要なくなりオフラインで計算できるという特徴がある。アンサンブル感度の計算のためには入力アンサンブルデータを生成する必要があり、Torn and Hakim(2008), Hakim and Torn(2008), Ancell and Hakim(2007) では入力アンサンブルデータとしてアンサンブルカルマンフィルタ (Ensemble Kalman Filter, 以下 EnKF) から得られた解析アンサンブルを入力アンサンブルデータとしている。他の入力アンサンブルデータの生成手法として、正規乱数や一様乱数を摂動として用いることもできる (伊藤耕介, 指針)。以下では入力に与える m メンバーの摂動のことを入力アンサンブル摂動 ($[N \times m]$), その結果得られたある注目する出力の摂動のことを出力アンサンブル摂動 ($[1 \times m]$) という。

本研究ではアジョイント感度とアンサンプル感度を用いた感度解析に注目する．アジョイント感度と第1アンサンプル感度，第2アンサンプル感度は全くの無関係のものではなく両者の関係性については Ancell and Hakim(2007) によって初めて理論的に述べられており，第2アンサンプル感度は解析誤差共分散の相関がゼロであればアジョイント感度と一致することが示されている．さらに Ancell and Hakim(2007) によって初めてアジョイント感度と第2アンサンプル感度の比較がなされており，その結果を次の節で紹介する．

なお本研究では，出力アンサンプル摂動を $\delta j_{fin}([1 \times m])$ ，入力アンサンプル摂動を $X_{ini}([N \times m])$ ，感度(次元 $[1 \times N]$) を $\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}}$ の表記で表す．このときアジョイント感度，アンサンプル感度を用いた感度解析は以下の式で表せられる．

$$\delta j_{fin} = \frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \delta X_{ini} \quad (1.2.1)$$

1.2.3 アジョイント感度とアンサンプル感度の比較

アジョイント感度と第2アンサンプル感度の構造 (structure) の比較

アジョイント感度の構造は，小さな規模 (small-scale) で局所的 (localized) に風上方向に向かって鉛直に強く (strongly) 傾いた構造が見られることが知られている (例えば，Ericco and Vukicevic, 1992; Hoskins et al., 2000; Ancell and Hakim, 2007 など)．図??の左図は図??における実線上のアジョイント感度場の鉛直断面図で、上記のような構造が見られた例である (Ancell and Hakim(2007) から抜粋)．

一方で第2アンサンプル感度の構造はアジョイント感度の構造と対称的で，大きな規模で (synoptic-scale) で大局的 (tropospheric-deep) に風上方向に向かって鉛直に穏やかに (modestly) に傾いた構造が見られることが知られている．(Ancell and Hakim(2007), Hakim and Torn(2008)) 図??の右図は上記のような構造が見られた例である (Ancell and Hakim(2007) から抜粋)．なお，Ancell and Hakim(2007) の実験において，モデルは Pennsylvania State University-National Center for Atmospheric Research(PSU-NCAR) Mesoscale Model(MM5) を用いており，EnKF のメンバー数は 90 メンバーとしている．

アジョイント感度と第2アンサンプル感度の正確さ (accuracy) 比較

Ancell and Hakim(2007) によって，アジョイント感度と第2アンサンプル感度を用いて見積もられる出力の変化量の正確さ (accuracy) の比較が行われている．Ancell and Hakim(2007) では、20点ランダムに格子点を選び，その選ばれた点で初期温度が 1K 変化したことに伴う図??の黒点での海水面気圧の変化量を、非線形発展から求めた出力の変化量とアジョイント感度、第2アンサンプル感度を用いて推定した出力の変化量とで比較を行っている (図??)．図??において点 α 、 x のサンプルが，傾き 1 の直線 (変化量の完全一致を示す) にどれくらい当てはまっているかを表す決定係数 (1 に近いほど当てはまりが良い) は、それぞれ 0.9775、0.9930 でほぼ同等

の精度が得られていることがわかる．よってこのことから両者とも入力(初期温度)の変化による出力(海水面気圧)の変化を正確に推定できることが主張されている．

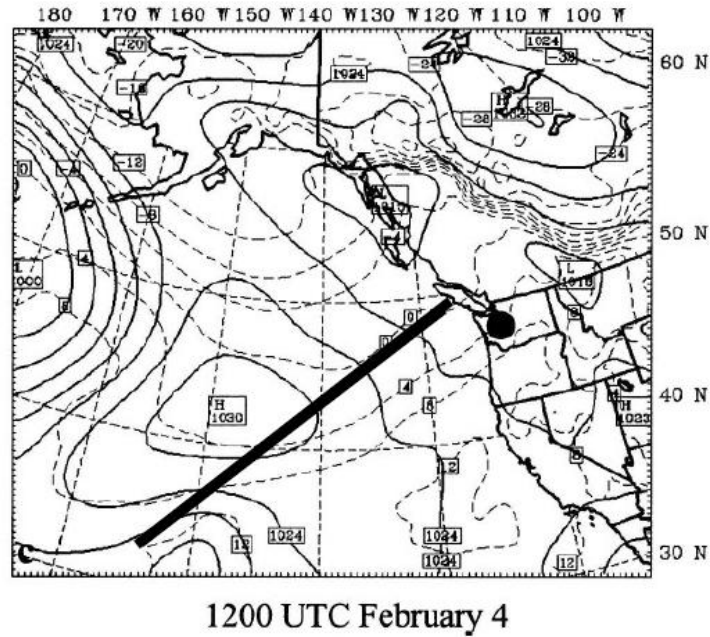


図 1.2: Ansell and Hakim(2007) の Fig2 の下図を一部修正．黒点の場所の出力を評価対象とする．

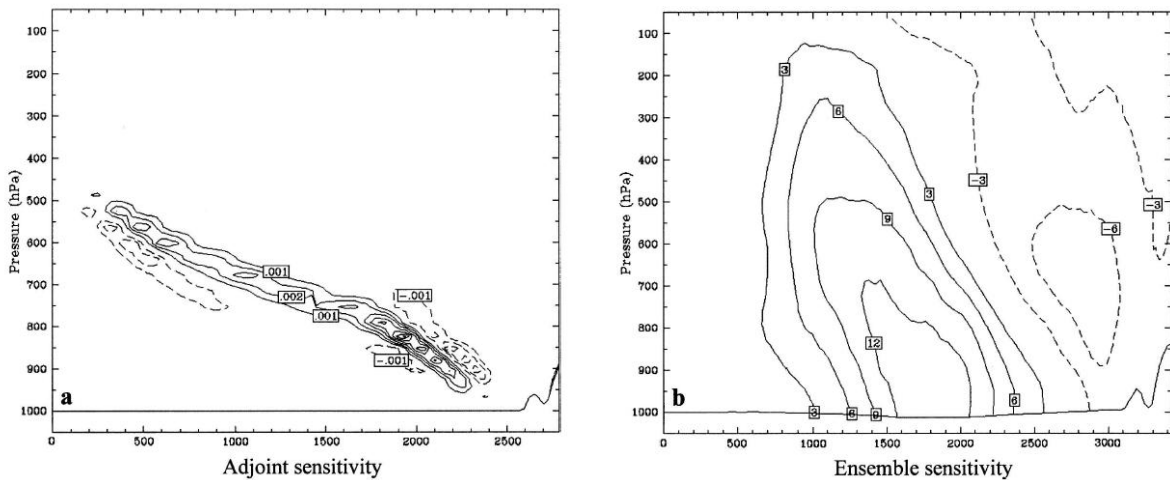


図 1.3: Ansell and Hakim(2007) の Fig7. の上図から抜粋．2005年2月3日1200UTCからまで2月4日1200UTC24時間予報し，2月4日1200UTCにおいて図??の黒点の海水面気圧に対する2005年2月3日1200UTCのジオポテンシャル高度の感度場をアジョイント感度(左)，第2アンサンブル感度(右)を用いて求めた結果の??に示す黒実線上の断面図．右図の等高線の間隔は 0.001 Pa m^{-1} ．左図の等高線の間隔は 3 Pa m^{-1} ．実線は正，破線は負の値を表す．

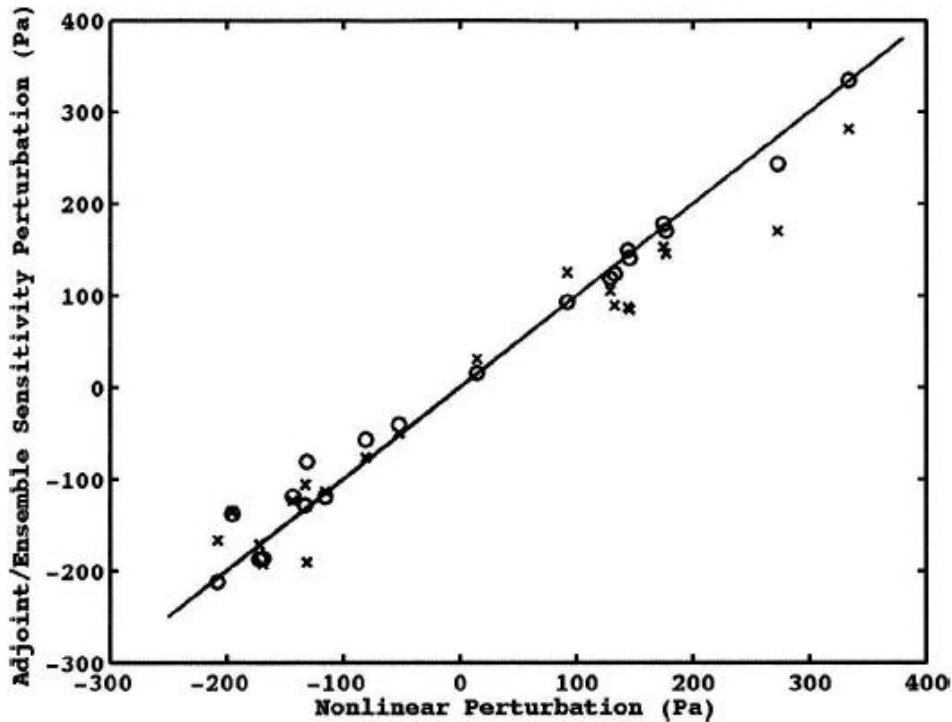


図 1.4: Ancell and Hakim(2007) の Fig8 を抜粋．温度の入力変化による非線形発展にともなう出力の変化量 (横軸) と感度解析から求めた出力の変化量 (縦軸) との関係． \circ はアジョイント感度、 \times は第 2 アンサンブル感度を用いた場合の結果を表す．このときサンプル数は 20 ．

1.3 本研究の目的

1.2.3 節で示したように Ancell and Hakim (2007) では大次元モデルを扱っているため、計算コストの問題からアジョイント感度と第 2 アンサンブル感度の比較しか行われておらず第 1 アンサンブル感度との比較の実験はまだなされていない．また第 2 アンサンブル感度を用いた Ancell and Hakim(2007) , Torn and Hakim(2008) の研究では、入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動しか扱っておらず、正規乱数を用いた場合との比較はまだ成されていない．またメンバー数依存性の議論もなされていない．そこで本研究では以下のことを研究目的とする．

簡易モデルを用い、入力アンサンブル摂動として正規乱数を用いたときの第 1、第 2 アンサンブル感度、EnKF から得られた摂動を用いた第 1、第 2 アンサンブル感度とアジョイント感度とそれぞれ比較する．その結果を元に理論との整合性を確かめながら、第 1、第 2 アンサンブル感度の構造 (structure)、正確さ (accuracy) をそれぞれ明らかにする．

なお、本論文は以下の内容で構成されている．まず 2 章では感度解析の理論的背景について、3 章では実験設定について説明する．4 章で実験結果を示し、その結果に対する考察を 5 章で行う．そして、第 6 章で全体をまとめる．また付録 A ではデータ同化の歴史を簡単に説明し、付

録 B では本研究で用いた EnKF を含むカルマンフィルタに基づくデータ同化の手法と、その周辺の実装技術について詳しく記す。付録 C では Lorenz96 モデルを用いて EnKF の実験を行った結果を載せる。付録 D では付録 B で用いた Desroziers et al(2005) による統計的關係式の導出を記載した。付録 E ではデータ同化における観測インパクトを調べる複数の手法について記し、付録 F では Ancell and Hakim(2007) における機動的観測手法を記す。このとき付録 E、付録 F では入力アンサンブル摂動として EnKF の摂動を用いた第 2 アンサンブル感度を利用した Ancell and Hakim(2007) による観測インパクトを求める手法や機動的観測の手法に加え、新たに入力アンサンブル摂動として正規乱数を用いた第 2 アンサンブル感度を利用した場合の観測インパクトを求める手法、機動的観測の手法についても考慮した。その結果、正規乱数を用いた第 2 アンサンブル感度ではどちらの手法も計算資源面で困難であることを示す。

第2章 感度解析の理論

2.1 アジョイント感度

アジョイント感度は、アジョイント方程式を用いることで求められる感度のことを言う。入力を X_{ini} 、その結果得られる出力を j_{fin} とおく。 ini は初期時刻、 fin は予報値の最終時刻を表す。このとき出力 j_{fin} は一般にコスト関数と呼ばれており、初期値 X_{ini} に対する予報値 X_{fin} のある任意関数で表される。以下では、それを $j_{fin}(X_{fin})$ と表現する。

予報値 X_{fin} に微小な摂動 δX_{fin} を加えた出力 $j_{fin}(X_{fin} + \delta X_{fin})$ を基本解 $j_{fin}(X_{ini})$ のまわりでテイラー展開すると、

$$j_{fin}(X_{fin} + \delta X_{fin}) = j_{fin} + \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{fin}} \right] \delta X_{fin} + \dots \quad (2.1.1)$$

摂動 δX_{fin} が常に十分に小さく、2次以上の高次項は無視できると仮定すると、

$$\delta j_{fin} = \delta j_{fin}(X_{fin} + \delta X_{fin}) - \delta j_{fin}(X_{fin}) = \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{fin}} \right] \delta X_{fin} \quad (2.1.2)$$

δX_{fin} の接線形方程式を時刻 ini から時刻 fin まで積分すると、接線形演算子 $\mathbf{M}(fin, ini)$ を用いて

$$\delta X_{fin} = \mathbf{M}(fin, ini) \delta X_{ini} \quad (2.1.3)$$

と表すことができるので、式(2.1.2)は

$$\delta j_{fin} = \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{fin}} \right] \mathbf{M}(fin, ini) \delta X_{ini} \quad (2.1.4)$$

アジョイント演算子 \mathbf{M}^* の定義より、

$$\langle a, \mathbf{M}b \rangle = \langle \mathbf{M}^*a, b \rangle \quad (2.1.5)$$

なので ($\langle \rangle$ は内積を表す)

$$\delta j_{fin} = [\mathbf{M}(fin, ini)]^T \frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{fin}} \delta X_{ini} \quad (2.1.6)$$

よって式(2.1.4)と感度解析の定義式(2.1.6)を見比べると、

$$\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} = \mathbf{M}(fin, ini)^T \frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{fin}} \quad (2.1.7)$$

であることがわかる。このとき式(2.1.7)によって得られる感度 $\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}}$ がアジョイント感度と呼ばれる。以降アジョイント感度を A^{AS} の記号で表す。したがってアジョイント感度 $A^{AS} = \frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}}$ は $\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{fin}}$ を初期値として、時刻 fin から時刻 ini までアジョイントモデルを後方積分することによって得ることができる。

2.2 アンサンブル感度

アンサンブル感度とは，入力アンサンブル (自由度 N のベクトルが m メンバー) と出力アンサンブル (スカラーが m メンバー) の関係を重回帰分析した結果得られる重回帰係数のことを指す．入力アンサンブルと出力アンサンブルは線形関係にあることを仮定し，重回帰分析には最小 2 乗法を用いる．以降，アンサンブル感度 (重回帰係数) を $A^{ES1}([N])$ の記号で表す．入力アンサンブル ($[N \times m]$) を次のように表記し

$$E_{ini} = [\delta X^{(1)} | \cdots | \delta X^{(m)}] \quad (2.2.1)$$

その結果得られる出力アンサンブル ($[m]$) を

$$J_{fin} = [\delta j^{(1)} | \cdots | \delta j^{(m)}] \quad (2.2.2)$$

と表す．また，アンサンブル感度 (重回帰係数) A^{ES1} を

$$A^{ES1} = [a_{(1)} \cdots a_{(N)}] \quad (2.2.3)$$

とおき，メンバー毎の残差 (回帰方程式から得られた回帰値と実測値との差) を

$$e = [e^1 \cdots e^m] \quad (2.2.4)$$

とおくと，出力アンサンブル J_{fin} は

$$J_{fin} = A^{ES1} E_{ini} + e \quad (2.2.5)$$

と表すことができる．つまり，残差は

$$e = J_{fin} - A^{ES1} E_{ini} \quad (2.2.6)$$

このとき残差の 2 乗和 $e \cdot e^T$ を最小にする重回帰係数 A^{ES1} は

$$\frac{\partial(e \cdot e^T)}{\partial A^{ES1}} = 0 \quad (2.2.7)$$

を満たすときであるので，式 (??) に式 (??) を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e \cdot e^T)}{\partial A^{ES1}} &= \frac{\partial((J_{fin} - A^{ES1} E_{ini})(J_{fin} - A^{ES1} E_{ini})^T)}{\partial A^{ES1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial A^{ES1}} (J_{fin}(J_{fin})^T - J_{fin}(A^{ES1} E_{ini})^T - A^{ES1} E_{ini}(J_{fin})^T + A^{ES1} E_{ini}(A^{ES1} E_{ini})^T) \\ &= 0 - J_{fin} E_{ini}^T - J_{fin} E_{ini}^T + A^{ES1} (E_{ini} E_{ini}^T + E_{ini} E_{ini}^T) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

このとき式 (??) の導出には，以下の内積 (ab^T (a, b はベクトル)) をベクトル x で微分したときの公式を用いた．

$$\frac{\partial ab^T}{\partial x} = b \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial b}{\partial x} \quad (2.2.9)$$

よって、アンサンブル感度 A^{ES1} は、

$$\begin{aligned} 2A^{ES1}(E_{ini}E_{ini}^T) &= 2J_{fin}E_{ini}^T \\ A^{ES1} &= J_{fin}E_{ini}^T(E_{ini}E_{ini}^T)^{-1} \\ &= \frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}\left(\frac{1}{m-1}E_{ini}E_{ini}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$= \frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}(P_{ini})^{-1} \quad (2.2.11)$$

と求めることができる。したがって、アンサンブル感度 A^{ES1} の計算には出力アンサンブルと入力アンサンブルとの共分散 $\frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}$ の N 次元ベクトルの計算と、入力アンサンブルの共分散行列 $P_{ini} = \frac{1}{m-1}E_{ini}E_{ini}$ の $[N \times N]$ 次元の逆行列の計算が必要であることがわかる。このアンサンブル感度 A^{ES1} を第1アンサンブル感度と呼ぶ。しかし、 $[N \times N]$ 次元の逆行列は数値天気予報モデルのような大次元モデルでは計算機資源的に困難である。また一般にアンサンブルメンバー数はモデルの次元よりもかなり小さい ($m \ll N$) ため、 m 個のアンサンブル摂動から見積もった誤差共分散 P はランク落ち (rank deficient) しており、 m 個のアンサンブル摂動から見積もった誤差共分散 P の逆行列は自明ではない (Ansell and Hakim(2007))。そのため特異値分解を用いた擬似逆行列の計算で P^{-1} を近似的に表す必要がある。そこで Ansell and Hakim(2007), Torn and Hakim(2008) ではこの問題を回避するため、アンサンブル感度 A^{ES1} を次のように定義し直している。

$$A^{ES2} = \frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}(D)_{ini}^{-1} \quad (2.2.12)$$

このとき行列 D_{ini} は、対角成分は P_{ini} の対角成分に等しく、非対角成分はゼロの $[N \times N]$ の対角行列である。つまり、行列 D_{ini} は初期の誤差相関 (共分散) はゼロであると仮定したの誤差共分散行列である。Ansell and Hakim(2007) ではこの A^{ES2} をアンサンブル感度と呼んでいるが、本研究では第2アンサンブル感度と呼ぶ。よって、第2アンサンブル感度 A^{ES2} では、行列 P_{ini} を行列 D_{ini} に置き換え、その逆行列 D_{ini}^{-1} の計算を自明とすることで計算機資源の問題を回避している。以下表記として、入力アンサンブル摂動として正規乱数を用いた場合の第1アンサンブル感度を $A^{ES1(random)}$ 、第2アンサンブル感度を $A^{ES2(random)}$ とし、入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動を用いた場合の第1アンサンブル感度を $A^{ES1(EnKF)}$ 、第2アンサンブル感度を $A^{ES2(EnKF)}$ とする。

2.3 アジョイント感度とアンサンブル感度の関係性

2.3.1 アジョイント感度と第1アンサンブル感度の関係性

接線形性が保たれているとすると、式 (??) の $[N \times m]$ 次元の入力アンサンブル E_{ini} と式 (??) の m 次元の出力アンサンブル J_{fin} の関係は、第1アジョイント感度 A^{AS} を用いて、

$$J_{fin} \doteq A^{AS} E_{ini} \quad (2.3.1)$$

と表すことができる．完全に線形であれば，等号は一致する．式(??)の両辺に左から E_{ini}^T をかけると，

$$J_{fin}E_{ini}^T \doteq A^{AS} E_{ini}E_{ini}^T \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}^T &\doteq A^{AS} \left(\frac{1}{m-1}E_{ini}E_{ini}^T \right) \\ &\doteq A^{AS} P_{ini} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

と求まる (Ansell and Hakim(2007))．このとき P_{ini} は $P_{ini} = \frac{1}{m-1}E_{ini}E_{ini}^T$ から求められる初期時刻の誤差共分散である．したがって，入力アンサンブル摂動 E_{ini} が EnKF の場合 $m \geq N + 1$ (なぜなら EnKF はアンサンブル平均からのずれを摂動としているため， m メンバーが張る次元は $m - 1$)，正規乱数の場合 $m \geq N$ で P_{ini} がランク落ちせず逆行列が自明であれば，

$$A^{AS} \doteq \frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}^T P_{ini}^{-1} \doteq A^{ES1} \quad (2.3.4)$$

と求まる．したがって，アンサンブルメンバー数が EnKF の場合 $m \geq N + 1$ で，正規乱数の場合 $m \geq N$ で接線形が十分に保たれていれば，アジョイント感度 A^{AS} と第1アンサンブル感度 A^{ES1} はほぼ等しくなる．

2.3.2 アジョイント感度と第2アンサンブル感度の関係性

式(??)において，初期誤差の相関がゼロ，つまり P_{ini} の非対角成分はゼロであると仮定すると， P_{ini}^{-1} の計算は $m \ll N$ でも自明となり

$$A^{AS} \doteq \frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}^T D_{ini}^{-1} \doteq A^{ES2} \quad (2.3.5)$$

と求まる．このとき D_{ini} は，対角成分は P_{ini} の対角成分に等しく，非対角成分はゼロの対角行列である．したがって，初期摂動(誤差)の相関がゼロで，接線形性が十分に保たれていれば，アジョイント感度 A^{AS} と第2アンサンブル感度 A^{ES2} はほぼ等しくなる (Ansell and Hakim(2007))．また，式(??)を変形すると

$$\frac{1}{m-1}J_{fin}E_{ini}^T = A^{ES2} D_{ini} \quad (2.3.6)$$

となるので，式(??)を式(??)に代入すると P_{ini} ， D_{ini} を用いて A^{AS} と A^{ES2} の関係は次のように表すことができる．

$$A^{AS} = A^{ES2} D_{ini} P_{ini}^{-1} \quad (2.3.7)$$

第3章 実験設定

3.1 モデル

3.1.1 Lorenz63モデル

本研究ではほとんどの実験において次の Lorenz63 モデル (Lorenz , 1963) を用いる .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

このとき各パラメタ σ, γ, b は標準値 $\sigma = 10, \gamma = 28, b = 8/3$ を用いる . 積分時間間隔は $\Delta t = 0.01$ とし , 積分手法には 4 次のルンゲ=クッタ法を用いる . また評価期間は評価期間を $\Delta t \times \tau$ と表わすと , $\tau = 1 \sim 100$ と設定する .

基本解は EnKF で得られた解析アンサンブル平均を初期値 (ini)(図??) として , Lorenz63 モデルで評価期間の最終時刻 (fin) まで積分したときの解とする . 今回の実験では、図?? に表す、3点、ini=6662 , ini=5000 , ini=2950 を基本解の初期値として扱った . また、このとき EnKF には逐次アンサンブル平方根カルマンフィルタ (Serial Ensembl Square Root Filter , 以下 Serial EnSRF)(付録 B.5 参照) を , 膨張係数 (付録 B.10 参照) は 1.005 と設定し , 局所化 (付録 B.4 参照) は行っていない . EnKF の解析アンサンブル平均は、観測システムシュミレーション実験 (Observing System Simulation Experiment、以下 OSSE) から得られたデータを用いている . OSSE では、観測誤差の標準偏差は 1.0 に設定し、観測は各時間ステップで全地点得られ、全地点観測を同化する設定としている . またこのとき Serial EnKF を用いて Kalnay et al . (2007) の Table 3(a) と同様 (Kalnay et al . (2007) では EnKF にアンサンブル変換カルマンフィルタ (ETKF) を用いている) の OSSE 実験を行った結果表?? のような結果が得られており , Kalnay et al . (2007) の結果と同等の解析値の精度が得られていることより Serial EnKF のプログラムコードにエラーはないのではないかと思われる .

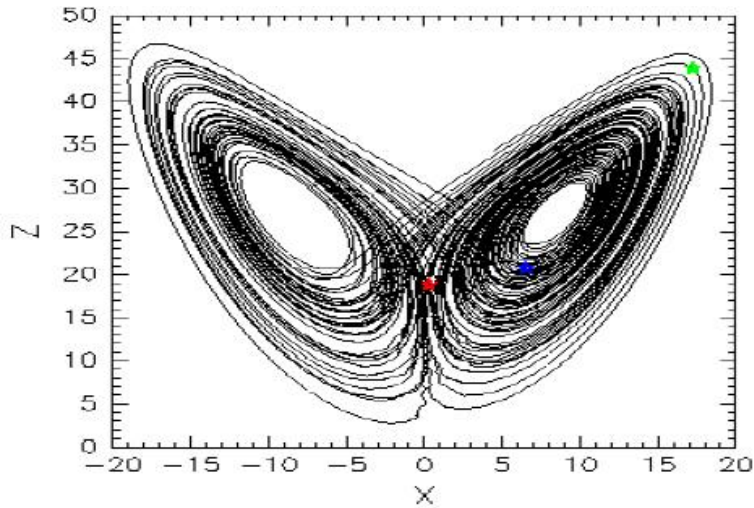


図 3.1: OSSE 実験で EnKF を用いたときの各時間ステップ (100 ~ 7500) での x (横軸) と z (縦軸) の解析アンサンブル平均 . このときアンサンブルメンバー数は 3 メンバー . 緑は 2950 ステップ , 青は 5000 ステップ , 赤は 6662 ステップにおける解析アンサンブル平均を示す .

	3member	6member
本実験	0.29($\sigma=0.005$)	0.28($\sigma=0.004$)
Kalnay et al.(2007)	0.30($\sigma=0.04$)	0.28($\sigma=0.02$)

表 3.1: 8 タイムステップ毎に観測を同化した結果得られた解析値の真の値との RMSE(Kalnay et al . (2007) の Table 3(a) と同様) . 表中の数字は RMSE を表し , σ は膨張係数の値を表す .

3.1.2 Lorenz96 モデル

接線形が成り立ち $m \geq N$ であれば $A^{AS} \cong A^{ES1(random)}$, $m \geq N + 1$ であれば $A^{AS} \cong A^{ES1(EnKF)}$ という 2.3.1 節ので述べた理論を確認するために次の Lorenz96(Lorenz , 1996) を用いる .

$$\frac{dx_j}{dt} = (x_{j+1} - x_{j-2})x_{j-1} - x_j + F \quad (3.1.1)$$

このとき , 添字 $j = 1, \dots, N$ は格子点を表す . また右辺第一項は移流項 , 右辺第二項は散逸項 , 右辺第三項は強制 (forcing) に相当する . 境界条件は周期境界条件 ($X_0 = X_N$) である . 時間積分法として 4 次のルンゲクッタ法を用いた場合 , Lorenz1996 モデルは時間積分間隔 $\Delta t = 0.05$ で安定することがわかっている . また $\Delta t = 0.2$ が 1 日に相当することが知られている (Lorenz , 1996) . 本実験では $N = 40$ 及び $N = 80$ とした .

基本解は EnKF で得られた解析アンサンブル平均を初期値 (ini) として , Lorenz96 モデルで評価期間の最終時刻 (fin) まで積分したときの解とする . 今回の実験では , 初期値 (ini) は $ini = 2000$ とおき , 接線形性を保つため最終時刻 (fin) は $fin = 2001$ とした . また , このとき EnKF には Serial EnSRF(付録 B.5 参照) と局所アンサンブル変換カルマンフィルタフィルタ (Local Ensemble Transform Kalman Filter , 以下 LETKF)(付録 B.7) を用いた . Serial EnSRF , LETKF 共に膨張係

数 (付録 B.10 参照) には動的推定法 (付録 B.10.1 参照) を用いており, 局所化については Serial EnSRF は $\sigma = 6$ (付録 B.4 参照), LETKF については $l_1 = 10, l_2 = 0$ (付録 C の図??を参照) と設定した.

EnKF の解析アンサンブル平均は, Lorenz and Emanuel(1998) による次の OSSE(Observing System Simulation Experiment) に基づいて得られたデータである. $F=8.0$ とし, 平均 2.0, 標準偏差 4.0 のガウス分布からランダムに取り出した値を初期値として 7500 ステップ積分した結果を真の値 $X_{j,n}^t$ とする. このとき j は地点, n は n 番目の時間ステップを表す. 観測値 $Y_{j,n}^o$ は, 平均ゼロ, 標準偏差 $\sigma = 1.0$ のガウス分布からランダム誤差を真の値に加えたものとする. 観測は各時間ステップで全地点得られるものとし, 全観測地点を同化する.

なお Serial EnSRF, LETKF においてプログラムエラーは付録 C からないものと思われる.

3.2 評価法

3.2.1 アジョイント感度とアンサンブル感度の構造の比較

Lorenz63 モデルの場合

アジョイント感度 A^{AS} と第 1, 第 2 アンサンブル感度 A^{ES1}, A^{ES2} との構造を比較するための評価法を定義する. 出力 x, y, z に対する感度 $A_x^{AS}, A_y^{AS}, A_z^{AS}, A_x^{ES}, A_y^{ES}, A_z^{ES}$ をそれぞれ求め, 次のように差をとる.

$$\begin{pmatrix} a_{x,x} & b_{x,y} & c_{x,z} \\ a_{y,x} & b_{y,y} & c_{y,z} \\ a_{z,x} & b_{z,y} & c_{z,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x^{AS} - A_x^{ES} \\ A_y^{AS} - A_y^{ES} \\ A_z^{AS} - A_z^{ES} \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

このとき

$$RMSE_x = \frac{1}{3}(a_{x,x}^2 + b_{x,y}^2 + c_{x,z}^2) \quad (3.2.2)$$

$$RMSE_y = \frac{1}{3}(a_{y,x}^2 + b_{y,y}^2 + c_{y,z}^2) \quad (3.2.3)$$

$$RMSE_z = \frac{1}{3}(a_{z,x}^2 + b_{z,y}^2 + c_{z,z}^2) \quad (3.2.4)$$

とおくと A^{AS} と A^{ES1}, A^{ES2} との比較の評価として次の RMSE を評価する.

$$RMSE_{xyz} = \sqrt{\frac{1}{3}(RMSE_x + RMSE_y + RMSE_z)} \quad (3.2.5)$$

Lorenz96 モデルの場合

出力 $X_j(j = 1, \dots, N)$ に対する感度 A_j^{AS}, A_j^{ES} をそれぞれ求め, 次のように差をとる.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{AS} - A_1^{ES} \\ \vdots \\ A_N^{AS} - A_N^{ES} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

このとき

$$RMSE_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{ji}, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.2.7)$$

とおくと A^{AS} と A^{ES1} , A^{ES2} との比較の評価として次の RMSE を評価する .

$$RMSE_N = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N RMSE_j} \quad (3.2.8)$$

3.2.2 Lorenz63 モデルでのアジョイント感度とアンサンプル感度の正確さ

入力にある摂動を加えたときの非線形発展から求めた地点 x の真の変化量 $\delta J_{fin,x}^I$ とアジョイント感度, 第 1 アンサンプル感度, 第 2 アンサンプル感度を用いて求めた x の変化量 $\delta J_{fin,x}^{AS}$, $\delta J_{fin,x}^{ES1}$, $\delta J_{fin,x}^{ES2}$ とを比較する . このときの評価方法は Ancell and Hakim(2007) の方法 (図 ??) に習い, $\delta J_{fin,x}^I$ と $\delta J_{fin,x}^{AS}$ (または $J_{fin,x}^{ES1}$, $J_{fin,x}^{ES2}$) の変化量が完全に一致する傾き 1 の直線へのあてはまり具合を示す決定係数で評価する . 決定係数は 1 に近いほど直線への当てはまりが良く, 決定係数が 1 に近いほど両者の値がよく一致することを意味する .

決定係数は相関係数の 2 乗で求められる . $\delta J_{fin,x}^I$ と $\delta J_{fin,x}^{AS}$ (ここでは例として $\delta J_{fin,x}^{AS}$ を扱う) のサンプル数が s 個あったとする . このときそれぞれの平均値を

$$\overline{\delta J}_{fin,x}^I = \sum_{k=1}^s \delta J_{fin,x}^{I(k)}, \quad \overline{\delta J}_{fin,x}^{AS} = \sum_{k=1}^s \delta J_{fin,x}^{AS(k)} \quad (3.2.9)$$

と表すと $\delta J_{fin,x}^I$ と $\delta J_{fin,x}^{AS}$ の相関係数 R は

$$R = \frac{\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s (\delta J_{fin,x}^{I(k)} - \overline{\delta J}_{fin,x}^I)(\delta J_{fin,x}^{AS(k)} - \overline{\delta J}_{fin,x}^{AS})}{\sqrt{\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s (\delta J_{fin,x}^{I(k)} - \overline{\delta J}_{fin,x}^I)^2} \times \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s (\delta J_{fin,x}^{AS(k)} - \overline{\delta J}_{fin,x}^{AS})^2}} \quad (3.2.10)$$

から求められる . よって決定係数は式 (??) の 2 乗から求められる .

摂動 (次元 3) のサンプル数 s は $s = 100$ とし, 本研究では 2 通りの手法で摂動を生成する . 1 つは正規乱数を用いて摂動を生成する手法で, 以下では標準偏差 σ の正規乱数から求めた 100 個の摂動を p_{σ}^{random} と表記する . 2 つめの手法は Ancell and Hakim(2007) と同様の手法で, 誤差共分散 P_{ini} を反映した摂動を生成する . 以下では誤差共分散 P_{ini} を反映した k 番目の摂動を p_k^P とする . また行列 P_{ini} の i 列目のベクトルを p_i , n 行 i 列を $P(n, i)$ と表記すると, 本研究では k 番目の摂動 p_k^P は

$$p_k^P = \frac{P_i}{P(i, i)} \times 0.01 \times a_k \quad (3.2.11)$$

で与えられるものとする . このとき a_k は標準偏差 1 の正規分布からランダムに取られた値を示し, $k = 1 \sim 34$ のとき $i = 1$, $k = 35 \sim 67$ のとき $i = 2$, $k = 68 \sim 100$ のとき $i = 3$ と設定する .

第4章 結果

4.1 Lorenz98モデルでの結果

4.1.1 アジョイント感度と第1アンサンブル感度の比較

図 ?? は次元 $N = 40, N = 80$ の Lorenz98 モデルを用いて予報タイムステップ $\tau = 1$ でアンサンブルメンバー数をパラメタとしたときのアジョイント感度場と第1アンサンブル感度場 $A^{ES1(random)}, A^{ES1(EnKF)}$ との差 $RMSE_N$ を表す. このとき正規乱数の標準偏差の大きさは $\sigma = 0.01$ とした

- (1) $A^{ES1(random)}$ に関しては, $m = N$ と $m = N - 1$ で急激に $RMSE$ が大きくなっており, $m < N$ で $A^{ES1(random)}$ の計算がうまくできていないことが確認できる. これは $A^{ES1(random)} \cong A^{AS}$ となるには $m \geq N$ でなければならないという理論と整合的である.
- (2) $A^{ES1(EnKF)}$ に関しては, $m = N$ と $m = N - 1$ で急激に $RMSE$ が大きくなっており, $m < N + 1$ で $A^{ES1(EnKF)}$ の計算がうまくいっていないことがわかる. これは $A^{ES1(EnKF)} \cong A^{AS}$ となるには $m \geq N + 1$ でなければならない理論という整合的である.
- (3) $A^{ES1(ransuu)}$ の方が $A^{ES1(EnKF)}$ よりも A^{AS} の値に近い値をとる.
- (4) Serial EnSRF を用いた $A^{ES1(EnKF)}$ の方が LETKF を用いた $A^{ES1(EnKF)}$ よりも A^{AS} との差 $RMSE$ が小さい.

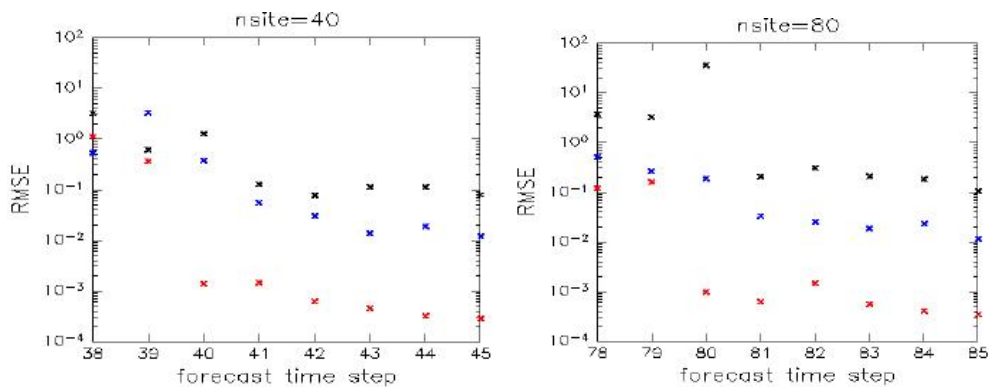


図 4.1: $N = 40$ (左図), $N = 80$ (右図) で A^{AS} とそれぞれ標準偏差 $\sigma = 10^{-2}$ の正規乱数を用いた $A^{ES1(random)}$ (赤), Serial EnKF を用いた $A^{ES1(EnKF)}$ (青), LETKF を用いた $A^{ES1(EnKF)}$ (黒) との差 $RMSE_N$

4.2 Lorenz63モデルでの結果

4.2.1 アジョイント感度場と第1アンサンブル感度場の構造の比較

正規乱数の大きさを変化させた場合

アンサンブルメンバー数 $m = 10000$ と $m = 3$ で標準偏差をパラメタとして $A^{ES1(random)}$ と A^{AS} との比較を行った結果を図??に示す. 図??から以下のことがわかる.

(5): 正規乱数の大きさを小さくするほど, $A^{ES1(random)}$ と A^{AS} がより一致する.

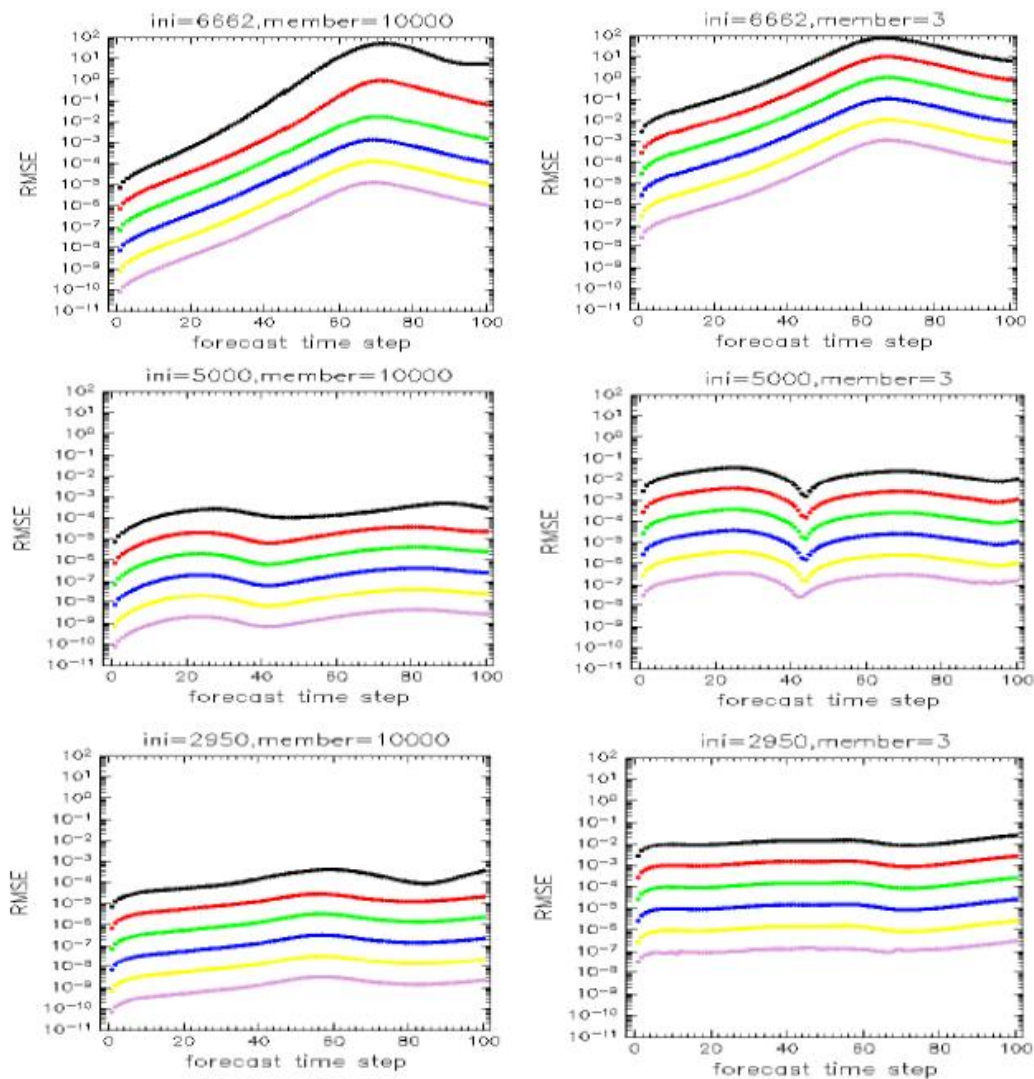


図 4.2: アンサンブルメンバー数 m で標準偏差 σ の正規乱数を入力アンサンブル摂動とした第1アンサンブル感度とアジョイント感度との差 $RMS E_{xyz}$ (縦軸)と予報タイムステップ τ (横軸)との依存関係. このとき黒は $\sigma = 10^{-1}$, 赤は $\sigma = 10^{-2}$, 緑は $\sigma = 10^{-3}$, 青は $\sigma = 10^{-4}$, 黄色は $\sigma = 10^{-5}$, ピンクは $\sigma = 10^{-6}$ を表す. 上から初期時刻 $ini=6662$, $ini=5000$, $ini=2950$ の場合を示す.

メンバー数を変化させた場合

アンサンブルメンバー数 m をパラメタとして、標準偏差 $\sigma = 10^{-1}, 10^{-2}$ の正規乱数を用いた $A^{ES1(random)}$ と A^{AS} との比較を行った結果を図??の左, 中央に, $A^{ES1(EnKF)}$ と A^{AS} との比較を行った結果を右に示す. このときアンサンブルメンバー数 $m = 3$ の $A^{ES1(EnKF)}$ に関しては擬似逆行列を用いてを計算した. これらの結果から, 以下のことが見て取れる.

- (6) 一般的にメンバー数が大きくなるほど $A^{ES1(random)}$ と A^{AS} がより一致している.
- (7) $ini = 6662$ で $\sigma = 0.1$ (左上図) の場合のみ, 予報タイムステップ $\tau = 50$ 前後からメンバー数に関わらずほぼ $A^{ES1(random)}$ と A^{AS} の差 $RMSE_{xyz}$ が等しくなる.
- (8) メンバー数が大きくなるほど $A^{ES1(EnKF)}$ と A^{AS} が一致するわけではない.
- (9) $A^{ES1(EnKF)}$ より $\sigma = 0.1$ 以下の正規乱数を用いた $A^{ES1(random)}$ の方が A^{AS} と一致する. これは (3) と同様の傾向である.

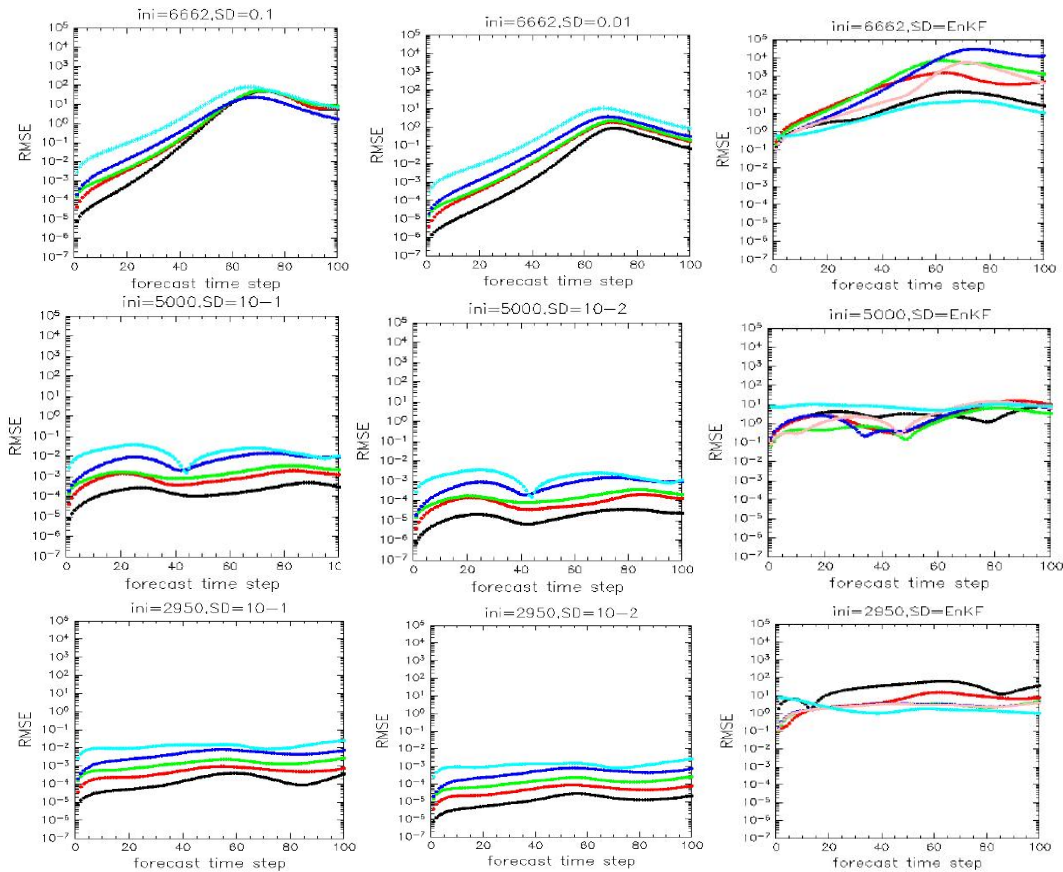


図 4.3: アンサンブルメンバー数 m で標準偏差 $\sigma = 10^{-1}$ (左), $\sigma = 10^{-2}$ (中央) の正規乱数を入力アンサンブル摂動とした第 1 アンサンブル感度, EnKF から求められた摂動を入力アンサンブル摂動とした入力第 1 アンサンブル感度 (右) とそれぞれのアジョイント感度との比較 $RMSE_{xyz}$ (縦軸) と予報タイムステップ τ (横軸) との依存関係. このとき黒が $m = 10^4$, 赤が $m = 10^3$, 緑が $m = 10^2$, 青が $m = 10^1$, ピンクが $m = 4$, 水色が $m = 3$ を表す. 上から初期時刻 $ini=6662$, $ini=5000$, $ini=2950$ の場合を示す.

4.2.2 アジョイント感度場と第2アンサンブル感度場の構造の比較

メンバー数を変化させた場合

アンサンブルメンバー数 m をパラメタとし, 標準偏差 $\sigma = 10^{-1}, 10^{-6}$ の正規乱数を用いた $A^{ES2(random)}$ と A^{AS} との比較の結果をそれぞれ, 図??の左図, 中央図に, $A^{ES2(EnKF)}$ と A^{AS} との比較の結果を図??の右図に示す. このときアンサンブルメンバー数 $m = 3$ の $A^{ES2(EnKF)}$ に関しては擬似逆行列を用いてを計算した. これらの図から以下のことがいえる.

- (9) $A^{ES2(random)}$ と A^{AS} との差 $RMSE_{xyz}$ はメンバー数が大きいほど小さい.
- (10) $A^{ES2(random)}$ と A^{AS} との差 $RMSE_{xyz}$ は同じメンバー数の場合正規乱数の大きさに関わらずほぼ等しい.
- (11) $ini = 6662$ で $\sigma = 0.1$ (左上図) の場合のみ, 予報タイムステップ $\tau = 50$ 前後からメンバー数に関わらずほぼ $RMSE_{xyz}$ が等しい. これは前節の(7)と同じ傾向である.
- (12) $A^{ES2(EnKF)}$ と A^{AS} との差 $RMSE_{xyz}$ はメンバー数に関わらずほぼ等しい.
- (13) $A^{ES2(EnKF)}$ は $A^{ES1(EnKF)}$ (図??の右図) と比べると, τ が小さいとき $A^{ES2(EnKF)}$ の方が $RMSE_{xyz}$ が小さいが τ が大きくなると $A^{ES2(EnKF)}$ の方が $RMSE_{xyz}$ が大きい.

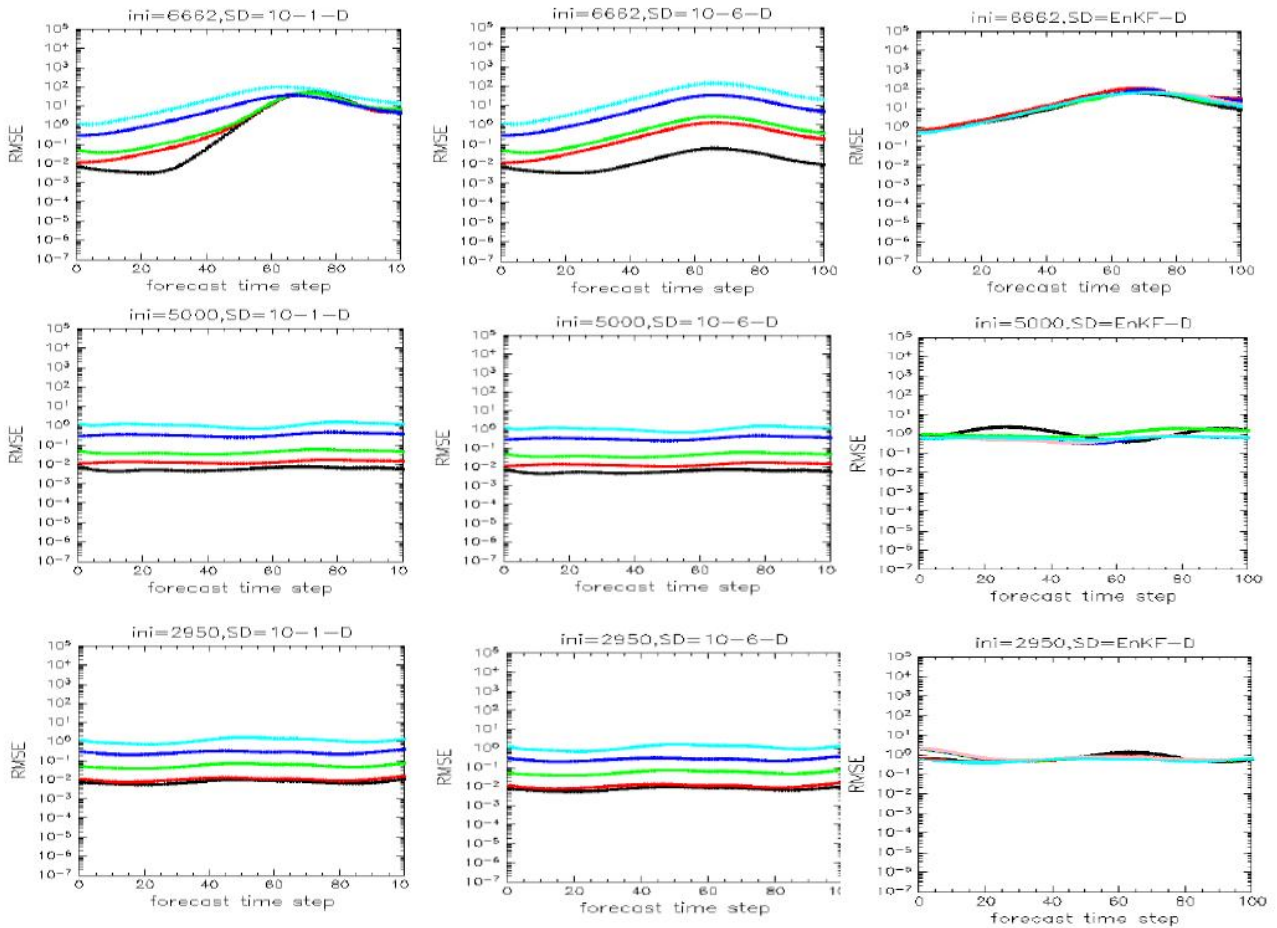


図 4.4: アンサンブルメンバー数 m で標準偏差 $\sigma = 10^{-1}$, $\sigma = 10^{-6}$ の正規乱数を入力アンサンブル摂動とした第 1 アンサンブル感度と, EnKF から求められた摂動を入力アンサンブル摂動とした入力第 1 アンサンブル感度とアジョイント感度とのそれぞれの比較 $RMSE_{xyz}$ (縦軸) と予報タイムステップ τ (横軸) との依存関係. このとき黒が $m = 10^4$, 赤が $m = 10^3$, 緑 $m = 10^2$, 青点が $m = 10^1$, ピンクが $m = 4$ を示す. 水色が $m = 3$ を表す. 上から初期時刻 $ini=6662$, $ini=5000$, $ini=2950$ の場合を示す.

4.2.3 アジョイント感度と第1アンサンブル感度，第2アンサンブル感度の正確さの比較

標準偏差 $\sigma = 0.01$ の正規乱数を入力アンサンブル摂動として用いた場合

図 ?? の左図は誤差共分散の構造に応じた摂動 p^P を，図 ?? の右図は標準偏差 $\sigma = 0.1$ の正規乱数から求めた摂動 $p_{0.1}^{random}$ をサンプルと， A^{AS} ， $A^{ES1(random)}$ ， $A^{ES2(random)}$ を用いてそれぞれ推定した地点 x の変化量 $\delta J_{fin,x}^{AS}$ ， $\delta J_{fin,x}^{ES1(EnKF)}$ ， $\delta J_{fin,x}^{ES2(EnKF)}$ の正確さを表す．このとき入力アンサンブル摂動のメンバー数は $m = 3$ とした．これらの図から以下のことが見て取れる．

- (14) 誤差共分散の構造に応じた摂動 p^P を与えた場合， A^{AS} ， $A^{ES1(EnKF)}$ ， $A^{ES2(EnKF)}$ のどれを用いてもほぼ同等の決定係数をとっている．
- (15) 標準偏差 0.1 の正規乱数から求めた摂動 $p_{0.1}^{random}$ を与えた場合， A^{AS} ， $A^{ES(random)}$ は同等の精度が得られているが， $A^{ES2(EnKF)}$ はすぐ決定係数が 1 から小さくなっており， A^{AS} ， A^{ES1} のように $J_{fin,x}^t$ を推定できていない．

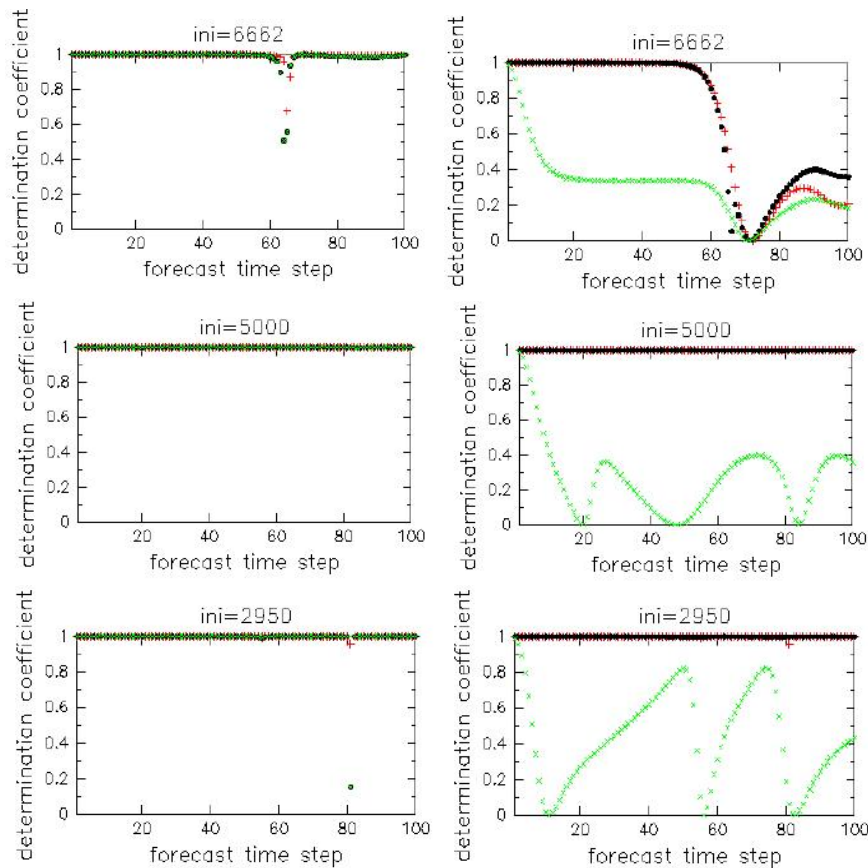


図 4.5: 摂動 p^P (右)，摂動 $p_{0.1}^{random}$ (左) を加えたときの $J_{fin,x}^t$ とそれぞれ $J_{fin,x}^{AS}$ (赤)， $J_{fin,x}^{ES1}$ (黒)， $J_{fin,x}^{ES2}$ (緑) との関係を表す決定係数 R^2 (縦軸) と予報タイムステップ τ (横軸) 依存関係．このとき入力アンサンブル摂動のメンバー数は $m = 3$ とした．上から初期時刻 $ini=6662$ ， $ini=5000$ ， $ini=2950$ の場合を示す．

EnKFの摂動を入力アンサンブル摂動として用いた場合

図 ?? の左図は誤差共分散の構造に応じた摂動 p^P を，図 ?? の右図は標準偏差 $\sigma = 0.01$ の正規乱数を用いた摂動 $p_{0.01}^{random}$ を与え， A^{AS} ， $A^{ES1(EnKF)}$ ， $A^{ES2(EnKF)}$ を用いてそれぞれ推定した地点 x の変化量 $\delta J_{fin,x}^{AS}$ ， $\delta J_{fin,x}^{ES1(EnKF)}$ ， $\delta J_{fin,x}^{ES2(EnKF)}$ の正確さを表す．このとき入力アンサンブル摂動のメンバー数は $m = 4$ とした．これらの図から以下のことが見て取れる．

- (16) 誤差共分散の構造に応じた摂動 p^P を与えた場合， A^{AS} ， $A^{ES1(EnKF)}$ ， $A^{ES2(EnKF)}$ のどれを用いてもほぼ同等の決定係数をとっている． A^{AS} と $A^{ES2(EnKF)}$ がほぼ同等の決定係数をとっていることは Ansell and Hakim(2007) による図 ?? の結果と整合的である．
- (17) 標準偏差 0.01 の正規乱数を用いた摂動 $p_{0.01}^{random}$ を与えた場合， A^{AS} の決定係数は予報タイムステップ $\tau = 1 \sim 100$ にかけてほぼ 1 であり真の変化量 $J_{fin,x}^t$ を良く推定できているが， $A^{ES1(EnKF)}$ では予報タイムステップ $\tau = 5$ 前後から， $A^{ES2(EnKF)}$ ではすぐに決定係数が 1 から小さくなっており， A^{AS} のように $J_{fin,x}^t$ をうまく推定できていない．

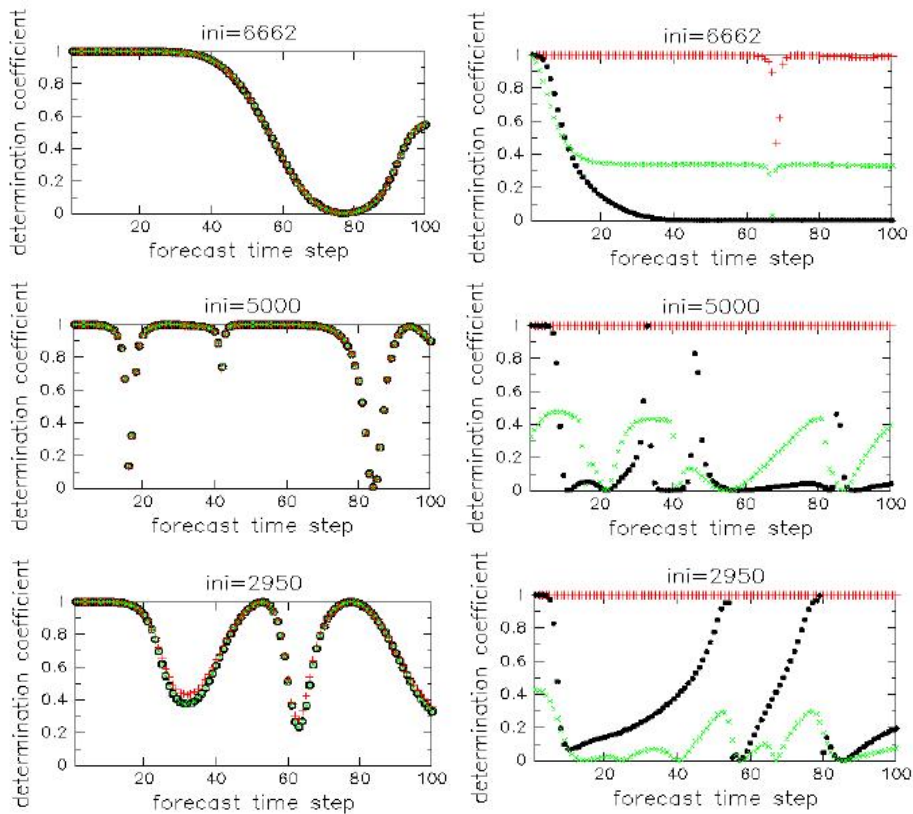


図 4.6: 摂動 p^P (右)，摂動 $p_{0.01}^{random}$ (左) を加えたときの $J_{fin,x}^t$ とそれぞれの $J_{fin,x}^{AS}$ (赤)， $J_{fin,x}^{ES1}$ (黒)， $J_{fin,x}^{ES2}$ (緑) との関係を表す決定係数 R^2 (縦軸) の値と予報タイムステップ τ (横軸) との依存関係．このとき入力アンサンブル摂動のメンバー数は $m = 4$ とした．上から初期時刻 $ini=6662$ ， $ini=5000$ ， $ini=2950$ の場合を示す．

第5章 考察

4章で(1)~(17)が得られた原因について考察していく。

まず、(1)と(2)の結果であるが、この結果が得られたのは入力アンサンブル摂動 E_{ini} が正規乱数の場合 アンサンブルメンバー数 $m <$ モデルの次元 N , EnKF から得られた摂動の場合 アンサンブルメンバー数 $m <$ モデルの次元 $N + 1$ で P_{ini} がランク落ちのため逆行列の計算がうまくできていないことから生じたためであり、これは2.3.1節での理論と整合的である。

次に(4)について考察する。なお(3)については(9)の考察で触れる。今回用いた Serial EnSRF と LETKF の大きな違いは、アンサンブルメンバー不足によるサンプリングエラーを除去するために用いる局所化の仕方の違いである。Serial EnSRF はガウス分布を近似した関数で局所化(付録B.4の図B.4を参照)をしているのに対し、LETKF は lopal patch 内は1, lopal patch 外はゼロという不自然な階段関数を用いた局所化をしている。そのため、LETKF は Serial EnSRF に比べると離れた格子点でのサンプリングエラーがうまく除かれているとは言えない。その結果、LETKFの方がより $RMS E_N$ が大きくなったことに起因しているものと思われる。

(5)では正規乱数の大きさが小さいほど A^{AS} と $A^{ES1(random)}$ がより等しくなることが見て取れたが、これは正規乱数の大きさが小さいほど入力と出力が線形関係であるという仮定を満たしているからだと考えられる。 A^{ES1} の計算式(??)から考慮すると、アンサンブルメンバー数が等しければ正規乱数の大きさに関わらず P_{ini} に含まれるサンプリングエラーは等しいため、 $J_{fin} E_{ini}^T$ の見積りに $A^{ES1(random)}$ が依存しているといえる。このことから正規乱数の大きさが小さいほど $J_{fin} E_{ini}^T$ の見積りが良いことがわかる。

(6)ではメンバー数が大きくなるほど $A^{ES1(random)}$ が A^{AS} により近づくことが見て取れた。これは、 A^{ES1} の計算式(??)で $J_{fin} E_{ini}^T$, P_{ini} を見積もるのにメンバー数が少ないほどより大きなサンプリングエラーが特に非対角成分に含まれるためだと考えられる。このとき $E_{ini} E_{ini}^T$ の非対角成分を図??に示す。図??よりメンバー数が小さくなるほど、非対角成分(相関)のサンプリングエラーの影響が大きく現れていることがわかる。このことに付随して(9)でメンバー数が大きくなるほど $A^{ES2(random)}$ と A^{AS} の差 $RMS E_{xyz}$ が小さくなることが見て取れたのは、メンバー数が大きくなるほどサンプリングエラーが小さくなっているからである。つまりそれは相関成分が小さくなることと同意である。これは、初期摂動の相関成分がゼロで接線形性が保たれている場合 $A^{ES2(random)}$ と A^{AS} がほぼ等しくなるので、初期摂動の相関が小さいほど $A^{ES2(random)}$ は A^{AS} に近づくと言えることと同じある。一方で EnKF を摂動とした場合はそのときの誤差分布に応じた摂動が得られるためアンサンブルメンバーを増やしたところで相関が小さくなることは考

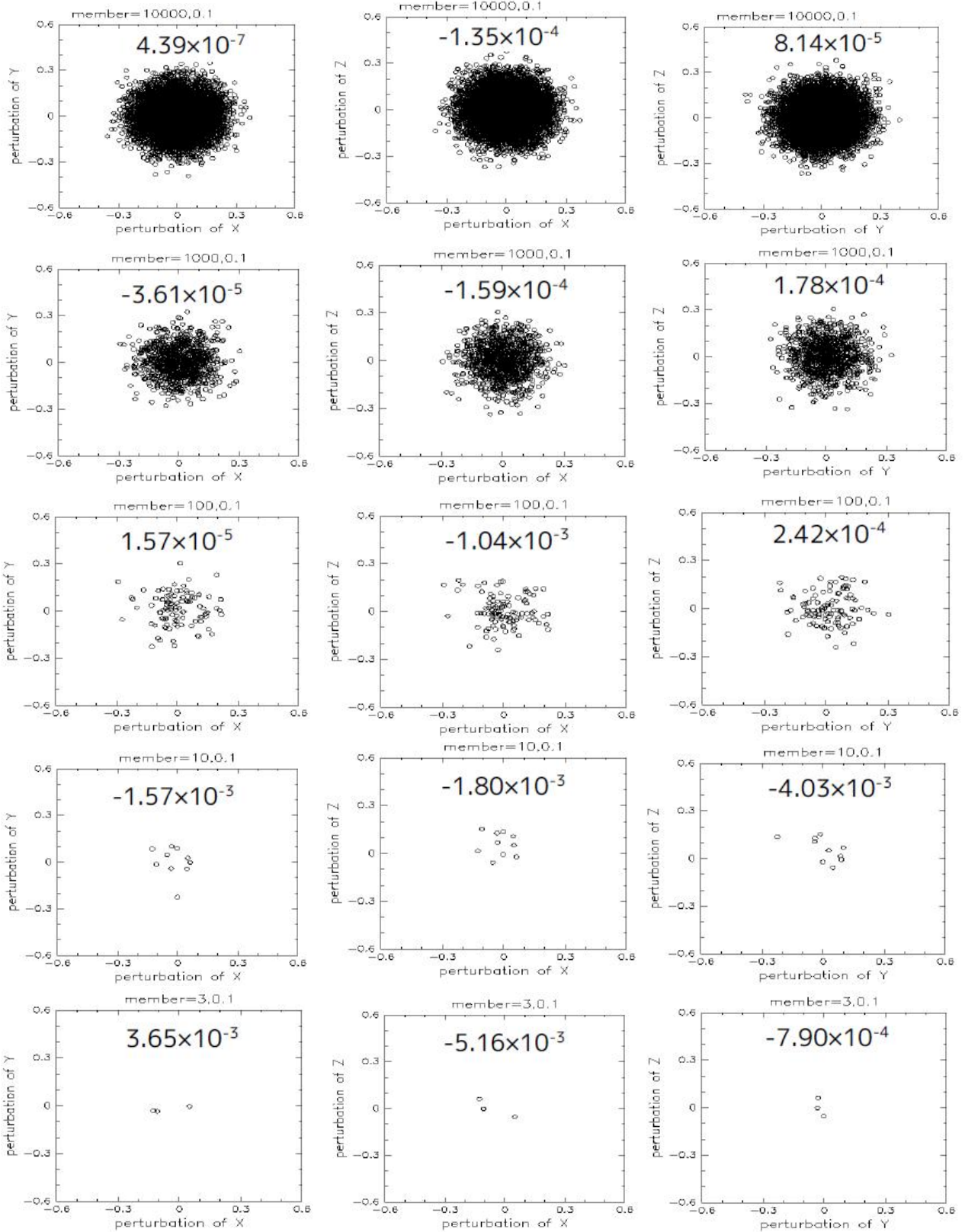


図 5.1: 行列 P_{ini} の (1,2) 成分 (左), (1,3) 成分 (中央), (2,3) 成分 (右) を表す. このとき上図からメンバー数, 10^4 , 10^3 , 10^2 , 10^1 , 3. 図中の数値は実際の各成分の値を示す. 上から初期時刻 $ini=6662$, $ini=5000$, $ini=2950$ の場合を示す.

えられないので、 $A^{ES2(EnKF)}$ は $A^{ES2(random)}$ のようにメンバー数を増やすほど A^{AS} に近づくという性質はないといえる。

次に、(7) と、(7) と同じ傾向をもつ (11) の結果について考察する。図 ?? は、標準偏差 $\sigma = 0.1$ 、 0.01 の正規乱数を入力アンサンブル摂動としてアンサンブル予報を行なったときの解の軌道を見ると、初期時刻 $ini=6662$ で $\sigma = 0.1$ の正規乱数を摂動とした場合のみ複数の予報アンサンブルメンバーが予報タイムステップ $\tau = 40$ くらいから大きく基本解からずれていることがわかる。このことから、 $\tau = 40$ 前後以降から基本解から大きくずれた出力サンプルが回帰分析に悪影響を与えてることによって (3) と (8) のような結果が得られたといえる。よって、この事実から予報アンサンブルメンバーが基本解からずれないように入力アンサンブル摂動はできるだけ小さくとることが望ましいといえる。 $A^{ES1(random)}$ に関しては (5) より正規乱数の大きさが小さいほど A^{AS} に近づくことが確かめられているので、 $A^{ES1(random)}$ を用いる場合、丸め誤差が生じない程度の小さな正規乱数を用いるのが良いと結論づけられる。

次に (8) で得られた結果について考察する。まず図 ?? の右図を見ると $\tau = 1$ のときメンバー数にかかわらずほぼ $RMS E_{xyz}$ の大きさがほぼ同等である。このことからアンサンブルメンバー数に関わらず EnKF から得られた摂動から求められる P_{ini} の見積りはほぼ同等であるといえる。また EnKF から得られた摂動でアンサンブル予報を行ったときの解の軌道を図 ??、図 ??、図 ?? に示す。これらの図からアンサンブルメンバー数 $m = 10^4$ 、 10^3 の EnKF から得られた摂動には基本解から大きくずれた摂動が含まれていることがわかる。よって $m = 10^4$ 、 $m = 10^3$ では基本解からずれた大きな出力サンプルがありそれが回帰分析において大きな影響を持ち回帰分析に悪影響を与えることが推定されるため、メンバー数を大きくすれば $RMS E_{xyz}$ が小さくなるわけではないといえる。また基本解に沿ったアンサンブル解が得られているメンバー数が $m = 10^2$ 、 10^1 、 A の $RMS E_{xyz}$ を比べると、 $ini = 6662$ では τ が大きくなるとともに各メンバーがとる $RMS E_{xyz}$ の値は異なるが、 $ini = 5000$ では似通った値をとり、 $ini = 2950$ ではほぼ等しいことがわかる。よって $A^{ES1(EnKF)}$ は解を得られた場の流れによって特徴が大きく左右されているといえる。しかし、一方で (12) では初期時刻 ini に関わらず等しい値をとることがわかっている。また (13) からは τ が大きくなると $A^{ES1(EnKF)}$ の方が $A^{ES2(EnKF)}$ よりも大きくなることがわかっている。よって、 τ が大きくなるほど $J_{fin} E_{ini}^T$ の出力 x と入力 y の相関、出力 x と入力 z の相関など入力と出力と変数が異なる部分の相関が τ が大きくなるほどうまく表せていないことが考えられる。よって場の流れに左右されている成分は入力と出力との変数が異なる部分の相関ではないかと考えられる。

次に (9) の $A^{ES1(random)}$ の方が $A^{ES1(EnKF)}$ よりもより A^{AS} に近い値をとっていた理由について考察する。 $A^{ES1(random)}$ と $A^{ES1(EnKF)}$ の違いは入力アンサンブル摂動として、正規乱数を用いるか EnKF から得られる摂動を用いるかであり、それは流れに応じた誤差共分散を考慮していない摂動を用いているのか流れに応じた誤差共分散を考慮している摂動を用いているかの違いである。よって両者の誤差共分散の構造について調べる。 $m = 4$ の EnKF の摂動から求めた誤差共分散を P_{ini}^{EnKF} とする。このとき P_{ini}^{EnKF} の標準偏差の大きさは図 ?? に示す通りで標準偏差 0.1 に

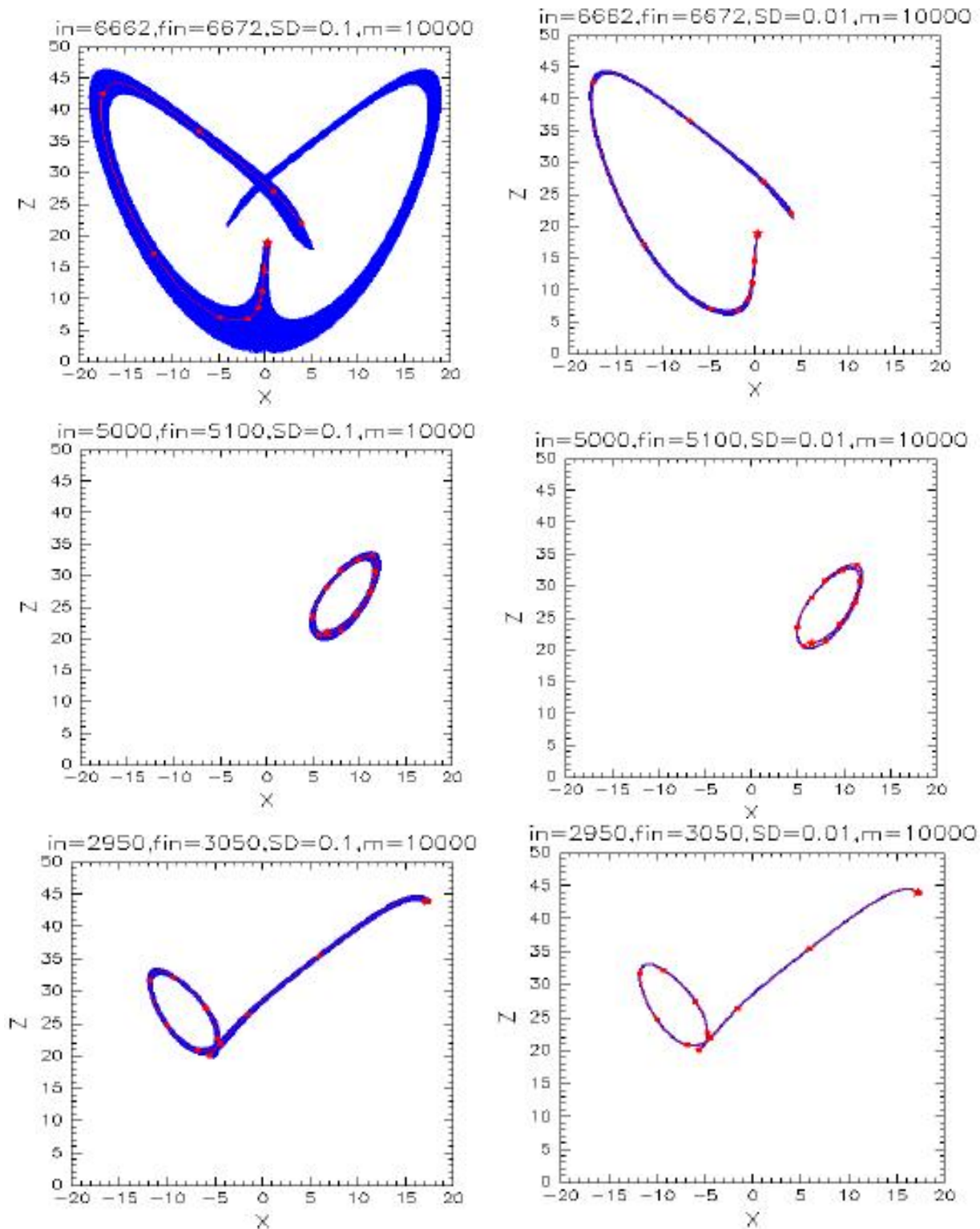


図 5.2: 基本解の軌道 (赤線) と基本解に標準偏差 $\sigma = 0.1$ (左図), $\sigma = 0.01$ (右図) の正規乱数を入力アンサンブル摂動として加えたときのアンサンブル予報 (青線) の解の軌道を示す. このとき予報タイムステップ $\tau = 100$ までの解の軌道を示す. 赤点と赤点の間隔は $\tau = 10$ である. 上から初期時刻 $ini=6662$, $ini=5000$, $ini=2950$.

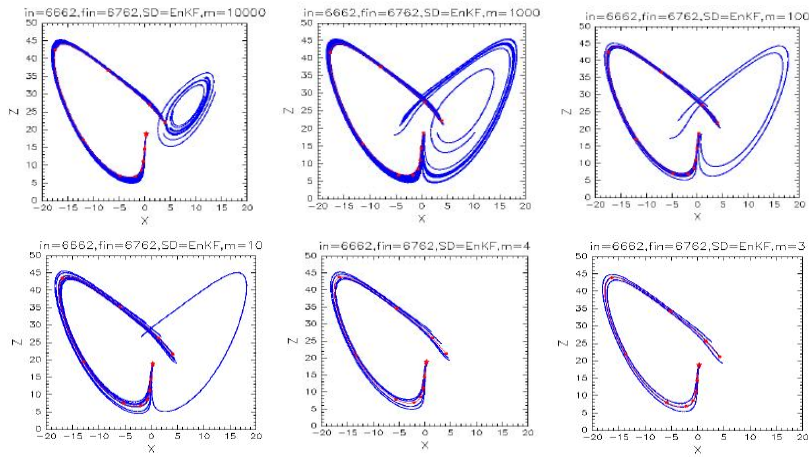


図 5.3: 基本解の軌道 (赤線) と基本解に EnKF から得られた摂動を入力アンサンブル摂動として加えたときのアンサンブル予報 (青線) の解の軌道を示す . このとき予報タイムステップ $\tau = 100$ までの解の軌道を示す . 赤点と赤点の間隔は $\tau = 10$ である . 初期時刻 $ini=6662$ で上段左からアンサンブルメンバー数 $m = 10^4, 10^3, 10^2$, 下段左から $m = 10^1, 4, 3$ の場合を表す .

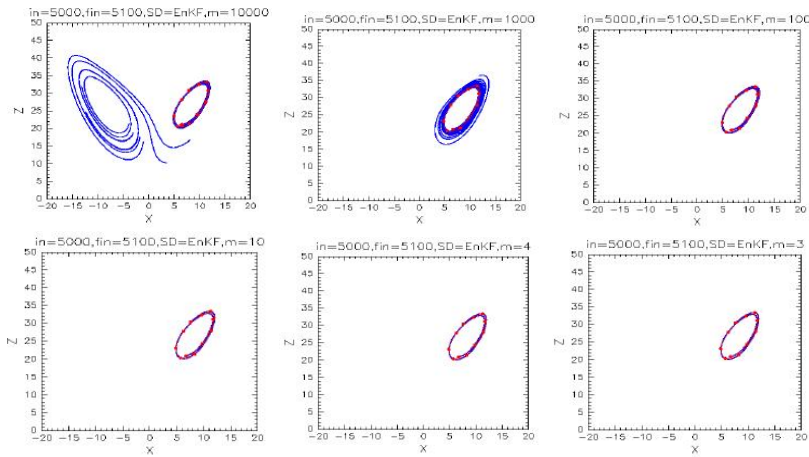


図 5.4: 図 ?? と同様 . ただし初期時刻 $ini=5000$

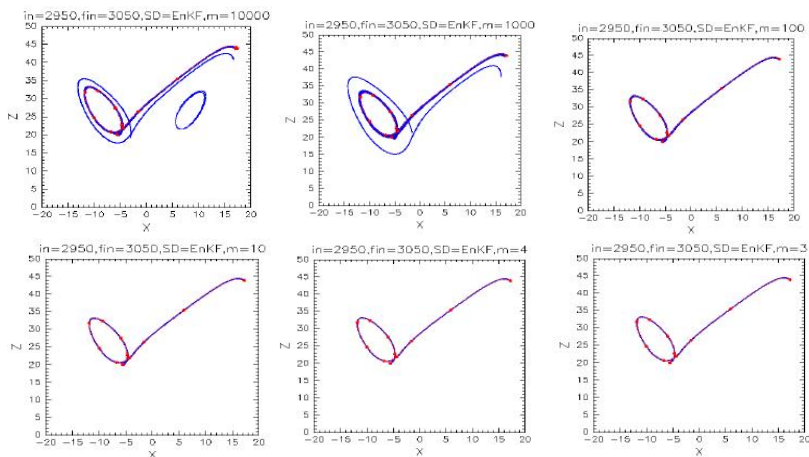


図 5.5: 図 ?? と同様 . ただし初期時刻 $ini=2950$.

	(1,1)	(2,2)	(3,3)
ini=6662	0.148	0.140	0.290
ini=5000	6.37×10^{-2}	0.276	0.100
ini=2950	7.89×10^{-2}	0.11	6.43×10^{-2}

表 5.1: 各初期時刻 $ini = 6662, 5000, 2950$ におけるアンサンブルメンバー数 $m = 4$ の EnKF の摂動から求めた誤差共分散行列の標準偏差の大きさ . (1,1) は行列 P の 1 行 1 列成分の標準偏差であることを示す .

	固有値
正規乱数(標準偏差0.1)	$1.07 \times 10^{-2}, 5.33 \times 10^{-3}, 1.70 \times 10^{-4}$
EnKF(ini=6662)	$1.85 \times 10^{-2}, 4.21 \times 10^{-3}, 2.74 \times 10^{-9}$
EnKF(ini=5000)	$1.44 \times 10^{-1}, 1.19 \times 10^{-2}, 2.68 \times 10^{-6}$
EnKF(ini=2950)	$8.54 \times 10^{-2}, 5.10 \times 10^{-3}, 3.18 \times 10^{-8}$

表 5.2: アンサンブルメンバー数 $m = 4$ で正規乱数から求められる誤差共分散行列 P_{ini}^{random} と各時間ステップ (ini) で EnKF から得られた摂動から求められる誤差共分散行列 P_{ini}^{EnKF} を固有値分解した結果の固有値 .

近い値をとっている . そこで $m = 4$ の標準偏差 $\sigma = 0.1$ の大きさの正規乱数から求めた誤差共分散 P_{ini}^{random} と P_{ini}^{EnKF} とを比較する . 表?? は P_{ini}^{random} と P_{ini}^{EnKF} の両者を固有値分解した結果の固有値を表す . 表?? から P_{ini}^{EnKF} の固有値の 1 つが P_{ini}^{random} の固有値よりもかなり小さいことがわかる . このとき誤差共分散行列を固有値分解し , 逆行列をとると以下のように表せられる .

$$(P_{ini})^{-1} = S D^{-1} S^T \quad (5.0.1)$$

このとき D は固有値を対角成分に持つ対角行列で , S は各固有値に対応する固有ベクトルを成分に持つ行列である . よって , P_{ini}^{EnKF} の固有値のひとつがかなり小さいことによって $(D_{ini}^{EnKF})^{-1}$ の値は D_{ini}^{random} よりも大きくなり , $(P_{ini}^{EnKF})^{-1}$ の各成分の大きさは $(P_{ini}^{random})^{-1}$ 成分よりもより大きな成分がとられることが考えられる . その結果 , 第 1 アンサンブル感度を求める式(??)より , $J_{ini} E_{ini}^t$ に $(P_{ini}^{EnKF})^{-1}$ をかけると , $J_{ini} E_{ini}^t$ に $(P_{ini}^{random})^{-1}$ をかけたときよりも $J_{ini} E_{ini}^t$ に含まれるサンプリングエラーの影響が大きく反映されてしまい , $A^{ES1(EnKF)}$ は $A^{ES1(random)}$ よりも A^{AS} との差が大きくなっていると考えられる . これは , (3) についても同様のことが考えられる .

次に (10) について考察する . (5) では正規乱数が小さくなるほど $A^{ES1(random)}$ と A^{AS} との差 $RMSE_{xyz}$ が小さくなるのが確認されたのに対し , (7) では $A^{ES2(random)}$ と A^{AS} との差 $RMSE_{xyz}$ が正規乱数の大きさに関わらずほぼ等しいということが確認された . アンサンブルメンバー数が同じで正規乱数の大きさが同じであれば , $A^{ES1(random)}$ と $A^{ES2(random)}$ の計算において $J_{fin} E_{ini}^T$ は同じ値なので , 両者の違いは $(P_{ini})^{-1}$, $(D_{ini})^{-1}$ の部分で非対角成分がゼロでないか , ゼロであるか

ということである．つまり、(5)と(10)の結果から $(P_{ini})^{-1}$ で非対角成分があれば正規乱数を小さくしたほうが $RMS E_{xyz}$ は小さくなり $(D_{ini})^{-1}$ で非対角成分があれば正規乱数の大きさを変えても $RMS E_{ini}$ はほぼ同等であるということがいえる．この理由は次のように考えられる． $J_{fin} E_{ini}^T$ に $(P_{ini})^{-1}$ をかけると $J_{fin} E_{ini}^T$ の3成分すべてが $A^{ES1(random)}$ に反映されるが、 $(D_{ini})^{-1}$ をかけると $J_{fin} E_{ini}^T$ の1成分のみしか $A^{ES2(random)}$ に反映されない．そのため正規乱数の大きさが小さくなって $J_{fin} E_{ini}^T$ の3成分の見積りが良くなったとしても1成分しか $A^{ES2(random)}$ の結果に反映されないため、3成分すべてが反映される $A^{ES1(random)}$ よりも $J_{fin} E_{ini}^T$ の見積りの改善の影響が反映されにくいと考えられる．このことから $A^{ES2(random)}$ では正規乱数の大きさを変えても $RMS E_{xyz}$ がほぼ変わらないのではないかと考えられる．

(14), (15) では誤差共分散の構造にあった摂動 p^P をサンプルとしても、標準偏差 0.1 の正規乱数から求めた摂動 $p_{0.1}^{random}$ をサンプルとしても A^{AS} , $A^{ES1(random)}$ から見積もった $J_{fin, x}^{AS}$, $J_{fin, x}^{ES1(random)}$ の正確さはほぼ同様であることが見て取れた．これは、 A^{AS} と $A^{ES1(random)}$ の値がほぼ等しいことから理解できる．次に、誤差共分散の構造にあった摂動 p^P をサンプルとした場合は $A^{ES1(random)}$ と $A^{ES2(random)}$ から見積もった $J_{fin, x}^{ES1(random)}$, $J_{fin, x}^{ES2(random)}$ の正確さが等しい理由について考える．これは以下の理由から理解できる．行列 P_{ini} の i 列目のベクトルを p_i とおく．このとき摂動 p^P は誤差共分散 P_{ini} の誤差分布に対応した摂動なので、その k 番目の摂動はある任意の係数 b を用いて、 $p_k^P = b p^i$ と表現できる．このとき i 番目の成分が1でその他の成分がゼロのベクトルを I_i とすると

$$(P_{ini})^{-1} p_k^P = b I_i \quad (5.0.2)$$

$$(D_{ini})^{-1} p_k^P = b I_i \quad (5.0.3)$$

と求まるので、 $\delta J^{ES1(random)}$ と $\delta J^{ES2(random)}$ は結局等しくなることがわかる．

$$\delta J^{ES1(random)} = A^{ES1(random)} p_k^P \quad (5.0.4)$$

$$= \frac{b}{m-1} J_{fin} E_{ini}^T I_i \quad (5.0.5)$$

$$\delta J^{ES2(random)} = A^{ES2(random)} p_k^P \quad (5.0.6)$$

$$= \frac{b}{m-1} J_{fin} E_{ini}^T I_i = \delta J^{ES1(random)} \quad (5.0.7)$$

(16) で誤差共分散の構造にあった摂動 p^P を与えた場合 $A^{ES1(EnKF)}$ と $A^{ES2(EnKF)}$ から見積もった $J_{fin, x}^{ES1(EnKF)}$, $J_{fin, x}^{ES2(EnKF)}$ の正確さが同等であったのも上記と同様の理由であると言える．よって、誤差共分散の構造にあった摂動 p^P をサンプルとした場合は A^{ES1} を用いても A^{ES2} を用いても同等の出力の変化量が得られることがわかる．よって、誤差共分散構造に応じた初期摂動 p^P の変化量の推定をする場合 A^{ES1} は A^{ES2} に置き換えることができるといえる．また、 A^{AS} , $A^{ES2(random)}$ から見積もった $J_{fin, x}^{AS}$, $J_{fin, x}^{ES2(random)}$ の正確さはほぼ同様であることから、誤差共分散構造に応じた初期摂動 p^P の変化量の推定をする場合 A^{AS} は A^{ES2} で近似的に置き換えることが可能であるといえる．

しかし、一方で(15)、(17)では $A^{ES2(random)}$ 、 $A^{ES1(EnKF)}$ 、 $A^{ES2(EnKF)}$ は誤差共分散の構造にあっていない摂動を与えた場合、決定係数がすぐに1から小さくなっており、 A^{AS} のように真の変化量 $J'_{fin,x}$ をうまく推定できていない結果が得られている。これは、アンサンブル感度はある入力アンサンブル摂動 A とその結果得られた出力アンサンブル摂動 B の関係を回帰分析した結果得られた感度であるので、 A とは性質の違う入力アンサンブル摂動 C を無理に A と B の關係に当てはめても出力の変化量はうまく推定できないからだといえる。したがって、感度 $A^{ES2(random)}$ 、 $A^{ES1(EnKF)}$ 、 $A^{ES2(EnKF)}$ は入力アンサンブル摂動から求めた誤差共分散の構造(それぞれ D_{ini}^{random} 、 P_{ini}^{EnKF} 、 D_{ini}^{EnKF})に準ずる感度であるといえる。

第6章 議論

4, 5章での結果, 考察をもとにアンサンブル感度の用い方について議論する. 第1アンサンブル感度を計算のためには, 入力アンサンブル摂動が正規乱数の場合 $m \geq N$, EnKF の摂動の場合 $m + 1 \geq N$ であることが確かめられた以上, 第1アンサンブル感度をそのまま正直に大次元モデルで用いることは計算資源面の問題から不可能である. よって, アジョイント感度と同様の感度場を見るために第1アンサンブル感度を用いるという発想は実現困難である. . . しかし, 一方でランク落ちした行列の逆行列を擬似逆行列を用いて近似的に表すことができれば, アンサンブルメンバー数がモデルの次元より小さくても第1アンサンブル感度の計算は理論上可能となる. しかし, まだ擬似逆行列を用いて第1アンサンブル感度を表した研究例はなく, どこまでメンバー数を減らすことができ, どれくらいの精度で逆行列が近似されているのか, アジョイント感度にどの程度近い値をとるかについては検討しなくてはならないと言える. 仮にアジョイント感度の代用として擬似行列を用いた第1アンサンブル感度を用いることを考えた場合は, 入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動を扱うよりも標準偏差を最大限界に小さくした正規乱数を用いた方が (7), (9) の結果, 考察から良いと思われる. A^{AS} と同様の感度場を見れるものとして一番期待できそうなのは $A^{ES2(random)}$ である. メンバー数を多く取れば $A^{ES2(random)}$ は A^{AS} に近づくことを確認したが, 実際どれくらいのメンバー数があれば $A^{ES2(random)}$ は A^{AS} のと似たような感度場を再現できるのか, そのメンバー数は大次元系での計算資源面の問題をクリアできるのかといったことを今後検討していく必要がある.

また, 入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動を用いる場合は正規乱数を用いる場合とは異なり, その摂動の大きさはデータ同化する観測の誤差の大きさに依存するため, 観測誤差が大きいときには入力アンサンブル摂動も大きくなることが想定される. また膨張係数の値が大きければ, それはさらなる摂動の拡大につながる. そのため, EnKF から得られた摂動を入力アンサンブル摂動として用いることは図 ?? の左上図で見られたようにアンサンブルメンバーが基本解からずれた軌道をとってしまう恐れがあり正確な回帰分析ができなくなる危険性ははらんでいることを念頭に置いとかなければならないといえる.

また, Ancell and Hakim(2007) では $A^{ES2(EnKF)}$ の感度場の構造を調べているが, (16),(17) の結果, 考察から過去のどのような物理過程が現在や未来の変動を引き起こすのかといった物理過程の推論に第2アンサンブル感度 $A^{ES2(EnKF)}$ 用いることは困難なのではないかと思われる. なぜなら $A^{ES2(EnKF)}$ は EnKF から見積もった誤差共分散構造に応じた感度を表わしているが, その誤差共分散構造はアンサンブルメンバー数や膨張係数の大きさや局所化の方法などによって大

きく左右されるため、パラメタの取り方次第で感度の見え方が変わると考えられ、また誤差共分散の見積りが悪ければそれは結局誤った感度を見ていることにつながると言えるからである。しかし、 $A^{ES2(EnKF)}$ は機動的観測や観測インパクトの評価には便利であるといえる。なぜなら、これら进行评估するためには今どういう誤差の分布なのか、すなわちどういう誤差共分散構造であるかを考慮において評価からである。よって考察で述べた通り、誤差共分散が考慮されている条件下での出力の変化量を求めるのは $A^{ES1(EnKF)}$ 、 A^{AS} の代わりに $A^{ES2(EnKF)}$ を代用することが可能であるため、 $A^{ES2(EnKF)}$ は機動的観測や観測インパクトの評価には便利であるといえる。

第7章 まとめ

本研究では、感度解析法の手法のうちアジョイント感度とアンサンプル感度を用いた手法に注目し、Lorenz63, Lorenz96 モデルを用いてアジョイント感度とアンサンプル感度との比較を行いアンサンプル感度の特徴について調べた。

Ancell and Hakim(2007)では、EnKFから得られた摂動を用いた第2アンサンプル感度 $A^{ES2(EnKF)}$ とアジョイント感度 A^{AS} の比較が行われているが、本研究では新たに、EnKFから得られた摂動を用いた第1アンサンプル感度 $A^{ES1(EnKF)}$ 、正規乱数を用いた第1アンサンプル感度 $A^{ES1(random)}$ 、第2アンサンプル感度 $A^{ES1(random)}$ とアジョイント感度 A^{AS} の比較を行い、メンバー数依存性について調べた。

その結果 $A^{ES1(random)}$ については、まず計算条件としてアンサンプルメンバー数 \geq モデルの次元 ($m \geq N$) でなければならないことが確かめられた。そして以下の特徴がわかった。

- 正規乱数の大きさを小さくするほど A^{AS} に近づく。
- アンサンプルメンバーを小さくするほどサンプリングエラーが大きくなるため、メンバー数が大きいほど A^{AS} に近づく。
- A^{AS} に近づくためには、各アンサンプルメンバーの解の軌道が基本解の軌道に沿ったものでなければならない。

$A^{ES1(EnKF)}$ については、まず計算条件としてアンサンプルメンバー数 \geq モデルの次元 ($m+1 \geq N$) でなければならないことが確かめられた。そして以下の特徴がわかった。

- $A^{ES1(random)}$ ほど A^{AS} に近づかない。この原因は誤差共分散の構造の違いによるものと考えられた。
- A^{AS} の値にどの程度近づくかは、局所化の仕方、膨張係数の大きさに依存する。

また第2アンサンプル感度 $A^{ES2(random)}$ 、 $A^{ES2(EnKF)}$ について以下の特徴がわかった。

- $A^{ES2(random)}$ はメンバー数が大きくなるほどサンプリングエラーが小さくなり、その分相関が小さくなるため A^{AS} に近づく。この性質は $A^{ES2(EnKF)}$ にはない。そのためメンバー数を多くとることが可能であれば $A^{ES2(random)}$ は A^{AS} と同様の感度場を見るための代用品として用いることが可能である。このときどの程度のメンバー数が必要かは今後検討が必要。
- 入力アンサンプル摂動から求めた誤差共分散の構造に基づく初期摂動を与えれば、 $A^{ES2(random)}$ と $A^{ES1(random)}$ 、また $A^{ES2(EnKF)}$ 、 $A^{ES1(EnKF)}$ の出力の変化量の推定値は一致。 A^{AS} の出力の

変化量の推定値とはほぼ等しい．そのため機動的観測や観測インパクトの評価などには A^{AS} や $A^{ES1(EnKF)}$ を $A^{ES2(EnKF)}$ で置き換えることができる．

謝辞

本研究の遂行にあたり，絶えず熱心にご指導下さいました余田成男先生に心から深く感謝を申し上げます．セミナー等を通じて有益な助言を頂きました石岡圭一先生，内藤陽子先生に感謝申し上げます．また，日々の研究において多くの助言を頂きました京都大学大学院理学研究科海洋物理学研究室の伊藤耕介様をはじめ，同志社大学工学部地域環境研究室の山根省三先生，京都大学気象学研究室の皆様にご礼申し上げます．また大学生生活を送るために経済的に支えてくださった両親に感謝の意を表します．

本研究で用いました数値モデルには netlib の LAPACK を使用させて頂きました．図の作成には地球流体電脳倶楽部の地球流体電脳ライブラリ (DCL) を使用させて頂きました．ここに記して誠意を表します．

付録A 数値天気予報とデータ同化の概要

現在の天気予報は数値天気予報に大きく依存している。数値天気予報の精度の向上のためには、大きく数値予報モデルの高度化と初期値の改善が必要である。大気はカオス系であるため、初期値に含まれる誤差は指数関数的に増加してしまい、予報に悪影響を与える。そのため、大気のような時間発展する複雑なシステムの状態を、数値モデルの結果に観測データをうまく取り込み高精度な初期値をいかに生成するかが課題となる。このような初期値生成法をデータ同化という。

データ同化には線形最小分散推定法を基礎とするデータ同化手法と、最尤推定法を基礎とするデータ同化手法がある。まず、データ同化の初期研究で最初に提案されたのが関数当てはめ法である (Panofsky, 1949; Gilchrist and Cressman, 1954)。この手法は、気象要素の場を有限の基底関数の線形結合で表し、展開係数を観測データに基づいて最小二乗法で求める手法である。基底関数として多項式を用い、解析領域を小領域に分割して考えている。関数当てはめ法は観測にフィットするような関数を求めるもので、予報を観測で修正するものではないため厳密にはデータ同化とは言わず客観解析と呼ばれる。線形最小分散推定基礎とするデータ同化手法として初めて提案されたのが逐次修正法 (Bergthorsson and Doos, 1955)、最適内挿法 (Eliassen, 1954; Gandin, 1963) である。数値モデルによる最新の予報値 (第一推定値という) と観測値の重み付け平均をとり、予報を観測で修正することによって最適な値 (解析値) を推定する手法で、逐次修正法では重みを経験的に、最適内挿法では統計的に与えている。これらの手法では、観測値がモデルの変数と線形関係であるという制約がある。最尤推定法を基礎とするデータ同化手法として初めて提案されたのが3次元変分法 (three-dimensional variational assimilation, 以下 3D-VAR) である。変分法を客観解析に利用することは、Sasaki(1958) によって初めて研究された。観測値がモデルの変数と線形関係であるという制約はなく、1991年6月に米国気象局の全球3次元変分法が現業データ同化システムに採用された。しかし、3D-Varは時間軸が含まれない (解析に使うすべての観測データが解析時刻に観測されたものとみなす) ものであった。そこで次に時間軸にも拡張された4次元変分法 (four-dimensional variational assimilation, 以下 4D-var) が提案され、理論的背景が Le Dimet and Talagrand(1986) や Talagrand and Courtir(1987) によって論じられた。4D-varは時間軸を含むため非定時の観測も同化することができ、流れに依存する誤差共分散行列を与えることができる。4D-Varは1991年にECMWFの全球解析に採用され、2002年に気象庁がメソ解析に導入されている。現在では気象庁を含む5つの数値予報センターが全球解析に4D-Varを採用しており、気象の分野における主流のデータ同化手法と

なっている。

4D-Var に対し、もう 1 つの高度なデータ同化としてカルマンフィルタ (Kalman filter, 以下 KF) がある。KF は誤差のある観測値を用いて動的システムの状態を推定、あるいは制御するためのフィルタであり、Kalman(1960) によって提唱された。KF は誤差の確率密度分布がガウス分布で、時間発展が線形モデルである場合に推定誤差 (推定値と真の解との差) を最小とする最適な解を与える。Jazwinski(1970) ではさらに線形理論の KF を非線形系にも適応できるように、非線形モデルを摂動の線形方程式で近似することで、非線形システムでも適用できるように拡張した。これは拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter, 以下 EKF) と呼ばれる。しかし、EKF では流れに依存した誤差共分散 (予報誤差共分散行列) の時間発展を陽に計算しなくてはならないため、自由度が膨大な数値予報モデルには適応できない問題があった。そこで、Evensen(1994) は EKF の予報誤差共分散行列をアンサンブル予報を用いて近似するアンサンブルカルマンフィルタ (Ensemble Kalman Filter, 以下 EnKF) を提唱した。EnKF はアンサンブル予報とデータ同化を組み合われた手法であり、アンサンブル予報のための初期摂動を生成するため、データの手法の観点だけでなく、初期摂動生成法の観点においても研究 (例えば、Bowler, 2006; Descamps and Talagrand, 2007) が活発になされている。EnKF について詳しくは付録 B にまとめた。

EnKF と 4D-Var は、予報モデルが完全に線形性が保たれているという条件下では、かつ 4D-Var においては無限時間同化ウィンドウ、EnKF においては無限のアンサンブルサイズという理想的な条件では、理論的に双方とも同値であることが知られている。(Bouttier and Courtier, 1999) Firtig et al.(2007) では、Lorenz96 モデルを用いて EnKF と 4D-Var を比較しており、その結果十分長いタイムウィンドウをとった 4D-Var の解析誤差と、十分なアンサンブルサイズをとった EnKF の解析誤差は同程度であり、両者の初期値からの予報精度も同程度であることが示されている。しかし、現実的にはモデルは不完全であり、計算資源には限りがあるため 4D-Var に対しては同化時間ウィンドウの長さ、EnKF に対してはアンサンブルサイズが問題となる。そのような中、現在までにどちらがより優れたデータ同化手法であるかの議論がなされてきている (例えば、Lorenz, 2003; Kalnay et al. 2007) が今のところどちらがよいかの結論はない。実用的観点の面を考えると、4D-Var はアジョイントモデルの開発には多大のコストがかかり、モデルの改良・変更などがあると再度アジョイントを改良しなくてはならないが、EnKF は最新のモデルをそのまま適用できる利点がある。そのため、同じ計算資源を与えられたときに EnKF が 4D-Var と同等精度であることが示されれば、EnKF は現業センターにおいて将来の選択肢として有望であることが三好 (2008) で主張されている。

付録B カルマンフィルタに基づくデータ同化のレビュー

B.1 カルマンフィルタ (KF)

KFは誤差のある観測値を用いて動的システムの状態を推定，あるいは制御するためのフィルタであり，Kalman(1960)によって提唱された．KFは時間発展が線形モデルで，誤差の確率密度分布がガウス分布で与えられるという2つの仮定のもとで，KFは推定誤差(推定値と真の解との差)を最小とするような最適な解を与える．以下KFの導出を行う．

KFには予報プロセスと解析プロセス，計5つのプロセスから成る．まずはじめに，KFの予報プロセスを求める．ある N 次元の状態変数 X に線形の予報モデル M を作用させることで1時刻前の解析値から現在の予報値を求める．

$$X_n^f = MX_{n-1}^a \quad (\text{B.1.1})$$

このとき上の添字 a, f はそれぞれ，解析(*analysis*)，予報(*forecast*)を表し，下の添字 n は時刻を表す．一方で，真の時間発展は

$$X_n^t = M^t X_{n-1}^t \quad (\text{B.1.2})$$

と表現できる．このとき上の添字 t は真の状態(*truth*)を表す．予報モデル M が真の時間発展モデル M^t に対してランダム誤差 η を含むと仮定すると，

$$X_n^t = MX_{n-1}^t - \eta \quad (\text{B.1.3})$$

ここでは，簡単化のため η にはバイアスがないものとし，共分散 Q (次元 $[N \times N]$)を持つとする．

$$\langle \eta \rangle = 0, \langle \eta \eta^T \rangle = Q \quad (\text{B.1.4})$$

このとき $\langle \rangle$ は統計的期待値を表す．また解析誤差を $\delta X^a([N])$ ，予報誤差を $\delta X^f([N])$ とすると， $\delta X^a, \delta X^f$ は次のように定義できる．

$$\delta X^a = X^a - X^t \quad (\text{B.1.5})$$

$$\delta X^f = X^f - X^t \quad (\text{B.1.6})$$

以上，式(??)，式(??)，式(??)，式(??)から予報誤差 δX^f の予報誤差共分散 P_n^f ($[N \times N]$) は次のように表される．

$$\begin{aligned}
P_n^f &= \langle \delta X_n^f (\delta X_n^f)^T \rangle \\
&= \langle (X_n^f - X_n^t)(X_n^f - X_n^t)^T \rangle \\
&= \langle (MX_{n-1}^a - (MX_{n-1}^t - \eta)) \rangle \langle (MX_{n-1}^a - (MX_{n-1}^t - \eta))^T \rangle \\
&= \langle (M(X_{n-1}^a - X_{n-1}^t) + \eta) \rangle \langle (M(X_{n-1}^a - X_{n-1}^t) + \eta)^T \rangle \\
&= \langle (M\delta X_{n-1}^a + \eta)(M\delta X_{n-1}^a + \eta)^T \rangle \tag{B.1.7}
\end{aligned}$$

$$= \langle (M\delta X_{n-1}^a)(M\delta X_{n-1}^a)^T + \eta\eta^T \rangle \tag{B.1.8}$$

$$= MP_{n-1}^a M^T + Q \tag{B.1.9}$$

このとき $P_{n-1}^a = \langle \delta X_{n-1}^a (\delta X_{n-1}^a)^T \rangle$ を用いた．また(??)から(??)の計算において，解析誤差 δX_{n-1}^a とモデル誤差 η には相関がない，つまり $\langle (M\delta X^a)\eta^T \rangle = 0$ ， $\langle \eta(M\delta X^a)^T \rangle = 0$ であることを仮定した．以上，式(??)と式(??)がそれぞれ，予報値 X^f ，予報誤差共分散 P^f を求めるKFでの予報プロセスとなる．

次に，解析プロセスを求める． p 次元の観測値を Y^o とおくと，解析値 X_n^a は予報値 X_n^f と観測値 Y_n^o の加重平均で与えられる．

$$\begin{aligned}
X_n^a &= KY_n^o + (I - K_n H_n) X_n^f \\
&= X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f) \tag{B.1.10}
\end{aligned}$$

このとき $[N \times p]$ 次元の K_n はカルマンゲインと呼ばれ，観測にかかる重みを表す．また $[p \times N]$ 次元の H は観測演算子と呼ばれ，次の2つの役割を持つ．1つは，予報値 (N 次元のモデル空間)を観測値 (p 次元の観測空間)の次元に合わせる変換演算子の役割である，もう1つは，観測変数とモデルの予報変数の物理量が異なる場合(例えば，観測値が輝度，予報値が温度)に，モデルの予報変数の物理量を観測変数の物理量に変換する役割である．このとき，式(??)において観測値と観測空間における予報値の差 $Y_n^o - H_n X_n^f$ は， p 次元のベクトル d を用いて，

$$d_n = Y_n^o - H_n X_n^f \tag{B.1.11}$$

と表記され，このベクトル d はイノベーションベクトルと呼ばれている．さらに，式(??)の右辺第二項，予報値 X_n^f からの修正量 $K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ は解析インクリメントと呼ばれている．

ここで，観測誤差を

$$\delta Y^o = Y^o - HX^t \tag{B.1.12}$$

と表現すると，解析誤差 δX_n^a は式 (??)，式 (??)，式 (??) から

$$\begin{aligned}
\delta X_n^a &= X_n^f + K_n(Y_n^o - H_n X_n^f) - X_n^t \\
&= X_n^f - X_n^t + K_n(Y_n^o - H_n X_n^t + H_n X_n^t - H_n X_n^f) \\
&= \delta X_n^f + K_n(\delta Y_n^o - H_n \delta X_n^f) \\
&= (I - K_n H_n) \delta X_n^f + K_n \delta Y_n^o
\end{aligned} \tag{B.1.13}$$

と表すことができる．また観測誤差共分散 $R[p \times p]$ は

$$R = \langle \delta Y^o (\delta Y^o)^T \rangle \tag{B.1.14}$$

と表現できるので，式 (??)，式 (??) を用いると，解析誤差共分散 $P_n^a[N \times N]$ は

$$\begin{aligned}
P_n^a &= \langle \delta X_n^a (\delta X_n^a)^T \rangle \\
&= \langle \left((I - K_n H_n) \delta X_n^f + K_n \delta Y_n^o \right) \left((I - K_n H_n) \delta X_n^f + K_n \delta Y_n^o \right)^T \rangle \\
&= \langle (I - K_n H_n) \delta X_n^f (\delta X_n^f)^T (I - K_n H_n)^T \rangle + \langle K_n \delta Y_n^o (\delta Y_n^o)^T K_n^T \rangle \\
&= (I - K_n H_n) P_n^f (I - K_n H_n)^T + K_n R_n K_n^T
\end{aligned} \tag{B.1.15}$$

このとき予報誤差と観測誤差には相関がないこと，つまり $\langle \delta X_n^f (K_n \delta Y_n^o)^T \rangle = 0$ ， $\langle (X_n^f)^T K_n \delta Y_n^o \rangle = 0$ であることを仮定した．よって，式 (??) から，解析誤差分散の総和 ($\text{trace}(P^a)$) が最小 (解析誤差が最小) となる重み K は，

$$\frac{\partial}{\partial K} (\text{trace}(P^a)) = 0 \tag{B.1.16}$$

を解くことで得られる．多変数関数の微分から得られる公式 (Gelb et al.(1974) の式 (2.1-72)，式 (2.1-73) 参照)

$$\frac{\partial}{\partial A} (\text{trace}(ABA^T)) = A(B + B^T) \tag{B.1.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial A} (\text{trace}(AB)) = B^T \tag{B.1.18}$$

を用いて，式 (??) に式 (??) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial K_n} (\text{trace}(P^a)) &= \frac{\partial}{\partial K_n} \left[\text{trace}((I - K_n H_n) P_n^f (I - K_n H_n)^T + K_n R_n K_n^T) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial K_n} \left[\text{trace}(P_n^f - P_n^f H_n^T K_n^T - K_n H_n P_n^f + K_n H_n P_n^f H_n^T K_n^T + K_n R_n K_n^T) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial K_n} \left[\text{trace}(P_n^f - (K_n H_n P_n^f)^T - K_n H_n P_n^f + K_n H_n P_n^f H_n^T K_n^T + K_n R_n K_n^T) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial K_n} \left[\text{trace}(P_n^f) - 2\text{trace}(K_n H_n P_n^f) + \text{trace}(K_n H_n P_n^f H_n^T K_n^T) + \text{trace}(K_n R_n K_n^T) \right] \\
&= -2P_n^f H_n^T + 2K_n H_n P_n^f H_n^T + 2K_n R_n \\
&= 2K_n (H_n P_n^f H_n^T + R_n) - 2P_n^f H_n^T = 0
\end{aligned}$$

したがって、

$$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1} \quad (\text{B.1.19})$$

が得られる。式(??)を式(??)に代入すると(簡単化のため、 $H_n P_n^f H_n^T + R_n = Z_n$ とおいた)、式(??)における P_n^a は

$$\begin{aligned} P_n^a &= (I - P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n) P_n^f (I - P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n)^T + P_n^f H_n^T Z_n^{-1} R_n (P_n^f H_n^T Z_n^{-1})^T \\ &= P_n^f - 2P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n P_n^f + P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n P_n^f + P_n^f H_n^T Z_n^{-1} R_n Z_n^{-1} H_n P_n^f \\ &= P_n^f - 2P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n P_n^f + P_n^f H_n^T Z_n^{-1} (H_n P_n^f H_n^T + R_n) Z_n^{-1} H_n P_n^f \\ &= P_n^f - 2P_n^f H_n^T Z_n^{-1} H_n P_n^f + P_n^f H_n^T Z_n^{-1} Z_n Z_n^{-1} H_n P_n^f \\ &= P_n^f - P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1} H_n P_n^f \\ &= P_n^f - K_n H_n P_n^f \\ &= (I - K_n H_n) P_n^f \end{aligned} \quad (\text{B.1.20})$$

と変形できる。以上、式(??)、式(??)、式(??)が、それぞれ解析値 X^a と解析誤差共分散 P^a を求めるKFでの解析プロセスとなる。

以上、KFについてまとめると、KFは以下表??のように5つのプロセスにまとめられる。またKFのアルゴリズムについては、図??を参照。

(1)	$X_n^f = M(X_{n-1}^a)$ [M] [M]
(2)	$P_n^f = MP_{n-1}^a M^T + Q$ [N×N] [N×N] [N×N]
(3)	$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}$ [N×p] [N×M][N×p] [p×M][N×M][N×p] [p×p]
(4)	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [M] [M] [N×p] [p] [p×N][N]
(5)	$P_n^a = [I - K_n H_n] P_n^f$ [N×N] [N×M] [N×p][p×N] [N×M]

表 B.1: KF の 5 つの基本式 . N はモデルの次元 , p は観測の次元を表す .

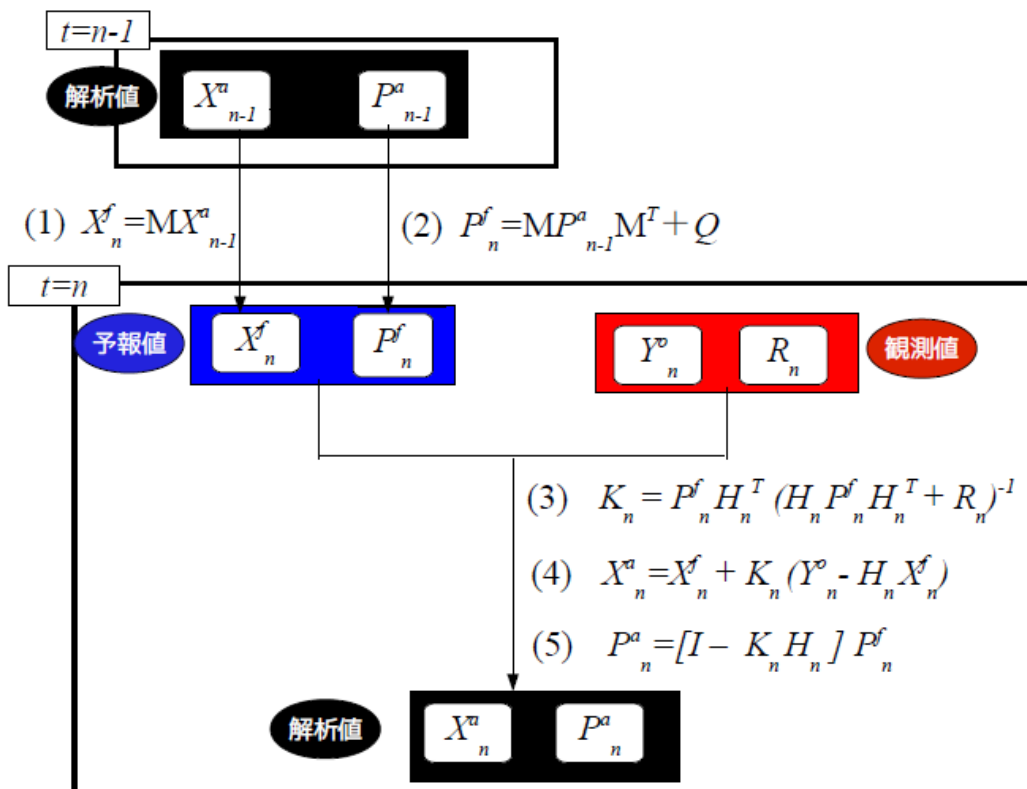


図 B.1: KF のアルゴリズム

B.2 拡張カルマンフィルタ (EKF)

KFは線形理論であるため、数値天気予報モデルのような非線形モデルをそのままKFに適応することはできない。そのような問題に対して、Jazwinski(1970)は非線形モデルから摂動の線形方程式を求めることで、KFを非線形モデルにも適応できるように拡張した。非線形方程式から摂動の線形方程式の導出は1.1.2節を参照。

EKFではKFの状態変数の時間発展式(?)の線形モデル M を非線形モデル M に、KFの誤差の時間発展方程式(?)の線形モデル M とその転置 M^T を接線形方程式から求められる接線形演算子 M 、随伴方程式から求められるアジョイント演算子 M^T に置き換えることで、非線形システムでもKFの原理を用いることを可能にしている。しかし、EKFは例え予報モデルが完全にランダム誤差も含まない理想的な場合においても、EKFは発散(filter divergence)することが知られている(例えば、Pham et al. 1998)。このとき発散とは解析値が真の解から離れていき、データ同化がうまくいかないことを言う。この原因の1つは、式(?)の計算において、接線形演算子を扱うことで誤差の非線形性を考慮できていないことにより P^f が過小評価(covariance underestimation)されるためである。 P^f が過小評価されることによって、KFの第(3)式で観測にかかる重み K が小さくなり、第(4)式において観測の情報が十分に取り込まれなくなることによって、解析値が現実から徐々に離れていってしまい、その結果発散を引き起こすことにつながる。また、モデルの不完全性も誤差共分散の過小評価に起因する原因の1つである。そこで、誤差共分散の過小評価によるEKFの発散を防ぐ手段の1つとして、次のように誤差共分散を人為的に膨張させる手法がとられる。

$$P^f = P^f(1 + \Delta), \quad \Delta > 0 \quad (\text{B.2.1})$$

このとき Δ は膨張係数と呼ばれる。誤差共分散膨張の問題については付録B.10で詳しく述べる。KFの第(5)式は、式(?)を用いて、

$$P_n^f = (1 + \Delta)MP_{n-1}^aM^T \quad (\text{B.2.2})$$

と表され、 Q を P_n^f の膨張に含めて扱うことで誤差共分散の過小評価を防ぐ手段がとられる。

以上EKFについて、表??にはKFと対比してEKFの5つの基本式を、図??にはEKFのアルゴリズムをまとめた。

	EKF	KF
(1)	$X_n^f = M(X_{n-1}^a)$ [N] [N]	$X_n^f = M(X_{n-1}^a)$ [N] [N]
(2)	$P_n^f = (I + \Delta) M P_{n-1}^a M^T$ [N×N] [N×N]	$P_n^f = M P_{n-1}^a M^T + Q$ [N×N] [N×N] [N×N]
(3)	$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}$ [N×p] [N×M][N×p] [p×N][N×M][N×p] [p×p]	$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}$ [N×p] [N×M][N×p] [p×M][N×M][N×p] [p×p]
(4)	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×N][N]	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×M][N]
(5)	$P_n^a = [I - K_n H_n] P_n^f$ [N×N] [N×M] [N×p][p×M] [N×N]	$P_n^a = [I - K_n H_n] P_n^f$ [N×N] [N×M] [N×p][p×M] [N×N]

表 B.2: EKF の 5 つの基本式 . N はモデルの次元 , p は観測の次元を表す .

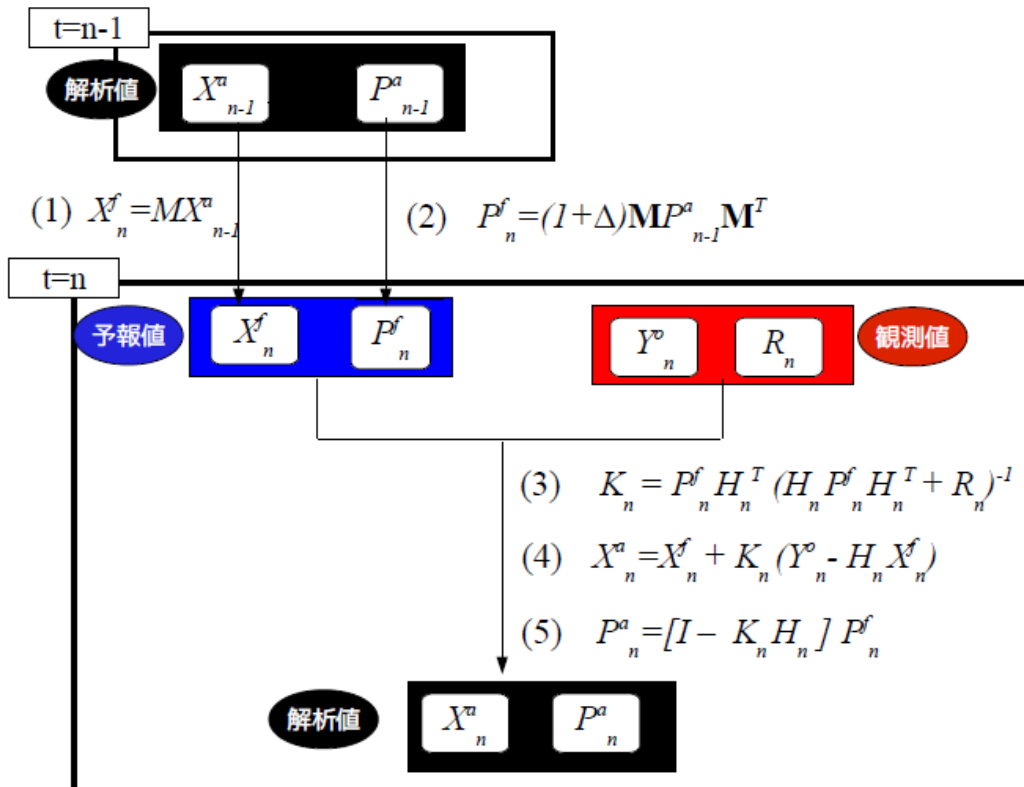


図 B.2: EKF のアルゴリズム

B.3 アンサンブルカルマンフィルタ (EnKF)

数値天気予報モデルのような多次元系 ($N \sim 10^7$) では, KF を非線形系でも適用できるように拡張した EKF でもそのまま活用することができない. その理由は 2 つある. 1 つは, 式 (??) や式 (??) での $[N \times N]$ 次元の誤差共分散 P^f を毎時間ステップ計算して保存しておくのは計算資源面から困難であるからである. もう 1 つは, データ同化する観測数が多大であるとき式 (??) の計算における $[p \times p]$ 次元の逆行列計算も計算資源面から困難となるからである. このような問題点を解決する手法として Evensen(1994) によって EnKF が提唱された. EnKF では, 誤差共分散 P を陽には計算せず, アンサンブル予報を用いて P を近似する手法を用いる. また, EnKF とは別の手法として, singular evolutive extended Kalman filter(SEEK filter) が Pham et al. (1998) によって提案されている. EnKF, SEEK filter の両手法は, 大気力学系では誤差共分散 P は通常縮退しており, 実質的な自由度は小さい (Dee 1995; Fukumori and Malanotte-Rizzoli 1995; Cane et al. 1996) という性質を利用する. このことは P の固有値分解

$$P = SDS^T \quad (\text{B.3.1})$$

を行うと固有値の多くがゼロに十分近く, 有効な固有値の数はモデル変数の次元よりもずっと小さいことを表す. このとき D は固有値を対角成分に持つ $[m \times m]$ の対角行列で, S は $[N \times m]$ 行列で, 各列が各固有値に対応する固有ベクトルである. EnKF では, この事実を利用し, 数少ないアンサンブルメンバーで P を表現することを考える. 一方で, SEEK フィルタでは式 (??) の S や D を用いて P を表現することを考えている. SEEK フィルタの導出・アルゴリズムについては三好 (2008) にまとめられている. 以下では EnKF の導出・アルゴリズムについてまとめる. m メンバーから成るアンサンブルを

$$X^{(k)}: k = 1 \sim m \quad (\text{B.3.2})$$

と表し, そのアンサンブル平均を $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X^{(k)}$ と表す. よって, アンサンブル平均からのずれ $\delta X^{(k)}$ は

$$\delta X^{(k)} = X^{(k)} - \bar{X} \quad (\text{B.3.3})$$

と表すことができる. このとき行列 E を

$$E = [\delta X^{(1)} | \cdots | \delta X^{(m)}] = \begin{pmatrix} \delta X_1^{(1)} & \cdots & \delta X_1^{(m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta X_N^{(1)} & \cdots & \delta X_N^{(m)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.4})$$

と各列がアンサンブル摂動からなる $[N \times m]$ 次元の行列として表現すると, 誤差共分散行列 P は

$$P = \frac{1}{m-1} EE^T \quad (\text{B.3.5})$$

として, アンサンブル摂動をサンプルとした不偏共分散として表現することができる. このとき行列 E は, P が実対称行列であることから実行列の平方根を持つので, P の平方根行列であ

ると言われる．また， $UU^T = I$ を満たす次元 $[m \times m]$ の U について， EU もまた式 (??) を満たすため， E は U だけの自由度を持ち一意には決まらない．EnKF では，KF における行列の誤差共分散 $P[N \times N]$ の代わりにアンサンブル摂動 $E[N \times m]$ を代替することで問題 1 を解決する．このときアンサンブル摂動 E はアンサンブル平均からのずれなので， m メンバーの E から求められる P のランクは $m - 1$ である．

以下，EnKF の導出を行う．

まず，KF における表 1 の第 (1) 式は，EnKF においては， m メンバーのアンサンブル予報

$$X_n^{f(k)} = MX_{n-1}^{a(k)}, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{B.3.6})$$

とそのアンサンブル平均

$$\bar{X}^f = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X^{f(k)} \quad (\text{B.3.7})$$

に置き換わる．

次に KF における表 1 の第 (2) 式をアンサンブル摂動 E を用いて表す．第 (2) 式において， Q を無視し， P_n^a を E_n^a で表すと，

$$P_n^f = MP_{n-1}^a M^T \quad (\text{B.3.8})$$

$$= \frac{1}{m-1} ME_{n-1}^a (E_{n-1}^a)^T M^T \quad (\text{B.3.9})$$

$$= \frac{1}{m-1} ME_{n-1}^a (ME_{n-1}^a)^T \quad (\text{B.3.10})$$

と変形できる．また P_n^f を E_n^f で表すと，

$$P_n^f = \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T \quad (\text{B.3.11})$$

となるので，式 (??)，式 (??) から

$$E_n^f = ME_{n-1}^a \quad (\text{B.3.12})$$

であることがわかる．式 (??) の右辺に式 (??) を代入して変形すると，

$$\begin{aligned} ME_{n-1}^a &= [M\delta X_{n-1}^{a(1)} | \dots | M\delta X_{n-1}^{a(m)}] \\ &\approx [M(\bar{X}_{n-1}^a + \delta X_{n-1}^{a(1)}) - M\bar{X}_{n-1}^a | \dots | M(\bar{X}_{n-1}^a + \delta X_{n-1}^{a(m)}) - M\bar{X}_{n-1}^a] \\ &\approx [M(X_{n-1}^{a(1)}) - \bar{X}_n^f | \dots | M(X_{n-1}^{a(m)}) - \bar{X}_n^f] \\ &= [X^{f(1)} - \bar{X}_n^f | \dots | X_{n-1}^{f(m)} - \bar{X}_n^f] \end{aligned} \quad (\text{B.3.13})$$

と表される．この近似式 (??) を用いることによって，非線形モデルをそのまま扱うことができる．このとき EKF の場合と同様，誤差共分散の過小評価を防ぐため，膨張係数 α を用いて E_n^f を

$$E_n^f = (1 + \alpha) E_n^f \quad (\text{B.3.14})$$

と膨張させる必要がある．これは，予報誤差共分散 P_n^f を $(1+\alpha)^2$ 倍に大きくしたことに等しい．EnKFにおける誤差共分散の過小評価は，モデルの不完全性に伴うモデル誤差や，限られた少ないアンサンブルメンバーで誤差共分散を表現することに伴うサンプリングエラー（標本誤差）による共分散の見積りの誤差など，理論における仮定が満たされない部分に起因すると考えられている（三好 2006）．

次に KF における表 1 の第 (3) 式は，EnKF では式 (??) の P_n^f に式 (??) を代入することで以下のように変形される．

$$\begin{aligned}
K_n &= P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1} \\
&= \frac{1}{m-1} E_n^f (H_n E_n^f)^T \left[\frac{1}{m-1} H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + R_n \right]^{-1} \\
&= E_n^f (H_n E_n^f)^T [H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + (m-1)R_n]^{-1} \tag{B.3.15} \\
&= E_n^f [I + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} [I + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f] \\
&\quad (H_n E_n^f)^T [H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + (m-1)R_n]^{-1} \\
&= E_n^f [I + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} \\
&\quad [(H_n E_n^f)^T + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T] [H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + (m-1)R_n]^{-1} \\
&= E_n^f [I + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} \\
&\quad (H_n E_n^f)^T [I + \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T] [H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + (m-1)R_n]^{-1} \\
&= E_n^f [I + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} \\
&\quad (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} [m-1R_n + H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T] [H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + (m-1)R_n]^{-1} \\
&= E_n^f [I + (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T \frac{1}{m-1} R_n^{-1} \\
&= E_n^f [(m-1)I + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} \tag{B.3.16}
\end{aligned}$$

この変形によって重み K の計算において， $[N \times N]$ 行列 P を直接メモリ上に持つ必要はなく，代わりに $[N \times m]$ 行列 E^f と $[p \times m]$ 行列 HE^f をメモリ上に持てば良くなる． $m < p$ であるとき，式 (??) ではなく，式 (??) を使うことで， $[p \times p]$ の逆行列の計算が， $[m \times m]$ の逆行列の計算となる．ただし，このとき異なる観測は互いに独立で相関はないと仮定しており， R は対角行列で， R^{-1} の計算が自明であることを考慮している． R^{-1} の計算が自明でなければ，式 (??) は式 (??) の計算を簡略化したことにはならない．

またこのとき， HE^f の計算は H が非線形の場合 (H_{non}) でも

$$\begin{aligned}
HE^f &= [H\delta X^{f(1)} | \dots | H\delta X^{f(m)}] \\
&\approx [H_{non}(\bar{X}^f + \delta X^{f(1)}) - H_{non}\bar{X}^f | \dots | H_{non}(\bar{X}^f + \delta X^{f(m)}) - H_{non}\bar{X}^f] \\
&\approx [H_{non}(X^{f(1)}) - H_{non}\bar{X}^f | \dots | H_{non}(X^{f(m)}) - H_{non}\bar{X}^f]
\end{aligned}$$

とそのまま H_{non} を扱って近似できる。

次に第 (5) 式を E を用いて表すことを考える。EnKF において第 (5) 式は、アンサンブル予報するための解析アンサンブル摂動 E^a を生成する過程を意味し、この解析アンサンブル摂動を作り出す過程はアンサンブルアップデートと呼ばれている。このアンサンブルアップデートの手法には大きく統計的手法の摂動観測法 (Perturbed Observation method: 以下, PO 法) と決定論的手法の平方根フィルタ (Square Root Filter: 以下, SRF) の 2 通りの手法が知られている。

B.3.1 摂動観測法 (PO 法)

PO 法は Evenson(1994), Burger et al(1998), Houtekamer and Mitchell(1998;2001) など EnKF の初期の研究で用いられている手法である, Burger et al(1998) によって, EnKF で観測に摂動を与えることの理論的正当性が提示され, 観測に摂動を与えなければ, 解析誤差は常に過小評価されることになり, フィルターの発散につながることを示された。PO 法を用いた EnKF はカナダ気象局でアンサンブル予報システムとして採用され現業運用されている。(三好, 2009)

PO 法では次のように各アンサンブルメンバーで独立したデータ同化サイクルを適応する。

$$x_n^{a(k)} = x_n^{f(k)} + K_n(Y_n^o - H_n(x_n^{f(k)})), \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{B.3.17})$$

このとき, $x^{a(k)} = \bar{X}^a + \delta x^{a(k)}$, $x^{a(f)} = \bar{X}^f + \delta x^{a(f)}$ より

$$\bar{X}_n^a + \delta x_n^{a(k)} = \bar{X}_n^f + \delta x_n^{f(k)} + K_n(Y_n^o - H_n(\bar{X}_n^f + \delta x_n^{f(k)})) \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{B.3.18})$$

アンサンブル平均についても式 ?? 同様,

$$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + K_n(Y_n^o - H_n\bar{X}_n^f) \quad (\text{B.3.19})$$

が成り立つので, 式 (??) より解析アンサンブル摂動は,

$$\delta x_n^{a(k)} = \delta x_n^{f(k)} - K_n H_n \delta x_n^{f(k)}, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{B.3.20})$$

によって得られる。式 (??) を行列で表すと,

$$E_n^a = (I - K_n H_n) E_n^f \quad (\text{B.3.21})$$

よって式 (??) より, 解析誤差共分散 P^a は

$$\begin{aligned} P_n^a &= \frac{1}{m-1} E_n^a (E_n^a)^T \\ &= \frac{1}{m-1} (I - K_n H_n) E_n^f (E_n^f)^T (I - K_n H_n)^T \\ &= (I - K_n H_n) P_n^f (I - K_n H_n)^T \end{aligned} \quad (\text{B.3.22})$$

と表現することができる。しかし, 式 (??) と KF の第 (5) 式とを比較すると一致しておらず, 式 (??) と見比べると観測誤差に起因する右辺第二項の $K_n R K_n^T$ が足りないことがわかる。そこで,

式(??)が式(??)と一致するよう、式(??)において、観測値 Y_n^o に $\langle \delta Y_n^o (\delta Y_n^o)^T \rangle = R$ を満たすようなランダム摂動 δY_n^o を与える。

$$x_n^{a(k)} = x_n^{f(k)} + K_n(Y_n^o + \delta Y_n^o - H_n(x_n^{f(k)})), \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{B.3.23})$$

式(??)を用いると、式(??)において右辺に $KRKT^T$ の項が現れ、式(??)と一致することがわかる。つまり、PO法では解析誤差が観測誤差の影響を反映するように、観測に摂動を与え、観測データをアンサンブル化する必要がある。しかし、PO法は誤差共分散を少ないアンサンブルメンバーで表すことによるサンプリングエラーに加え、観測に摂動を与えることによるサンプリングエラーがデータ同化に加算されるため、次節で述べる観測に摂動を与えないSRFに比べて劣ることが Whitaler and Hamill(2002) によって言及されており、現在の研究では、次節で述べる観測に摂動を与えないSRFを用いた手法が主なものとなっている。しかし、一方で Lawson and Hansen(2004) では、統計論的手法の方であるPO法の方が非線形の誤差成長するレジームにより持ちこたえることができるという主張もある。この研究では次節で述べる平方根フィルタを用いる。

以下PO法を用いたEnKFについて、表??にはKFと対比して、PO法を用いたEnKFの5つの基本式を、図??にはPO法を用いたEnKFのアルゴリズムをまとめた。このとき表??の式(3)における $L(r)$ は局所化関数であり、アンサンブルメンバー不足によるサンプリングエラーを取り除くために用いられる。詳しくは付録B.4を参照。

	EnKF(PO法)	KF
(1)	$X_n^{f(k)} = M X_{n-1}^{a(k)}, k=1, \dots, m$ [N] [N]	$X_n^f = M(X_{n-1}^a)$ [N] [N]
(2)	$E_n^f = [X_n^{f(1)} - \bar{X}_n^f \dots X_n^{f(m)} - \bar{X}_n^f]$ [N×m] $E_n^f = (1+\alpha)E_n^f$	$P_n^f = M P_{n-1}^a M^T + Q$ [N×N] [N×N] [N×N]
(3)	$K_n = E_n^f [(m-1)I + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T R_n^{-1}$ [N×p] [N×m] [m×m] [m×p] [p×p] [p×m] [m×p] [p×p] $K_n = S(r) \times K_n$	$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}$ [N×p] [N×N] [N×p] [p×N] [N×N] [N×p] [p×p]
(4)	$X_n^{a(k)} = X_n^{f(k)} + K_n (Y_n^o + \delta Y_n^o - H_n X_n^{f(k)})$	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p] [p×N] [N]
(5)		$P_n^a = [I - K_n H_n] P_n^f$ [N×N] [N×N] [N×p] [p×N] [N×N]

表 B.3: EnKF(PO法)の5つの基本式, N はモデルの次元, p は観測の次元, m はアンサンブルメンバー数を表す.

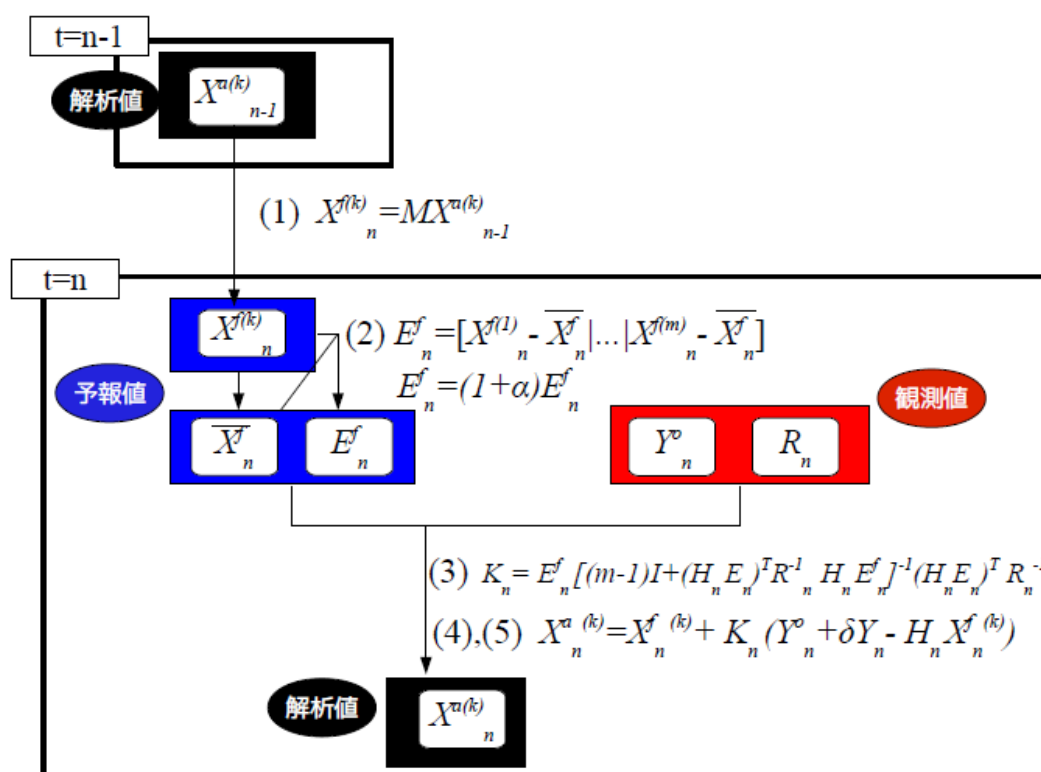


図 B.3: EnKF(PO法)のアルゴリズム

B.3.2 平方根フィルタ (SRF)

SRF は直接式 (??)(表??の第 5 式) を解く手法で，解析アンサンブル摂動を予報アンサンブル摂動の線形結合として， $[N \times m]$ の行列 T を用いて

$$E_n^a = E_n^f T_n \quad (\text{B.3.24})$$

または $[N \times N]$ の行列 T' を用いて

$$E_n^a = T_n' E_n^f \quad (\text{B.3.25})$$

と表す．例えば式 (??) でアンサンブルアップデートを与えると，これが式 (??) を満たすには，式 (??) を式 (??) に代入して，

$$E_n^f T_n (E_n^f T_n)^T = (I - K_n H_n) E_n^f (E_n^f)^T \quad (\text{B.3.26})$$

が満たされる必要がある．これを T について解くと，アンサンブルアップデートを与える公式が与えられる．このとき式 (??) において， T の選び方は一意でない．なぜなら，

$$P_n^a = \frac{1}{m-1} E_n^a (E_n^a)^T \quad (\text{B.3.27})$$

に式 (??) を代入すると

$$P_n^a = \frac{1}{m-1} E_n^f T_n (T_n)^T (E_n^f)^T \quad (\text{B.3.28})$$

と表せられるが，このとき $[N \times m]$ の行列 B_n が $B_n (B_n)^T = I$ を満たすならば， $T_n B_n$ もまた式 (??) を満たすため， T_n には $B_n B_n^T = I$ を満たす B_n だけの自由度があるからである．よって T の解き方によって様々な解法が存在する．SRF を用いた EnKF として，Anderson(2001) によるアンサンブル調節カルマンフィルタ (Ensemble Adjustment Kalman Filter : EAKF)，Bishop et al.(2001) によるアンサンブル変換カルマンフィルタ (Ensemble Transform Kalman Filter : ETKF)，Whitaker and Hamill(2002) による逐次アンサンブル平方根フィルタ (Serial Ensemble Square Root Filter : Serial EnSRF)，Ott et al.(2002 ; 2004) による局所アンサンブルカルマンフィルタ (Local Ensemble Kalman Filter : LEKF)，Hunt et al.(2007) による局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (Local Ensemble Transform Kalman Filter : LETKF) などの手法が考案されている．ETKF，EAKF，Serial EnSRF では観測の同化を逐次的に扱うが，LEKF，LETKF では観測の同化を同時に扱うという特徴がある．Serial SRF，ETKF，LETK，LETKF については B . 5，B . 6，B . 7，B . 8 節でそれぞれ簡単に解説する．以下 SRF を用いた EnKF について，表 ?? に KF と対比して，SRF を用いた EnKF の 5 つの基本式をまとめた．このとき表 ?? の式 (3) における $L(r)$ は局所化関数であり，アンサンブルメンバー不足によるサンプリングエラーを取り除くために用いられる．詳しくは次の付録 B . 4 を参照．

	EnKF(SRF)	KF
(1)	$X_n^{(k)} = M X_{n-1}^{(k)}, k=1, \dots, m$ [N] [N]	$X_n^a = M(X_{n-1}^a)$ [N] [N]
(2)	$E_n^f = [X_n^{(1)} - \bar{X}_n^f \dots X_n^{(m)} - \bar{X}_n^f]$ [N×m] $E_n^f = (1+\alpha)E_n^f$	$P_n^f = M P_{n-1}^a M^T + Q$ [N×N] [N×N] [N×N]
(3)	$K_n = E_n^f [(m-1)I + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T R_n^{-1}$ [N×p] [N×m] [m×m] [m×p] [p×p] [p×m] [m×p] [p×p] $K_n = S(r) \times K_n$	$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}$ [N×p] [N×N] [N×p] [p×N] [N×N] [N×p] [p×p]
(4)	$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + K_n (Y_n^o - H_n \bar{X}_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×N] [N]	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×N] [N]
(5)	$E_n^a = T E_n^f$, あるいは $E_n^a = E_n^f T$ [N×m] [N×N] [N×m] [N×m] [N×m] [m×m]	$P_n^a = [I - K_n H_n] P_n^f$ [N×N] [N×N] [N×p] [p×N] [N×N]

表 B.4: EnKF(SRF) の 5 つの基本式, N はモデルの次元, p は観測の次元, m はアンサンブルメンバー数を表す.

B.4 局所化

局所化は数少ないアンサンブルメンバーで EnKF を安定に動かすために欠かせない実装技術である。局所化とは、遠く離れた地点ほど小さくなるような重み関数を誤差共分散にかけることで、強制的に遠く離れた地点の誤差共分散を小さくすることを指す。その目的は、アンサンブルメンバーの不足によるサンプリングエラー（標本誤差）を除去することである。

誤差相関は一般的にモデル格子点間の距離が離れるほど小さくなる。一方でサンプリングエラーは、サンプル数にのみよって決まるため、どの距離でも同様であると考えられる。そのため、限られたアンサンブルメンバーで誤差相関を見積りる際に生じるサンプリングエラーのインパクトは、遠くの地点ほどインパクトが大きくなり、相関がないと思われるような遠く離れた地点であっても大きく誤差相関を見積もってしまう。その結果、EnKF が安定に動かなくなる原因となってしまうため上記で述べたような局所化が必要となる。この局所化は水平方向のみならず、鉛直方向にも同様に行う。

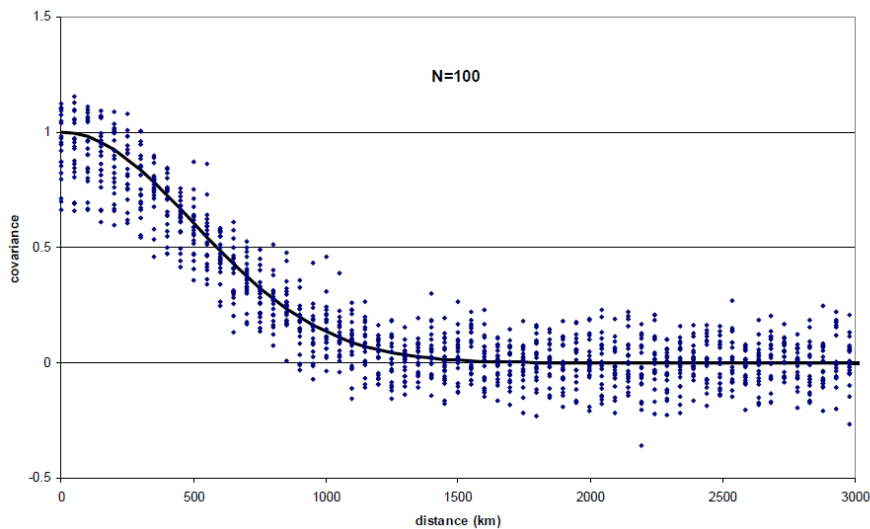
局所化の関数はどのような関数でもよいが、EnKF では次のようなガウス分布関数とよく似ているが、ある距離以上では完全にゼロになる 5 次関数 (Gaspari and Cohn 1999; Hamill et al. 2001) を用いることが多い (三好 2006)。

$$L(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}r^5 + \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{8}r^3 - \frac{5}{3}r^2 & (r \leq 1) \\ \frac{1}{12}r^5 - \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{8}r^3 + \frac{5}{3}r^2 - 5r + 4 - \frac{2}{3}r^{-1} & (1 < r \leq 2) \\ 0 & (2 < r) \end{cases} \quad (\text{B.4.1})$$

このとき

$$r = \frac{a}{\sqrt{10/3}\tilde{\sigma}} \quad (\text{B.4.2})$$

であり, a は中心からの距離を表す. 例えば格子点 j と格子点 $j+1$ との距離は $a=1$ で表される. $\tilde{\sigma}$ は分布の標準偏差に相当するものを表し, Schur length scale と呼ばれ, $\tilde{\sigma}$ が小さいほど離れた地点での相関が小さいと仮定することに相当する. このときあるベクトル X の各要素について, ある局所化の中心 x_i から r の距離にあるベクトルの各要素に局所化の関数 $L(r)$ をかけたものを $S(x_i) \circ X$ と書く. この記号 \circ で表した局所化の操作を Schur product と呼ぶ. 図 ?? が局所化の効果を表した模式図 (Lorenz(2003) から抜粋) で, ガウス関数を用いた局所化によりサンプリングエラーが除かれる様子を示されている. 図 ?? の下図から遠く離れた点で, サンプリングエラーが除去されていることがわかる.



次節で述べる Serial EnSRF のような逐次的に観測値をデータ同化する場合には, 予報誤差共分散 P^f の局所化は局所化関数 $L(r)$ を用いて, 重み K を求める KF の第 (3) 式と EnKF(SRF) の第 (3) 式から

$$K_n = (S \circ P_n^f) H_n^T (H_n (S \circ P_n^f) H_n^T + R_n)^{-1} \quad (\text{B.4.3})$$

$$\approx S \circ (P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}) \quad (\text{B.4.4})$$

$$\approx S \circ (E_n^f (H_n E_n^f)^T [H_n E_n^f (H_n E_n^f)^T + R_n]^{-1}) \quad (\text{B.4.5})$$

とベクトル K に観測点を中心とした Schur product を行うことと, 予報誤差共分散行列 P^f の局所化と同等に表すことができる. このとき式 (??) から式 (??) への変形は, 観測空間の次元が 1 で, $HP^f H^T$ はスカラーであることから, 観測点がモデル格子点上にある場合 $HP^f H^T = H(S \circ P^f) H^T$, 観測点がモデル格子点上にない場合 $HP^f H^T \approx H(S \circ P^f) H^T$ であることを考慮している.

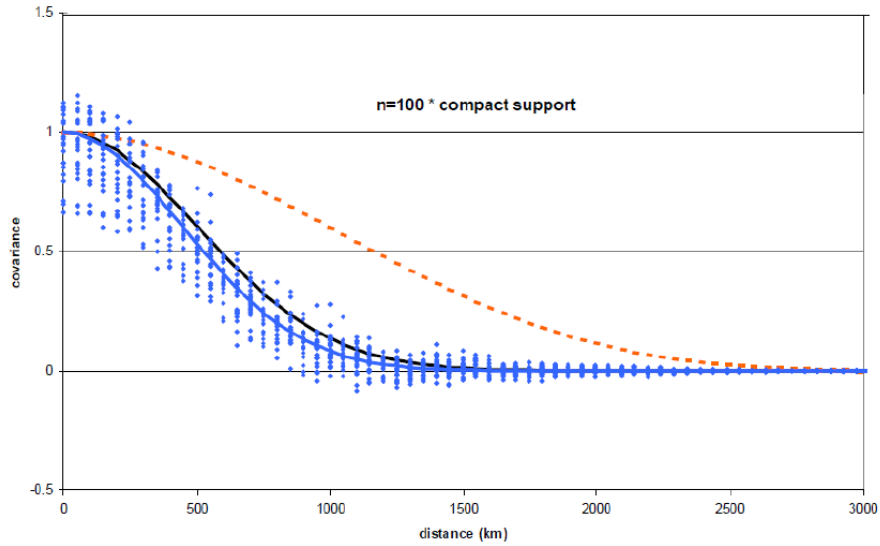


図 B.4: ガウス関数を用いた局所化の効果を示す模式図．上図は，局所化前の状態で，黒線は真の誤差共分散，100 メンバーの各サンプル値を群青点で示す．下図は，ガウス関数を用いて局所化した後の状態で，黒線は真の誤差共分散，橙の点線は局所化関数，青点は上図の群青点の各アンサンブルメンバーを局所化した後のサンプル値，青線はそのサンプル値の誤差共分散を表す，

B.5 逐次アンサンブル平方根フィルタ (Serial EnSRF)

Serial EnSRF について結果のみを簡潔にまとめる．導出など詳しくは Whitaker and Hamill(2002) を参照．Serial EnSRF では

$$E_n^a = (I - W_n H_n) E_n^f \quad (\text{B.5.1})$$

という形のアンサンブルアップデートを仮定する．

これが式(??)を満たすには

$$\begin{aligned} P_n^a &= E_n^a (E_n^a)^T \\ &= [I - W_n H_n] E_n^f (E_n^f)^T [I - W_n H_n]^T \\ &= [I - W_n H_n] P_n^f [I - W_n H_n]^T \end{aligned}$$

より

$$[I - W_n H_n] P_n^f [I - W_n H_n]^T = (I - K_n H_n) P_n^f \quad (\text{B.5.2})$$

である必要がある (Whitaker and Hamill, 2002 の式 (9) を参照)．Andrew(1986) によると，その解は

$$W_n = P_n^f H_n^T [(H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-\frac{1}{2}}]^T [(H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{\frac{1}{2}} + R^{-\frac{1}{2}}]^{-1} \quad (\text{B.5.3})$$

である (Whitaker and Hamill 2002 の式 (10) を参照)．Serial EnSRF では観測がそれぞれ独立であると仮定し，観測を逐次的に取り扱う．すると，観測空間の次元は 1 となり， H, K は N 次

元ベクトル R , HP^fH^T はスカラーとなる。この過程のもと、式(??)は単純化され、 $W_n = aK_n$ という形をとる、このとき a は

$$a = \left(1 + \sqrt{\frac{R_n}{H_n P_n^f H_n^T + R_n}} \right)^{-1} \quad (\text{B.5.4})$$

逐次的に観測を行う Serial EnSRF では、1つの観測を同化して求めた解析値 X_n^a を次の観測を同化する際の第一推定値 $X_n^f (= X_n^a)$ として、同時刻の多数の観測を1つずつ逐次的に扱って計算する。そのため、Serial EnSRF は並列計算ができず、大多数の観測をデータ同化するシステムにおいては計算効率が悪いと見做され、現業化には向いていない。

以上 Serial EnSRF について、表 ?? には EnKF(SRF) の基本式と対比して、Serial EnSRF の5つの基本式を、図 ?? には Serial EnSRF のアルゴリズムをまとめた。

	Serial EnSRF	EnKF(SRF)
(1)	$X_n^{(k)} = MX_{n-1}^{(k)}, k=1, \dots, m$ [N] [N]	$X_n^{(k)} = MX_{n-1}^{(k)}, k=1, \dots, m$ [N] [N]
(2)	$E_n^f = [X_n^{(1)} - \bar{X}_n^f \dots X_n^{(m)} - \bar{X}_n^f]$ [N×m] $E_n^f = (1+\alpha)E_n^f$	$E_n^f = [X_n^{(1)} - \bar{X}_n^f \dots X_n^{(m)} - \bar{X}_n^f]$ [N×m] $E_n^f = (1+\alpha)E_n^f$
(3)	$K_n = E_n^f [(m-1)I + (H_{n,j} E_n^f)^T R_{n,j}^{-1} H_{n,j} E_n^f]^{-1} (H_{n,j} E_n^f)^T R_{n,j}^{-1}$ [N×N] [N×m] [m×m] [1×N][N×m] [1] [1×N][N×m] [1×N][N×m] [1] $K_n = S(r) \times K_n$	$K_n = E_n^f [(m-1)I + (H_n E_n^f)^T R^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T R^{-1}$ [N×p] [N×m] [m×m] [p×N][N×m] [p×p] [p×N][N×m] [p×N][N×m] [p×p] $K_n = S(r) \times K_n$
(4)	$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + K_n (Y_{n,j}^o - H_n \bar{X}_n^f)$ [N] [N] [N×1] [1] [1×N][N]	$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + K_n (Y_{n,j}^o - H_n \bar{X}_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×N][N]
(5)	$E_n^a = [I - W_n H_n] E_n^f$ [N×m] [N×N] [N×1] [1×N] [N×m] このとき $W_n = a K_n, a = \left(1 + \frac{R_{n,j}}{H_n P^f H_n + R_{n,j}} \right)$ [N×1] [N×1] [1×N][N×N][N×1][1]	$E_n^a = T E_n^f$ [N×m] [N×N] [N×m]

表 B.5: SerialEnSRF の 5 つの基本式

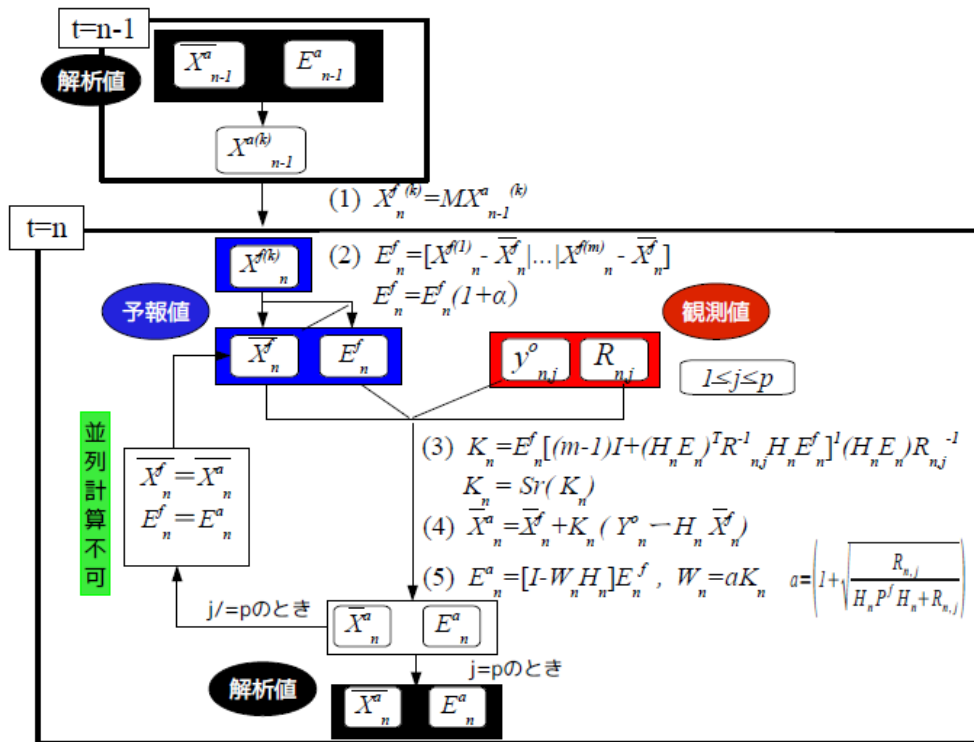


図 B.5: SerialEnSRF のアルゴリズム

B.6 アンサンブル変換カルマンフィルタ (ETKF)

詳しい導出などは，Bishop et al.(2001) を参照．ETKFにおけるアンサンブルアップデートは， $[m \times m]$ 次元の変換行列 T を用いて

$$E_n^a = E_n^f T_n \quad (\text{B.6.1})$$

と表される．Bishop et al.(2001) によると，

$$T_n = C_n(\Gamma_n + I_m)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.6.2})$$

で与えられる．このとき I_m は $[m \times m]$ の単位行列で $[m \times m]$ 行列の Γ と C はそれぞれ

$$\frac{1}{m-1} (E_n^f)^T H_n^T R_n^{-1} H_n E_n^f = C_n \Gamma_n C_n^T \quad (\text{B.6.3})$$

で与えられる固有ベクトルを対角成分にもつ対角行列と，各固有値に対応する固有ベクトルをもつ直交行列である．

ETKFのアンサンブルアップデートで得られた摂動は規格化された観測空間内で直行するという特徴を持つ．これを確かめるため，式(??)に左から T^T ，右から T をかけると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{m-1} T_n^T (E_n^f)^T H_n^T R_n^{-1} H_n E_n^f T_n &= \frac{1}{m-1} E_n^a H_n^T R_n^{-1} H_n E_n^a & (\text{B.6.4}) \\ &= T_n^T C_n \Gamma_n C_n^T T_n \\ &= (\Gamma_n + I_m)^{-\frac{1}{2}T} C_n^T C_n \Gamma_n C_n^T C_n (\Gamma_n + I_m)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\Gamma_n + I_m)^{-\frac{1}{2}T} \Gamma_n (\Gamma_n + I_m)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Gamma_n (\Gamma_n + I_m)^{-1} & (\text{B.6.5}) \end{aligned}$$

と求めることができる．式(??)の右辺は対角行列であるので，内積の関係と式(??)からETKFで得られた摂動は観測空間内で $R^{-\frac{1}{2}}$ で規格化することで直行することがわかる．ETKFはこの特徴から，データ同化の手法というよりもアンサンブル摂動生成手法の1つとして注目されており，ETKFをアンサンブル摂動生成手法として用いる研究がなされている(例えば，Wang et al. 2004 ; Wei et al. 2006 ; Wei et al. 2008)

B.7 局所アンサンブルカルマンフィルタ (LEKF)

LEKFでは、各グリッド地点を中心とした local patch という呼ばれる小さな領域をとり、local patch 内での誤差相関は 1、Local patch 外での誤差相関は完全に 0 となるような階段関数を局所化関数として想定し、各 local patch をそれぞれ独立に解析を行う。各 local patch 内での解析は完全に独立であるため、並列化が可能である。各 local patch で得られた得られた解析データは最終的に合成され、領域全体 (global) の解析値を得る。local patch には多重に重なりがあるため、この合成方法は一意ではないが、local patch の中心の値だけを使う方法がよくとられる (三好, 2006)。観測値が各 local patch では local patch 内にある観測値のみを同化するため、全球での観測数が p であるなら、local patch 内での観測数 lp は p よりかなり小さくなる。そのため、データ同化する観測数が膨大な場合 Serial EnSRF では、 $[p \times p]$ の観測誤差共分散行列の逆行列計算が必要であり計算資源面で困難さを伴うが、LEKF では $[lp \times lp]$ の観測誤差共分散の逆行列計算ですむため観測数 p が膨大でも対応できる。以下では、1 つの local patch での解析アルゴリズムの結果のみを述べるが、導出など詳しくは Ott et al(2004) を参照。

予報誤差共分散 P^f を固有値分解すると、

$$P^f = G\hat{P}^fG^T \quad (\text{B.7.1})$$

このとき \hat{P}^f はゼロでない r 個の固有値を対角成分に持つ $[r \times r]$ の対角行列で、 G は $[N \times r]$ 行列で、各列が各固有値に対応する固有ベクトルである。任意の状態ベクトル X 、誤差共分散 P は $[N \times r]$ 次元の G^T を用いて次のようにに r 次元空間の hat space に写すことができる。

$$\hat{X} = G^T X \quad (\text{B.7.2})$$

$$\hat{P} = G^T P \quad (\text{B.7.3})$$

LEKF では EnKF の計算すべてをこの低次元空間の hat space で行い、最後に N 次元空間へ戻す変換

$$X = G\hat{X} \quad (\text{B.7.4})$$

によって N 次元空間での結果を得る。LEKF 予報プロセスは EnKF の予報プロセスと同様である。解析プロセスでは、まず $[r \times r]$ の \hat{P}^a が

$$\hat{P}_n^a = [\hat{I} + \hat{H}_n^T R_n^{-1} \hat{H}_n]^{-1} \quad (\text{B.7.5})$$

から求められる。このとき \hat{I} は $[r \times r]$ 次元の単位行列である、次に r 次元 \hat{X}^a は \hat{P}^a を用いて

$$\hat{X}_n^a = \hat{X}_n^f + \hat{P}_n^a \hat{H}_n^T R_n^{-1} (Y_n^o - H_n X_n^f) \quad (\text{B.7.6})$$

から求められる。また LEKF ではアンサンブルアップデートは

$$\hat{E}_n^a = \hat{E}_n^f T_n \quad (\text{B.7.7})$$

の線形変換で表され、このとき $[m \times m]$ の行列 T は

$$T_n = [I_m + (\hat{E}_n^f)^T (\hat{P}_n^f)^{-1} (\hat{P}_n^a - \hat{P}_n^f) (\hat{P}_n^f)^{-1} (\hat{E}_n^f)]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.7.8})$$

から求められる。このとき I_m は $[m \times m]$ の単位行列である。

以上 LEKF について、表 ?? には EnKF(SRF) の基本式と対比して、LEKF の 5 つの基本式を、
図 ?? には LEKF のアルゴリズムをまとめた。

	LEKF	EnKF(SRF)
(1)	$X_n^{f(k)} = M X_{n-1}^{a(k)}, \quad k=1, \dots, m$ [N] [N]	$X_n^{f(k)} = M X_{n-1}^{a(k)}, \quad k=1, \dots, m$ [N] [N]
(2)	$E_n^f = [X_n^{f(1)} - X_n^f \dots X_n^{f(m)} - X_n^f]$ [N×m]	$E_n^f = [X_n^{f(1)} - X_n^f \dots X_n^{f(m)} - X_n^f]$ [N×m] $E_n^f = (I + \alpha) E_n^f$
(3)	$\hat{K}_n^{(local)} = \hat{P}_n^a \hat{H}_n^T R^{-1 (local)}$ [r×p] [r×r] [r×p] [p×p]	$K_n = E_n^f [(m-1)I + (H_n E_n^T)^T R^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^T)^T R^{-1}$ [N×p] [N×m] [m×m] [p×N][N×m][p×p] [p×N][N×m] [p×N][N×m] [p×p] $K_n = S(r) \times K_n$
(4)	$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + \hat{K}_n^{(local)} (Y_n^o - H_n^{(local)} \bar{X}_n^f)$ [l] [r] [r×p] [lp] [lp×lN] [lN]	$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + K_n (Y_n^o - H_n \bar{X}_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×N][N]
(5)	$\hat{E}_n^a = \hat{E}_n^f [I + (\hat{E}_n^f)^T (\hat{P}_n^f)^{-1} (\hat{P}_n^a - \hat{P}_n^f) (\hat{P}_n^f)^{-1} (\hat{E}_n^f)]^{1/2}$ [r×m] [r×m] [m×m] [m×r] [r×r] [r×r] [r×r] [r×r] [r×m] このとき, \hat{P}_n^a は $\hat{P}_n^a = \hat{P}_n^f [I + \hat{H}_n^T (R_n^{(local)})^{-1} \hat{H}_n \hat{P}_n^f]^{-1}$ [r×r] [r×r] [r×r] [lp×lp] [lp×r] [r×r]	$E_n^a = E_n^f T$ [N×m] [N×m] [m×m]

表 B.6: LEKF の 5 つの基本式

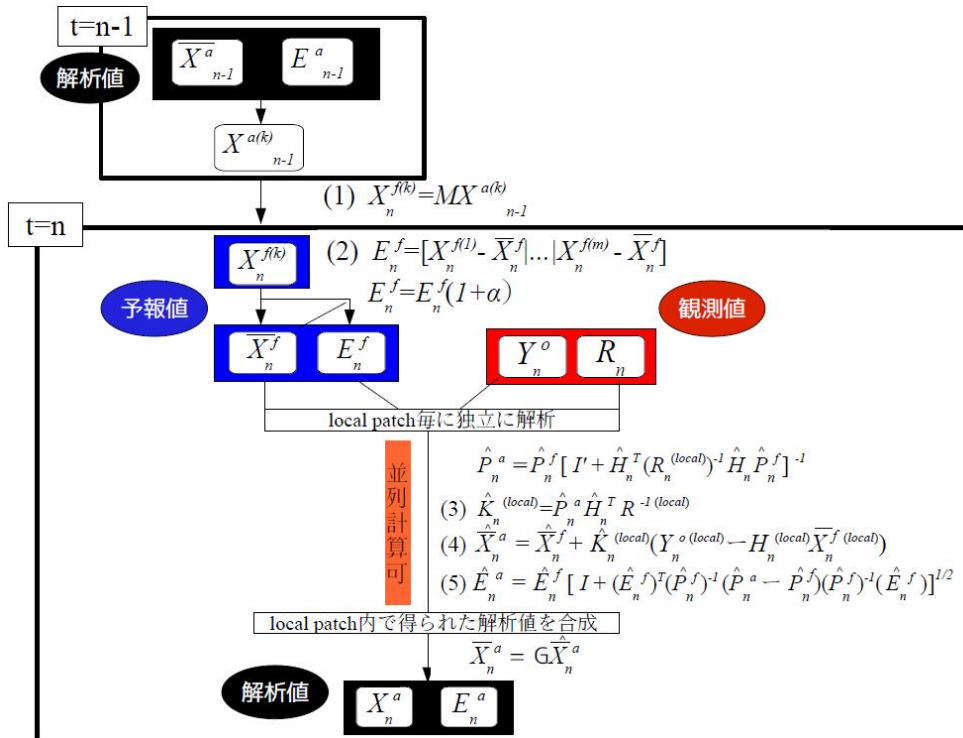


図 B.6: LEKF のアルゴリズム

B.8 局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (LETKF)

Hunt(2005), Hunt et al(2007) は, 前節での LEKF に ETKF のアンサンブルアップデート法を適応し, LEKF よりさらに効率化した LETKF を考案した. LEKF は予報誤差共分散 P^f を固有値分解し, $[r \times N]$ 次元の直行ベクトル G^T を用いて, N 次元空間から r 次元空間へと写像を与え, 各 local patch において r 次元空間で解析を行う手法であった. それに対し, LETKF では計算の効率性を高めるため P^f の固有値分解は行わず, $[N \times m]$ 次元のアンサンブル摂動 E を直行ベクトル G の代わりに用いる. $[N \times m]$ 次元のアンサンブル摂動 E を用いることで, N 次元から m 次元空間への写像を与え, 各 local patch 内で m 個のアンサンブルメンバーが張る m 次元空間で解析を行う. 以下, ある 1 つの local patch 内での LETKF の導出を行う.

m 次元空間内での $[m \times m]$ 次元の予報誤差共分散 \tilde{P}_n^f は $[N \times N]$ 次元の解析誤差共分散 P_n^f を

$$P_n^f = \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T \quad (\text{B.8.1})$$

$$= \frac{1}{m-1} E_n^f I_m (E_n^f)^T \quad (\text{B.8.2})$$

$$= E_n^f \tilde{P}_n^f (E_n^f)^T \quad (\text{B.8.3})$$

と表現することで,

$$\tilde{P}_n^f = \frac{1}{m-1} I_m \quad (\text{B.8.4})$$

と定義できる, このとき I_m は $[m \times m]$ の単位行列である. また, LETKF ではアンサンブルアップデートは

$$E_n^a = E_n^f T_n \quad (\text{B.8.5})$$

の形で定義されるので, N 次元空間内での $[N \times N]$ 次元の解析誤差共分散 P_n^a は

$$\begin{aligned} P_n^a &= \frac{1}{m-1} E_n^a (E_n^a)^T \\ &= \frac{1}{m-1} E_n^f T_n (T_n)^T (E_n^f)^T \end{aligned} \quad (\text{B.8.6})$$

と表現できる. 一方で, m 次元空間内での $[m \times m]$ 次元の解析誤差共分散 \tilde{P}_n^a を

$$\tilde{P}_n^a = \frac{1}{m-1} T_n (T_n)^T \quad (\text{B.8.7})$$

と定義すると, P_n^a は \tilde{P}_n^a を用いて

$$P_n^a = E_n^f \tilde{P}_n^a (E_n^f)^T \quad (\text{B.8.8})$$

と表現される. ここで, \tilde{P}_n^a を求めるため, KF で解析誤差共分散 P^a を求める第(5)式に EnKF(SRF)

で重み K を求める第 (3) 式を代入する .

$$\begin{aligned}
P_n^a &= [I - K_n H_n] \\
&= \left[I - E_n^f [(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n \right] \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T \\
&= \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T - \frac{1}{m-1} E_n^f [(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f (E_n^f)^T \\
&= \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T - \frac{1}{m-1} E_n^f [(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} \\
&\quad \left([(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f] - (m-1)I_m \right) (E_n^f)^T
\end{aligned}$$

ここで , 表記を簡易化するため , $(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f = A_n$ とおくと ,

$$\begin{aligned}
P_n^a &= \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T - \frac{1}{m-1} E_n^f A_n^{-1} [A_n - (m-1)A_n^{-1}] (E_n^f)^T \\
&= \frac{1}{m-1} E_n^f (E_n^f)^T - \frac{1}{m-1} E_n^f [I_m - (m-1)A_n^{-1}] (E_n^f)^T \\
&= E_n^f A_n^{-1} (E_n^f)^T \\
&= E_n^f [(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} (E_n^f)^T \tag{B.8.9}
\end{aligned}$$

したがって , 式 (??) と式 (??) を見比べると

$$\tilde{P}_n^a = [(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} \tag{B.8.10}$$

であることがわかる . したがって , 表 ?? の第 (3) 式 , 第 (4) 式 , 式 (??) から , 重み K は

$$K_n = E_n^f \tilde{P}_n^a (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} \tag{B.8.11}$$

解析アンサンブル平均は

$$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + E_n^f \tilde{P}_n^a (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} (Y_n^o - H_n \bar{X}_n^f) \tag{B.8.12}$$

と表現できる .

アンサンブルアップデートの線形変換行列 T は式 (??) から

$$T_n = \sqrt{m-1} (\tilde{P}_n^a)^{\frac{1}{2}} \tag{B.8.13}$$

で与えられることがわかる . このとき $(\tilde{P}_n^a)^{\frac{1}{2}}$ の計算を簡単化するため , $(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f$ を固有値分解すると ,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n^a &= [(m-1)I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f]^{-1} \\
&= [V \Lambda V^T]^{-1} \\
&= V \Lambda^{-1} V^T \tag{B.8.14}
\end{aligned}$$

このとき V は $[m \times m]$ 次元の固有ベクトルで、 Λ は m 個の固有値を対角成分に持つ行列である。したがって、 $(\tilde{P}^a)^{-\frac{1}{2}}$ は

$$(\tilde{P}^a)^{\frac{1}{2}} = V\Lambda^{-\frac{1}{2}}V^T \quad (\text{B.8.15})$$

より、式(??)、式(??)からアンサンブルアップデートは

$$E_n^a = E_n^f \sqrt{m-1} V\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T \quad (\text{B.8.16})$$

で表わされる。LETKF の計算効率性が良いのは、式(??)の逆行列の計算と、式(??)の行列平方根の計算を1回の固有値分解で式(??)、式(??)の計算において共有しているところにある。また式(??)は式(??)を用いて、

$$K_n = E_n^f V\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} \quad (\text{B.8.17})$$

で求められる。

また、LETKFにおいて膨張係数 α は、式(??)において、次のように導入される。

$$\tilde{P}_n^a = \left[\frac{(m-1)}{\alpha} I_m + (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} H_n E_n^f \right]^{-1} \quad (\text{B.8.18})$$

この膨張係数の導入の仕方は、次のことから理解できる。予報誤差共分散 P^f を $(1+\alpha)$ 倍して大きくすることは、式(??)より \tilde{P}^f を $(1+\alpha)$ 倍することに等しく、さらに \tilde{P}^f を $(1+\alpha)$ 倍することは、式(??)より \tilde{P}^f は $(m-1)I_m$ の逆数であるので、 $(m-1)I_m$ を $1/(1+\alpha)$ 倍することに等しい。そのため膨張係数は式(??)のように導入できる。

以上 LETKF について、表??には EnKF(SRF)の基本式と対比して、LETKFの5つの基本式を、図??には LETKF のアルゴリズムをまとめた。

	LETKF	EnKF(SRF)
(1)	$X_n^{f(k)} = MX_n^{a(k)}$, $k=1, \dots, m$ [N] [N]	$X_n^{f(k)} = MX_n^{a(k)}$, $k=1, \dots, m$ [N] [N]
(2)	$E_n^f = [X_n^{f(1)} - X_n^f \dots X_n^{f(m)} - X_n^f]$ [N×m]	$E_n^f = [X_n^{f(1)} - X_n^f \dots X_n^{f(m)} - X_n^f]$ [N×m] $E_n^f = (I + \alpha) E_n^f$
(3)	$K_n^{(local)} = E_n^{f(local)} V \Gamma^{-1} V^T (H_n^{(local)} E_n^{(local)})^T R^{-1 (local)}$ [lN×lp] [lN×m] [m×m] [lp×lN] [lN×m] [lp×lp]	$K_n = E_n^f [(m-1)I + (H_n E_n)^T R^{-1} H_n E_n]^{-1} (H_n E_n)^T R_n^{-1}$ [N×lp] [N×m] [m×m] [p×N][N×m][p×p] [p×N][N×m] [p×N][N×m] [p×p] $K_n = S(r) \times K_n$
(4)	$X_n^a (local) = X_n^f (local) + K_n^{(local)} (Y_n^o (local) - H_n^{(local)} X_n^f (local))$ [N] [N] [lN×lp] [lp] [lp×lN] [lN]	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [N] [N] [N×p] [p] [p×N][N]
(5)	$E_n^a (local) = E_n^f (local) \sqrt{m-1} V \Gamma^{-\frac{1}{2}} V^T$ [lN×m] [lN×m] [m×m] このとき, Γ, V はそれぞれ以下の行列 $\frac{m-1}{\alpha} I + (H_n^{(local)} E_n^{(local)})^T R^{-1 (local)} H_n^{(local)} E_n^{(local)}$ [m×m] [lp×lN] [lN×m] [m×m] [lp×lN] [lN×m] を固有値分解したときの 固有値を対角成分にもつ[m×m]の対角行列と 各固有値に対応する固有ベクトルから成る[m×m]の直交行列	$E_n^a = T E_n^f$ [N×m] [N×N] [N×m]

表 B.7: LETKF の 5 つの基本式 . lN は local patch 内の次元 , lp は local patch 内の観測の次元を表す .

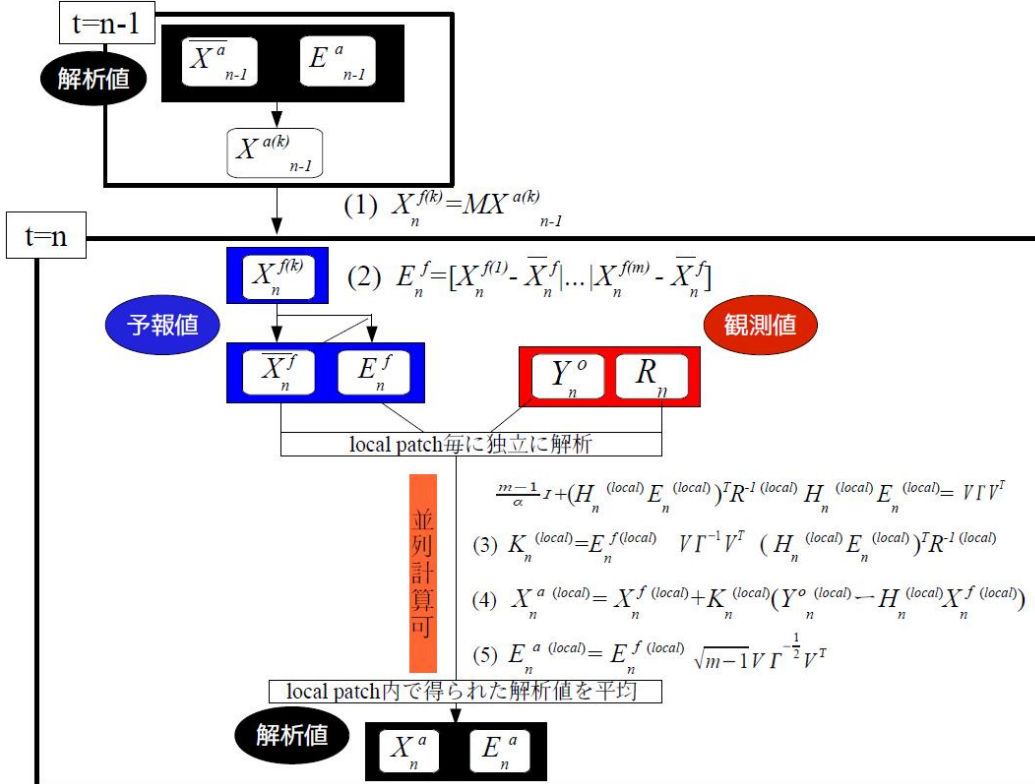


図 B.7: LETKF のアルゴリズム

B.9 観測誤差共分散の局所化

LEKF, LETKFのような観測値を同時にデータ同化する場合には, 離れた点の相関が0であること前提とし, local patch 内にある観測に同じ重みを与えている. しかし, 観測データがまばらなとき, ある local patch 内で local patch の中心から離れた地点に1つだけ観測があるという場合が考えられ, このような観測そのままデータ同化してしまうと, local patch の中心の解析値に大きなサンプリングエラーを導入する可能性があるため, local patch 内での局所化も必要であると考えられる.

そこで, Hunt(2005)は観測誤差局所化 (observation localization) と呼ばれる手法を提案した. LEKF, LETKF の枠組みの中で予報誤差共分散 P^f の局所化を直接行うことは困難なので, P^f の局所化を観測誤差共分散 R の局所化によって近似する.

$$K_n = (S \circ P_n^f) H_n^T (H_n (S \circ P_n^f) H_n^T + R_n)^{-1} \quad (\text{B.9.1})$$

$$\approx P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + S^{-1} \circ R_n)^{-1} \quad (\text{B.9.2})$$

これは, P^f の局所化で観測誤差の影響を小さくする (重みを小さくする) ことは, 観測誤差を大きくすることによっても実現されることから理解できる. 式(??)では逆数の存在が必要なため, 局所化関数には式(??)のようなゼロを取る関数を用いることはできない. Miyoshi et al(2005)では, 観測誤差共分散の局所化を行うための関数として, ガウス関数を用いて, R を

$$R = R \times \exp\left(\frac{d^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B.9.3})$$

と表している. このとき, d は観測点と local patch の中心点の距離, σ は相関距離パラメタを表す. Miyoshi et al(2005)ではLEKFにおいてガウス関数を用いた観測誤差局所化を適応し LETK の性能が向上することを確かめている. また Miyoshi and Yamane(2007)では, LETKF にガウス関数を用いた観測誤差局所化を適応し LETKF が安定に動くことを確かめている.

B.10 誤差共分散膨張

EKF や EnKF をデータ同化手法として使用する場合, 誤差共分散の過小評価によるフィルターの発散を防ぐため, 式(??)や式(??)のように誤差共分散を大きくしてやる必要がある. この誤差共分散膨張の手法には複数の手法が提案されている. 式(??)や式(??)のように1より大きな値を誤差共分散に乗じる手法は multiplicative inflation と呼ばれており, Pham(1998), Anderson and Anderson(1999)によって最も早く用いられた手法である. また他の手法として, additive covariance inflation schemes(Corazza et al.(2002)) や, relaxation-to-prior(Zhang et al.(2004)) の手法もある. これら3つの手法は Whitaker et al.(2007)のNCEPの全球予報システムを用いた実観測のデータ同化実験で相互比較されてており, additive inflation が multiplicative inflation や

relaxation-to-prior よりわずかに良いパフォーマンスとったことが報告されている．この研究では，式(??)のような multiplicative inflation を用いている．

B.10.1 膨張係数の動的推定法

誤差共分散膨張において前節で述べたどの膨張手法を用いようと，どのくらいの大きさの膨張係数を用いれば良いかが問題とある．その答えを知るためには試行錯誤で膨張係数をチューニングする必要があるが，EnKFにおいて最適な膨張係数を人為的にチューニングするには大きな計算コストがかかる．なぜなら，チューニングするためには EnKF の計算サイクルを何サイクルも回す必要性があるからである．特に，膨張係数の値が地域的な要因や物理変数に依存する場合は追加のチューニングが必要となるためさらなる大きな計算コストが生じてしまう．(Li et al.2009). 実際，観測密度の大きな違いによって，北半球と南半球で，対流圏と成層圏で異なる膨張係数が必要であることが知られている (Whitaker et al.(2007)) ．

そこで，Wang and Bishop(2003) では，Dee(1995) の最尤パラメタ推定理論 (maximum likelihood parameter estimation theory) を活用して，観測誤差共分散 R の値が既知であるという前提のもと，イノベーションベクトル $d_f^o = Y^o - H(X^f)$ を用いたイノベーション統計値 (innovation statistics)

$$(d_f^o)^T d_f^o = \text{trace}((1 + \alpha)H_n P_n^f H_n^T + R_n) \quad (\text{B.10.1})$$

から膨張係数 α を内部パラメタとして動的に推定する手法を考案した．式(??)の導出については付録 D を参照．

Miyoshi(2005) では，Wang and Bishop(2003) に習い，EnKF の枠組みの中で膨張係数 α の動的推定を行った．その際，膨張係数の大きな値の変動を防ぐため，スカラー KF に基づく temporal smoothing を用いて膨張係数を動的推定している．以下，Miyoshi(2005) における KF に基づく temporal smoothing を用いた膨張係数の動的推定法をまとめる．

イノベーションベクトル

$$d_f^o = Y_n^o - H_n(X_n^f) \quad (\text{B.10.2})$$

から次の関係式が得られる (付録 D を参照) ．

$$\langle d_f^o (d_f^o)^T \rangle = H_n P_n^f H_n^T + R_n \quad (\text{B.10.3})$$

このとき $\langle \rangle$ は統計的期待値を表す． P^f の膨張方法が膨張係数 α を用いて $P_n^f = P_n^f(1 + \alpha)$ とすると，式(??)は

$$\langle d_f^o (d_f^o)^T \rangle = (1 + \alpha)H_n P_n^f H_n^T + R_n \quad (\text{B.10.4})$$

と変形できる．EnKFにおいて，限られたアンサンブルメンバーで P^f を表現する場合， P^f の非対角成分のサンプリングエラーは大きく見積もられることがわかっている (Houtekamer and

Mitchell, 1998) ので, 式 (??) のトレース和のみとると,

$$\begin{aligned}(d_f^o)^T d_f^o &= (1 + \alpha)\text{trace}(H_n P_n^f H_n^T + R_n) \\ &= (1 + \alpha)\text{trace}(H_n P_n^f H_n^T + R_n) + \text{trace}R_n\end{aligned}$$

よって, 膨張係数 α は

$$\alpha_n = \frac{(d_f^o)^T d_f^o - \text{trace}(R_n)}{\text{trace}(H_n P_n^f H_n^T)} - 1 \quad (\text{B.10.5})$$

からデータ同化時刻毎に見積もることができる.

ここで, 動的に求めたい膨張係数を α_n^a , α_n^a の第一推定値を α_n^f , 式 (??) から見積もられる α を観測値 α^o とし, それぞれの分散を v^a , v^f , v^o とおくと, スカラー-KF に基づく膨張係数の temporal smoothing は以下の表 ?? のように表される. 図 ?? にはそのアルゴリズムをまとめた.

よって, スカラーカルマンフィルタに基づく膨張係数の temporal smoothing では, 新たな膨張係数 Δ' と観測値の分散 v^o を決める必要がある. Miyoshi and Kalnay(2005) では, Lorenz96 モデルを用いて, この2つのパラメタを調べたところ数桁にわたるレンジで, Δ' や v^o の値を変えても結果は変わらないことが報告されている. 本研究では Miyoshi and Kalnay(2005) に従い, $\Delta' = 0.03$, $v^o = 1.0$ と置いた. さらに, Miyoshi(2005) では, 式 (??) の計算の結果において, 観測数(サンプル数)が少ないことから, サンプリングエラーが大きくなり, 式 (??) から推定される膨張係数が非現実的な値をとることがあるため, 膨張係数の大きさに上限値, 下限値を定めている. 推定される膨張係数がこの上限, 下限を越えた場合は上限値, 下限値をとるようにしている. Liu(2009) では, 観測数が多いときには, 膨張係数の上限値, 下限値を決めなくても, 安定して膨張係数の動的推定ができることに言及している.

また式 (??) では式 (??) を用いて導出されたが, 式 (??) ではなく

$$\langle d_f^a (d_f^o)^T \rangle = H P^f H^T \quad (\text{B.10.6})$$

の関係式(付録D参照)を用いて式 (??) の α を表すことも可能で, 式 (??) を用いると

$$\alpha_n = \frac{(d_f^a)^T d_f^o}{\text{trace}(H_n P_n^f H_n^T)} - 1 \quad (\text{B.10.7})$$

と表すことができる. このとき $d_f^a = H(X^a) - H(X^f)$ である.

	スカラー-KFに基づく temporal smoothing	KF
(1)	$\alpha_n^f = \alpha_{n-1}^a$	$X_n^f = M(X_{n-1}^a)$ [M] [M]
(2)	$v_n^f = (I + \Delta') v_{n-1}^a$	$P_n^f = M P_{n-1}^a M^T + Q$ [N×M] [N×N] [N×M]
(3)	$k_n = v_n^f (v_n^f + v_n^o)^{-1}$	$K_n = P_n^f H_n^T (H_n P_n^f H_n^T + R_n)^{-1}$ [N×p] [N×M][N×p] [p×M][N×M][N×p] [p×p]
(4)	$\alpha_n^a = \alpha_n^f + k_n (\alpha_n^o - \alpha_n^f)$	$X_n^a = X_n^f + K_n (Y_n^o - H_n X_n^f)$ [M] [N] [N×p] [p] [p×M][N]
(5)	$v_n^a = [I - k_n] v_n^f$	$P_n^a = [I - K_n H_n] P_n^f$ [N×M] [N×N] [N×p][p×M] [N×M]

表 B.8: スカラー-KF に基づく膨張係数の temporal smoothing の 5 つの基本式

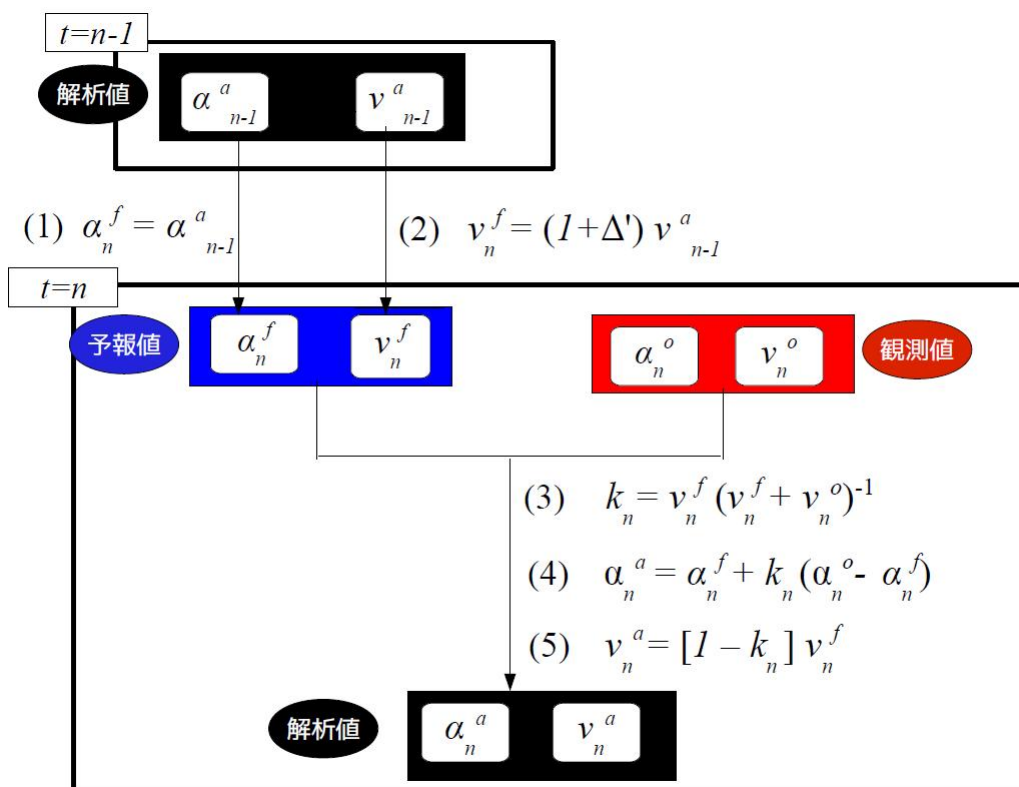


図 B.8: スカラー-KF に基づく膨張係数の temporal smoothing のアルゴリズム

B.10.2 観測誤差共分散の動的推定

観測誤差共分散 R の値が既知であるという前提のもとで、前節での Wang(2003), Miyoshi(2005) による膨張係数の動的推定の結果はそれぞれ満足のいくものであった。しかし、膨張係数の推定は式 (??) からわかるように、観測誤差共分散 R に依存するため (式 (??) では d_a^o が R に依存)、 R の真の値がわからない実観測を取り扱う場合には膨張係数の動的推定がうまくいくとは限らない。実際、Miyoshi and Yamane(2007) では気象庁の実用システムで見積もられている観測誤差の標準偏差を用いて実観測データを同化したとき、膨張係数の動的推定はうまくいかなかったことを報告している。また 40 変数の Lorenz モデルを用いた Liu(2009) での実験から、およそその正確な観測誤差の統計が得られなければ、膨張係数の動的推定はうまくいかないことが証明されている。よって、もし実観測のデータ同化において膨張係数の動的推定法を用いる場合、観測誤差の正確な統計を推定するためのさらなる工夫が必要である。

そこで、Liu(2009) では Desroziers et al(2005) によって導出された観測誤差共分散 R 、誤差共分散 P の統計的關係式を LETKF の枠組みの中で用い、観測が独立で R は対角成分のみであるという仮定のもと、Miyoshi(2005) による膨張係数の動的推定法に加え、観測誤差の分散の動的推定も同時に行っている。Desroziers et al(2005) によって導出された統計的關係式の導出は付録 D を参照。また、Miyoshi et al.(2010) では、Lorenz96 モデルを用いて、Serial EnSRF の枠組みの中で衛星観測のような観測に相関がある場合についても考慮し、Liu et al(2009) と同様の手法で、観測誤差の相関についても膨張係数と同時に動的推定を行い、EnKF が安定的に動くことを確かめている。以下、観測誤差共分散の動的推定法についてまとめる。 d_a^o を

$$d_a^o = Y^o - H(X^a)$$

と定義すると、

$$\langle d_a^o (d_f^o)^T \rangle = R \quad (\text{B.10.8})$$

の關係式が得られる (付録 D を参照)。この式 (??) から、一連の i 個の観測に対する観測誤差の分散 $(\sigma_o^2)_i$ は、

$$(\sigma_o^2)_i = \frac{(d_a^o)^T (d_f^o)_i}{i} \quad (\text{B.10.9})$$

から見積もることができる ..

B.10.3 膨張係数と観測誤差分散の同時の動的推定

Liu(2009) では LETKF の中で

$$\alpha_n = \frac{(d_f^o)^T d_f^o - \text{trace}(R_n)}{\text{trace}(H_n P_n^f H_n^T)} - 1 \quad (\text{B.10.10})$$

$$\alpha_n = \frac{(d_f^a)^T d_f^o}{\text{trace}(H_n P_n^f H_n^T)} - 1 \quad (\text{B.10.11})$$

の膨張係数 α を計算する 2 種類の式を用い、膨張係数の動的推定と観測誤差の分散の動的推定を同時に行っている。誤差共分散の膨張の手法には multiplicative inflation を用いており、全球 (global) に一定な膨張係数を求めている。まず初めに、簡易なモデルの Lorenz(1996) モデルを用い、モデルが完全モデルの場合、ランダム誤差を含む場合 (バイアスなし)、系統的な sin 型のモデルバイアスがある場合に同時の動的推定がうまく機能するかを調べた結果、モデルが完全モデルの場合、ランダム誤差をもつ場合、小さなモデルバイアスがある場合においては、たとえ初期の観測誤差の分散の見積りの精度が悪くても、観測誤差の分散の動的推定によって次第に観測誤差の分散の値は真の値に近づき、さらに動的推定した R を用いた膨張係数の動的推定によって得られた解析値は、最適にチューニングした膨張係数から得られる解析値と同等の精度であることが確かめられている。また式 (??)、式 (??) のどちらを用いたとしても、観測誤差分散をきちんと表現することができれば同等の精度が得られることが確かめられている。大きなモデルバイアスがある場合については、最適にチューニングした膨張係数から得られる解析値と同等の精度の解析値は得られず、最適にチューニングした膨張係数よりも小さい膨張係数が動的推定されることが確かめられている。大きなバイアスがある場合のみこのような結果となるのは、膨張係数の動的推定法はトレース和をとっているため、動的推定される膨張係数はモデル誤差の空間構造を捉えることができず空間平均の観点において最適な膨張係数となっており、大きなモデルバイアスによる誤差を動的推定法では捉えきれないためだと述べられている。よって、Dee and da Silva(1998)、Baek et al(2006)、Danforth et al.(2007)、Li(2007) などのモデルバイアス推定法を用いて、モデルバイアスを取り除く追加の手法が必要であることが提案されている。さらに簡易な物理パラメタリゼーションを用いた大気大循環モデル (AGSM) の SPEEDY(Molteni,2003) を用いて OSSE(Observing System Simulation Experiment) を行い、異なる大きさや単位の誤差を持った数種類の観測をデータ同化している。その結果、どの観測に対してもそれぞれ真の観測誤差分散が推定でき、同時推定法で得られた解析値は R が既知のときの解析値と同等の精度であることが確かめられている。

B.11 アンサンブルカルマンフィルタの 4 次元化

B.11.1 4 次元アンサンブルカルマンフィルタ

時刻 $t = n$ で得られた観測空間における予報値 $H_n X_n^f$ と時刻 $t = s$ ($n \neq s$) で得られた観測値は単純に比較することができないため、このままではデータ同化に用いることができない。そこでデータ同化の時刻以外の非定時観測もデータ同化できるよう時間方向に拡張された EnKF である 4 次元アンサンブルカルマンフィルタ (four dimensional Ensemble Kalman Filter, 以下 4D-EnKF) が Hunt et al.(2004) によって提案された。以下 4D-EnKF についてまとめる。

時刻 $t = n$ での第一推定値 X_n^f を m メンバーの予報アンサンブルの線形結合で

$$X_n^f = \sum_{k=1}^m w_k x_n^{f(k)} \quad (\text{B.11.1})$$

のように表す．このとき w_k は重みを表す．この重み w_k は同じ解析において異なる時刻でも一定とする．時刻 $t = s (n \neq s)$ での第一推定値 $X_s^{f(k)}$ は

$$X_s^f = \sum_{k=1}^m w_k X_s^{f(k)} \quad (\text{B.11.2})$$

とおける．このとき

$$\begin{aligned} A_n^f &= [x_n^{f(1)} | \cdots | x_n^{f(m)}] \\ A_s^f &= [x_s^{f(1)} | \cdots | x_s^{f(m)}] \\ W &= [w_1 | \cdots | w_m]^T \end{aligned} \quad (\text{B.11.3})$$

と表現すると式 (??) , 式 (??) は

$$X_n^f = A_n^f W \quad (\text{B.11.4})$$

$$X_s^f = A_s^f W \quad (\text{B.11.5})$$

とおける．このとき , $A_n^f ((A_n^f)^T A_n^f)^{-1} (A_n^f)^T = I$ より , $(A_n^f)^{-1} = ((A_n^f)^T A_n^f)^{-1} (A_n^f)^T$ と求まるので , 式 (??) において重み W は

$$W = ((A_n^f)^T A_n^f)^{-1} (A_n^f)^T X_n^f \quad (\text{B.11.6})$$

と求まる．よって式 (??) に式 (??) を代入すると

$$X_s^f = A_s^f ((A_n^f)^T A_n^f)^{-1} (A_n^f)^T X_n^f \quad (\text{B.11.7})$$

と X_n^f と X_s^f の関係を求めることができる．よって時刻 $t = s$ における観測空間での第一推定値は , 時刻 $t = s$ での観測演算子 H_s を用いて ,

$$H_s X_s^f = H_s A_s^f ((A_n^f)^T A_n^f)^{-1} (A_n^f)^T X_n^f \quad (\text{B.11.8})$$

と表される．したがって , 4D-EnKF では時刻 $t = n$ におけるデータ同化において , 異なる時刻 $t = s$ の観測を扱う場合 , 観測演算子を

$$H_n = H_s A_s^f ((A_n^f)^T A_n^f)^{-1} (A_n^f)^T \quad (\text{B.11.9})$$

と置き換えて扱えば , 時刻 $t = s$ での観測値 Y_s^o を時刻 $t = n$ でのデータ同化に扱うことができる．したがって , 観測時刻における予報アンサンブル A^f を保存しておけば , いかなる時刻の観測もデータ同化に扱うことができる．

B.11.2 4次元局所アンサンブル変換カルマンフィルタ

4次元局所アンサンブル変換カルマンフィルタ (four dimensional Local Ensemble Transform Kalman Filter , 以下4D-LETKF) は Hunt et al.(2007) によって提案された手法で , Hunt et al.(2004) によって提案された4D-EnKFをLETKFにおいてより単純化したものとなっている．

LETKF のデータ同化の式

$$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + E_n^f \tilde{P}_n^a (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} (Y_n^o - H_n \bar{X}_n^f) \quad (\text{B.11.10})$$

において, $B_n = \tilde{P}_n^a (H_n E_n^f)^T R_n^{-1} (Y_n^o - H_n \bar{X}_n^f)$ とおくと,

$$\bar{X}_n^a = \bar{X}_n^f + E_n^f B_n \quad (\text{B.11.11})$$

4D-EnKF では観測演算子 H_n を置き換えることを考えてきたが, 4D-LETKF では観測演算子 H_n を含んだ B_n を置き換えることを考える.

$H_n E_n^f$ を観測空間における予報アンサンブル摂動の行列 Y_n^f で近似すると,

$$\begin{aligned} Y_n^f &= H_n E_n^f \\ &= [H_n \delta X_n^{f(1)} | \cdots | H_n \delta X_n^{f(m)}] \\ &= [H_n (X_n^{f(1)} - \bar{X}_n^f) | \cdots | H_n (X_n^{f(m)} - \bar{X}_n^f)] \\ &= [H_n X_n^{f(1)} - H_n \bar{X}_n^f | \cdots | H_n X_n^{f(m)} - H_n \bar{X}_n^f] \end{aligned} \quad (\text{B.11.12})$$

また, \tilde{P}_n^a は, Y_n^f を用いると

$$\tilde{P}_n^a = [(k-1)I + (Y_n^f)^T R_n^{-1} Y_n^f]^{-1} \quad (\text{B.11.13})$$

と表される. さらに, 観測空間における予報アンサンブル平均 \bar{Y}_n^f は

$$\bar{Y}_n^f = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m H_n (X_n^{f(k)} - \bar{X}_n^f) \quad (\text{B.11.14})$$

と表現できる. したがって, 式 (??) を式 (??) に代入すると, Y_n^f は

$$Y_n^f = [H_n X_n^{f(1)} - \bar{Y}_n^f | \cdots | H_n X_n^{f(m)} - \bar{Y}_n^f] \quad (\text{B.11.15})$$

と表現できる. よって, 式 (??), 式 (??) から B_n は

$$B_n = [(k-1)I + (Y_n^f)^T R_n^{-1} Y_n^f]^{-1} (Y_n^f)^T R_n^{-1} (Y_n^o - \bar{Y}_n^f) \quad (\text{B.11.16})$$

Y_n^f , \bar{Y}_n^f , Y_n^o , R_n から表現できることがわかる.

4D-LETKF ではデータ同化時刻 $t = n$ に時刻 $t = s (n \neq s)$ の観測 Y_s^o をデータ同化する場合, 式 (??) において B_n は

$$B_n = [(k-1)I + (Y_s^f)^T R_s^{-1} Y_s^f]^{-1} (Y_s^f)^T R_s^{-1} (Y_s^o - \bar{Y}_s^f) \quad (\text{B.11.17})$$

で求められる. よって, 観測時刻 $t = s$ でのアンサンブル予報 X_s^f を常に保存しておけば, 式 (??), (??) から \bar{Y}_s^f , Y_s^f の計算が可能となるので, 時刻 $t = s$ での観測も時刻 $t = n$ でデータ同化可能となる.

実際, 複数の時刻での観測値 Y^o を同化する場合, 各時刻での Y^f , \bar{Y}^f を計算し, 最後にそれらを1つの行列 Y_n^f , \bar{Y}_n^f にまとめ, 式 (??) で B_n を求め, 式 (??) ですべての観測を同時に同化させればよい.

付録C Lorenz96モデルを用いたEnKFの観測システムシミュレーション実験

C.1 実験設定

C.1.1 Lorenz1996モデル

以下はLorenz and Emanuel(1998)を参考に行っている。Lorenzの40変数モデルは以下のようなものである。

$$\frac{dx_j}{dt} = (x_{j+1} - x_{j-2})x_{j-1} - x_j + F \quad (\text{C.1.1})$$

このとき、添字 $j = 1, \dots, N$ は格子点を表す。また右辺第一項は移流項、右辺第二項は散逸項、右辺第三項は強制 (forcing) に相当する。境界条件は周期境界条件 ($X_0 = X_N$) である。時間積分法として4次のルンゲクッタ法を用いた場合、Lorenz1996モデルは時間積分間隔 $\Delta t = 0.05$ で安定することがわかっている。また $\Delta t = 0.2$ が1日に相当することが知られている (Lorenz 1996)。

データ同化サイクル実験は、Lorenz and Emanuel(1998)による観測システムシミュレーション実験 (Observing System Simulation Experiment) に基づき行う。F=8.0とし、平均2.0、標準偏差4.0のガウス分布からランダムに取り出した値を初期値として7500ステップ積分した結果を真の値 $X_{j,n}^t$ とする。このとき j は地点、 n は n 番目の時間ステップを表す。観測値 $Y_{j,n}^o$ は、平均ゼロ、標準偏差 σ のガウス分布からランダム誤差を真の値に加えたものとする。本研究では $\sigma = 1.0$ 。観測は各時間ステップで全地点得られるものとし、全観測地点を同化する。

C.1.2 評価法

データ同化を通して得られた解析値 $X_{j,n}^a$ の精度は次のようにRMSEを以て評価する。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{40} \sum_{j=1}^{40} \left(\frac{1}{7200} \sum_{n=301}^{7500} (X_{j,n}^a - X_{j,n}^t)^2 \right)} \quad (\text{C.1.2})$$

このとき、 $n = 1 \sim 300$ はモデルの一時的な振る舞いを除くための時間としている。

C.2 結果

$m = 10$ で Serial EnSRF を用いた場合の解析値のRMSEの膨張係数 α と Schur length scale σ の依存関係は図 ?? となる。図 ?? は Miyoshi(2005) の Fig2.3(図 ??) とほぼ同等の結果を示して

おり，Serial EnSRF のプログラムコードのエラーはないことが確認できる．

同様に，Lorenz96モデルでの local patch を図?? のようにとると，LETKFで $m = 10$ でLETKF用いた場合の解析値の $RMSE$ の膨張係数 α と local patch の大きさ l_1 の依存関係は図?? となる．図?? の結果は，Harlim and Hunt(2005) の Fig1(図??) の結果， $l_1 = 6, l_2 = 1$ で膨張係数 $\alpha = 0.04 \sim 0.06$ のとき解析値の $RMSE \approx 0.21$ という結果と一致している．さらに Harlim and Hunt(2005) の Fig4 の設定に従い，観測値を n 時間ステップ毎にデータ同化した場合のLETKFと4D-LETKFの解析値の $RMSE$ を図?? に示す．これは，Harlim and Hunt(2005) の Fig4(図??) とほぼ同様の結果が得られている．以上より，LETKFのプログラムコードのエラーはないと思われる．

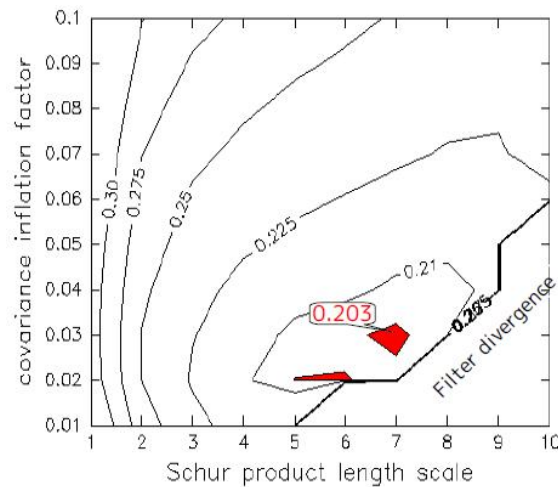


図 C.1: Serial EnSRFにおける膨張係数 α (縦軸)と Schur length scale σ (横軸)と解析値の $RMSE$ (等高線)の関係性．このときアンサンブルメンバー数は10メンバー．

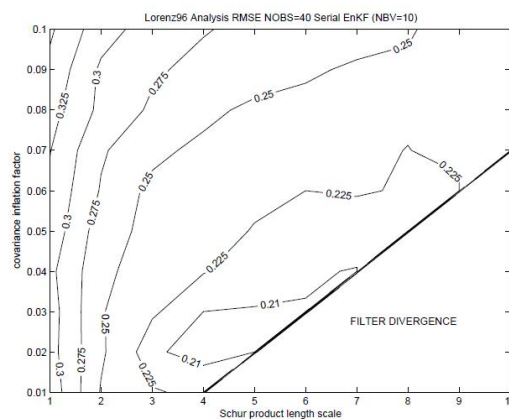


図 C.2: Miyoshi(2005) の Fig.2.3 を抜粋．Serial EnSRFにおける膨張係数 α (縦軸)と Schur length scale σ (横軸)と解析値の $RMSE$ (等高線)の関係性．このときアンサンブルメンバー数は10メンバー．

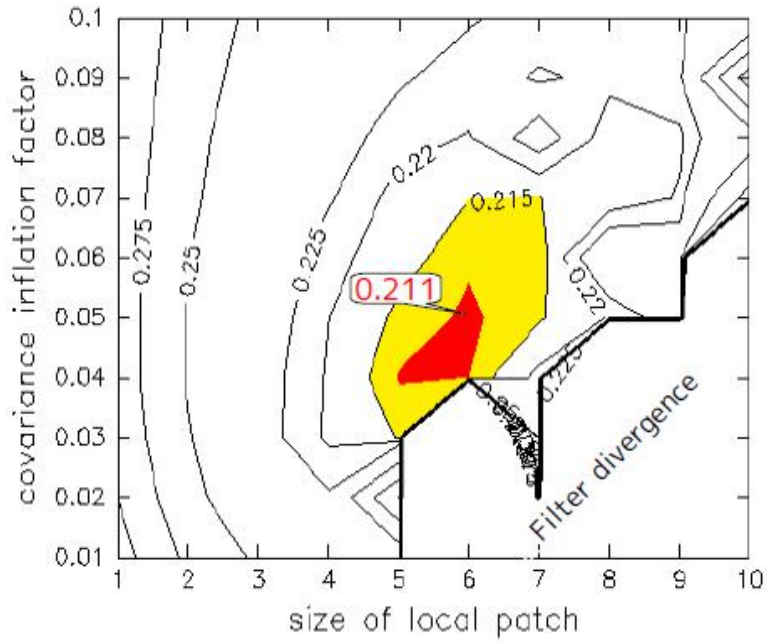


図 C.3: LETKF における膨張係数 α (縦軸) と local patch の大きさ l_1 (横軸) と解析値の RMSE(等高線) の関係性 . このときアンサンブルメンバー数は 10 メンバー , $l_2=1$ とした .

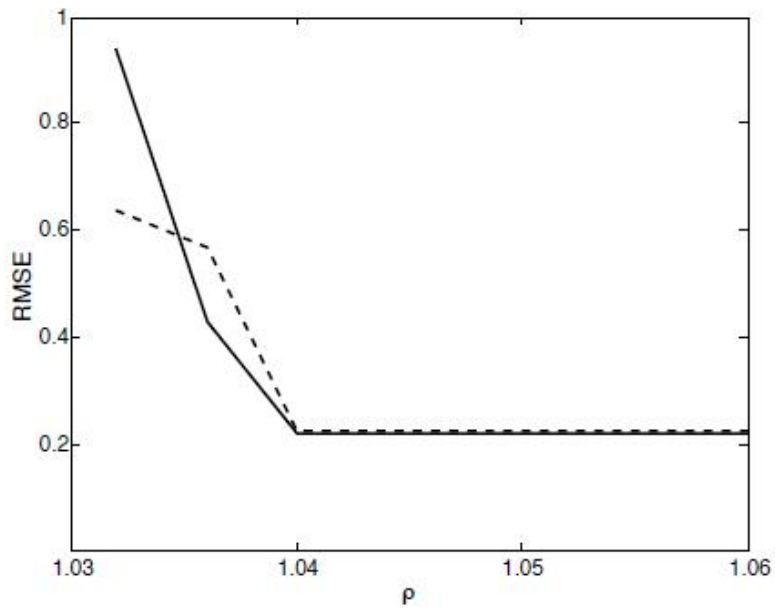


図 C.4: Harilm and Hunt(2005) の Fig1 を抜粋 . LETKF における膨張係数 α と RMSE の依存関係を示す . アンサンブルメンバー数は 10 メンバー , $l_1=6$, $l_2=1$ と設定 .

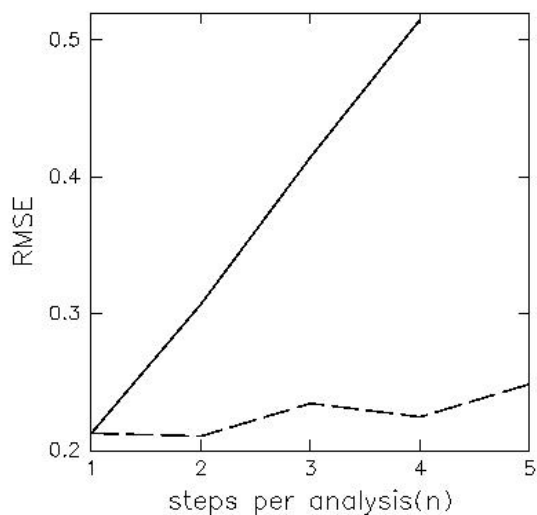


図 C.5: 横軸は観測をデータ同化する時間ステップ間隔を表し，縦軸は解析値の RMSE を表す．このとき実線が LETKF の結果で破線が 4D-LETKF の結果．アンサンブルメンバー数は 10 メンバー， $l_1=6$ ， $l_2=1$ と設定．膨張係数は解析誤差が最小になるように選んでいる

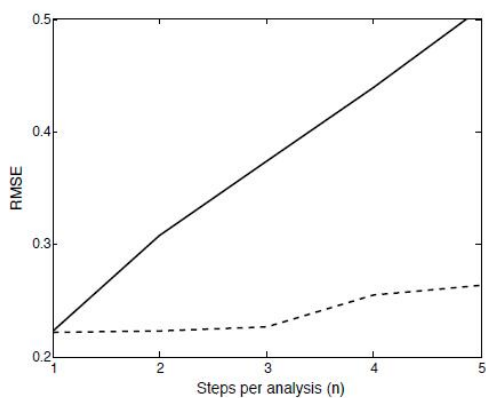


図 C.6: Harlim and Hunt(2005) の Fig4 を抜粋．図 ?? と同様．

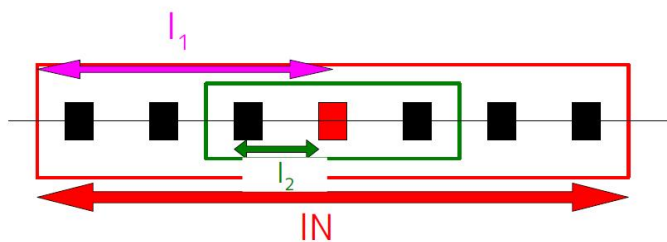


図 C.7: Lorenz96 での local patch の定義．線上の四角い点は格子点を表す．赤の格子点が local patch の中心． IN が local patch のサイズで l_1 が local patch の片側のサイズを示し， $IN=2l_1+1$ の関係である． l_2 は内側の local patch の片側のサイズを示し， $2l_2+1$ の領域で得られた解析値が最終的に領域全体 (global) で合成される．

付録D Desroziers et al(2005)による統計的 関係式の導出

以下の導出は Desroziers et al(2005) を参考にしている．イノベーションベクトル (innovation vector) を

$$d_f^o = Y^o - H(X^f) \quad (\text{D.0.1})$$

と表記する．このイノベーションベクトルは次のように変形できる．

$$\begin{aligned} d_f^o &= Y^o - H(X^f) \\ &= Y^o - H(X^t) + H(X^t) - H(X^f) \\ &= \delta Y^o - H\delta X^f \end{aligned} \quad (\text{D.0.2})$$

したがって，

$$\begin{aligned} \langle d_f^o (d_f^o)^T \rangle &= \langle (\delta Y^o - H\delta X^f)(\delta Y^o - H\delta X^f)^T \rangle \\ &= \langle \delta Y^o (\delta Y^o)^T \rangle - \langle \delta Y^o H(\delta X^f)^T \rangle - \langle H(\delta X^f)(\delta Y^o)^T \rangle + \langle H\delta X^f (H\delta X^f)^T \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.0.3})$$

観測誤差 δY^o と予報誤差 δX^f は無相関 ($\langle \delta Y^o H(\delta X^f)^T \rangle = 0$, $\langle H\delta X^f (\delta Y^o)^T \rangle = 0$) であると仮定すると，

$$\langle d_f^o (d_f^o)^T \rangle = HP^f H^T + R \quad (\text{D.0.4})$$

の関係が求まる．

次に d_f^a を

$$d_f^a = H(X^a) - H(X^f)$$

と定義する．KFの第(4)式を代入すると

$$\begin{aligned} d_f^a &= H(X^a) - H(X^a - Kd_f^o) \\ &= HKd_f^o \end{aligned} \quad (\text{D.0.5})$$

よって

$$d_f^a (d_f^a)^T = HKd_f^o (d_f^o)^T \quad (\text{D.0.6})$$

と表わされる．式(??)の統計的期待値($\langle \rangle$ で表す)をとると，式(??)から

$$\begin{aligned}
 \langle d_f^a(d_f^o)^T \rangle &= HK \langle d_f^o(d_f^o)^T \rangle \\
 &= HP^f H^T (HP^f H^T + R)^{-1} \langle d_f^o(d_f^o)^T \rangle \\
 &= HP^f H^T (HP^f H^T + R)^{-1} (HP^f H^T + R) \\
 &= HP^f H^T
 \end{aligned} \tag{D.0.7}$$

という関係が求められる．

最後に d_a^o を

$$d_a^o = Y^o - H(X^a)$$

と定義する． d_a^o は式(??)を用いて，

$$\begin{aligned}
 d_a^o &= Y^o - H(X^a) \\
 &= Y^o - H(X^f + HKd_f^o) \\
 &= d_f^o - HKd_f^o \\
 &= (I - KH)d_f^o \\
 &= (HP^f H^T + R) - HP^f H^T (HP^f H^T + R)^{-1} d_f^o \\
 &= R(HP^f H^T + R)^{-1} d_f^o
 \end{aligned} \tag{D.0.8}$$

と表すことができる．よって式(??)の両辺に右から $(d_a^o)^T$ をかけて，統計的期待値をとると，

$$\begin{aligned}
 \langle d_a^o(d_f^o)^T \rangle &= R(HP^f H^T + R)^{-1} \langle d_f^o(d_f^o)^T \rangle \\
 &= R(HP^f H^T + R)^{-1} (HP^f H^T + R) \\
 &= R
 \end{aligned} \tag{D.0.9}$$

の関係が求められる．

付録E データ同化における観測インパクトの評価法

衛星観測の発達に伴い、数値予報モデルでデータ同化に用いることのできる観測数が増加している。統計的に見ると新たな観測値の同化は短期予報の精度を向上させることが知られている(例えば, Joiner et al., 2004)。しかし、観測1つ1つに注目すると、観測の性質は、観測機器、観測物理量、観測場所などによってそれぞれ異なるため、観測1つ1つがデータ同化を通して解析値・予報値に与える影響もそれぞれ異なるはずである。解析値・予報値に良いインパクトを与える観測データのみ同化し、解析値・予報値に何のインパクトも与えない、または悪いインパクトを与えるような観測データを同化しないことが理想である。観測データの同化によって解析値・予報値に与えるインパクトのことを観測インパクトと呼ばれ、上記の理想的な条件を実現するために解析値・予報値に対する観測インパクトを調べる研究がいくつかなされている。

E.1 解析値に対する観測インパクト

解析値に対する観測インパクトの計算法は最初に Cardinali et al(2004) によって提案された。Cardinali et al. (2004) では新しい観測のデータセットはどれくらいの情報量を持っているのか、また解析値に及ぼす観測の影響度合いはどれくらいかという疑問に取り組むため、analysis sensitivity という量を定義し、4D-Var のデータ同化の枠組みの中でその analysis sensitivity を計算するための近似手法を提案した。Liu et al(2009) では4D-varではなく、EnKFを使って analysis sensitivity を計算する手法を提案している。以下、analysis sensitivity の式を導く。

KFにおける解析値(次元 N) を求める式は

$$X^a = KY^o + (I_N - KH)X^f \quad (\text{E.1.1})$$

このとき、 I_N は $[N \times N]$ の単位行列、 Y^o は p 次元の観測ベクトル、 H は $[p \times N]$ の観測演算子、 K は $[N \times p]$ の重みを表すカルマンゲイン行列である。このとき K は

$$K = P^f H^T (H P^f H^T + R)^{-1} = P^a H^T R^{-1} \quad (\text{E.1.2})$$

で求められる。このとき R は $[p \times p]$ の観測誤差共分散行列、 P^a は $[N \times N]$ の解析誤差共分散

散行列, P^f は $[N \times N]$ の予報誤差共分散行列である. 観測空間での解析値 Y^a は式(??)を使うと

$$\begin{aligned}
 Y^a &= HX^a = HKY^o + H(I_N - KH)X^f \\
 &= HKY^o + H(I_N H^{-1} - K)HX^f \\
 &= HKY^o + (I_p - HK)HX^f \\
 &= HKY^o + (I_p - HK)Y^f
 \end{aligned} \tag{E.1.3}$$

と求まる. 式(??)を用いると, 観測ベクトル Y^o に対する観測空間における解析ベクトル Y^a の感度 S^o は

$$S^o = \frac{\partial Y^a}{\partial Y^o} = K^T H^T = R^{-1} H P^a H^T \tag{E.1.4}$$

と定義される. このとき $S^o [p \times p]$ は influence matrix と呼ばれる. また S^o の対角成分は self-sensitivity と呼ばれ, 非対角成分は cross-sensitivity と呼ばれる. また観測空間における予報ベクトル X^f に対する Y^a の感度 S^f は

$$S^f = \frac{\partial Y^a}{\partial Y^f} = I_p - K^T H^T = I_p - S^o \tag{E.1.5}$$

と定義される. S^f と S^o は相補的關係で加算すると 1 になる. 以上 S^f と S^o が analysis sensitivity である.

Cardinali et al(2004) では, P^a を 4D-var から求めていたが, Liu et al. (2009) では EnKF を用いて $P^a = \frac{1}{m-1} E^a (E^a)^T$ と表すことで, S^o を次のように変形している.

$$S^o = R^{-1} H P^a H^T = \frac{1}{m-1} R^{-1} (H E^a) ((H E^a)^T) \tag{E.1.6}$$

もし, 観測誤差が無相関であるとき, i 行 i 列の self-sensitivity は

$$S_{ii}^o = \frac{\partial Y_i^a}{\partial Y_i^o} = \left(\frac{1}{m-1} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{l=1}^m (H E^{a(l)})_i \times (H E^{a(l)})_i \tag{E.1.7}$$

i 行 j 列の cross-sensitivity は

$$S_{ij}^o = \frac{\partial Y_i^a}{\partial Y_j^o} = \left(\frac{1}{m-1} \right) \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{l=1}^m (H E^{a(l)})_j \times (H E^{a(l)})_i \tag{E.1.8}$$

で求めることができる. このとき σ は観測誤差分散を表す.

E.2 予報値に対する観測インパクト

観測値が予報値に与える影響を調べる手法としては, Zapotocny et al(2002) などのように, 観測データを同化した場合 (データ付加実験) と観測データを同化しない場合 (データ拒否実験) との差から求めるのが従来の手法であった. しかし, この手法は, 観測値が手に入るごとに毎回モデルの計算をしなければならないため, 計算コストがかかるという欠点がある. そこで, データ

拒否実験を行わない手法として，Langland and Baker(2004，以下LB04)では，アジョイントモデルを用いた短期予報における観測インパクトの評価法を提案した．また Ancell and Hakim(2007)が第2アンサンブル感度を用いた観測インパクトの評価法を定式化し，Torn and Hakim(2008)によって第2アンサンブル感度を用いた観測インパクトの評価法が検証された．さらに，Liu and Kalnay(2008，以下LK08)，Li et al(2010)ではLE04と同様の考え方で，アジョイントモデルを用いず，LETKFの枠組みの中でアンサンブル摂動を用いた観測インパクトの評価法を提案している．図??ではLA04，AH07，LK08の観測インパクトの評価手法の特徴をまとめた．次節以降，LB04，AH07，LK08の評価手法の導出についてまとめる．

	再解析データ	感度解析	定性的評価	定量的評価	データ同化
LB04	不要	アジョイント感度	可	可	4D-var
AH07	不要	アジョイン感度 または 第2アンサンブル感度	不可	可	4D-var または EnKF
LK08	必要	不要	可	可	LETKF

図 E.1: LB04，AH07，LK08 による観測インパクトの評価手法の特徴

E.2.1 感度解析を用いる手法 1

Langland and Baker(2004)によるアジョイント感度を用いる手法をまとめる．解析時刻 n の解析値 X_n を初期値とした時刻 t における予報値を $X_{t,n}$ ，解析時刻 n より h 時間早い解析値 X_{n-h} を初期値とした時刻 t における予報値を $X_{t,n-h}$ とおく．また X^a を verifying analysis とし，予報誤差をそれぞれ

$$e_{t,n} = X_{t,n} - X^a \quad (\text{E.2.1})$$

$$e_{t,n-h} = X_{t,n-h} - X^a \quad (\text{E.2.2})$$

で表す．

評価関数 J を，時刻 n を初期値とした時刻 t までの予報と時刻 $n-h$ を初期値とした時刻 t までの予報の予報誤差エネルギーノルムの差として定義する．

$$J_t = \frac{1}{2} (\langle e_{t,n}, Ce_{t,n} \rangle - \langle e_{t,n-h}, Ce_{t,n-h} \rangle) \quad (\text{E.2.3})$$

このとき， C は相対的な重み成分を持った正値対称行列である．このとき予報はそれぞれ同様のモデルを用いているので，このとき式(??)の計算によって得られる J_t は単純に時刻 n で観測値をデータ同化したか，データ同化していないかの結果現れた差である．また式(??)から $J_t < 0$ であるなら時刻 n で観測をデータ同化したことによって，時刻 t における予報誤差が減少したことがわかる．図??がその概念図である．

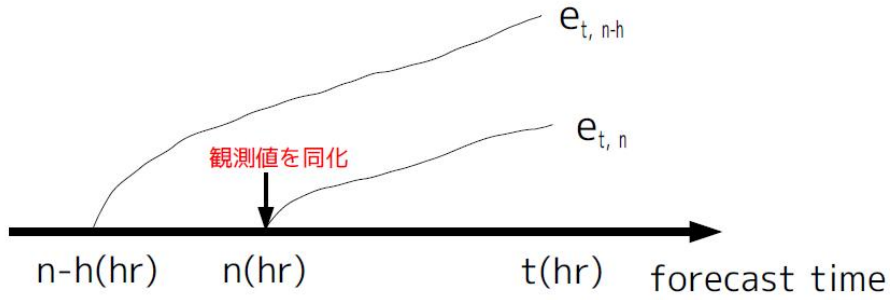


図 E.2: 時刻 t での予報誤差の減少に対する観測インパクトの時間依存関係の概念図 . (Langland and Baker(2004) を参考)

さらに ,

$$J_{t, n} = \frac{1}{2} \langle (X_{t, n} - X^a), C(X_{t, n} - X^a) \rangle \quad (\text{E.2.4})$$

$$J_{t, n-1} = \frac{1}{2} \langle (X_{t, n-1} - X^a), C(X_{t, n-1} - X^a) \rangle \quad (\text{E.2.5})$$

と定義し , それぞれ $X_{t, n}$ と $X_{t, n-h}$ で微分すると ,

$$\frac{\partial J_{t, n}}{\partial X_{t, n}} = C(X_{t, n} - X^a) \quad (\text{E.2.6})$$

$$\frac{\partial J_{t, n-h}}{\partial X_{t, n-h}} = C(X_{t, n-h} - X^a) \quad (\text{E.2.7})$$

となるので , 式 (??) は , 式 (??) , 式 (??) を用いて次のように書き表せられる .

$$J_t = \langle (X_{t, n} - X_{t, n-h}), \left(\frac{\partial J_{t, n}}{\partial X_{t, n}} + \frac{\partial J_{t, n-h}}{\partial X_{t, n-h}} \right) \rangle \quad (\text{E.2.8})$$

アジョイント演算子 $M_{t, n}^T$ を作用させると ,

$$\frac{\partial J_{t, n}}{\partial X_{n, n}} = M_{t, n}^T \frac{\partial J_{t, n}}{\partial X_{t, n}} \quad (\text{E.2.9})$$

$$\frac{\partial J_{t, n-h}}{\partial X_{n, n-h}} = M_{t, n-h}^T \frac{\partial J_{t, n-h}}{\partial X_{t, n-h}} \quad (\text{E.2.10})$$

なので , 式 (??) は

$$J_t = \langle \delta X_{n, n} \left[\frac{\partial J_{t, n}}{\partial X_{n, n}} + \frac{\partial J_{t, n-h}}{\partial X_{n, n-h}} \right] \rangle \quad (\text{E.2.11})$$

と書き直すことができる . また KF の式を用いると ,

$$\delta X_{n, n} = K_n (Y_n^o - H_n X_{n, n-h}) \quad (\text{E.2.12})$$

このとき K_n は

$$K_n = P_{n, n-h} H_n^T [H_n P_{n, n-h} H_n^T + R_n]^{-1} \quad (\text{E.2.13})$$

よって式 (??) は

$$\begin{aligned} J_t &= \langle K_n(Y_n^o - H_n X_{n,n-h}) \left(\frac{\partial J_{t,n}}{\partial X_{n,n}} + \frac{\partial J_{t,n-h}}{\partial X_{n,n-h}} \right) \rangle \\ &= \langle (Y_n^o - H_n X_{n,n-h}) K_n^T \left(\frac{\partial J_{t,n}}{\partial X_{n,n}} + \frac{\partial J_{t,n-h}}{\partial X_{n,n-h}} \right) \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.2.14})$$

と変形できる．式 (??) を Y_n^o で微分すると，

$$\frac{\partial J_t}{\partial Y_n^o} = K_n^T \left(\frac{\partial J_{t,n}}{\partial X_{n,n}} + \frac{\partial J_{t,n-h}}{\partial X_{n,n-h}} \right) \quad (\text{E.2.15})$$

となるので，式 (??) を用いると式 (??) は

$$\begin{aligned} J_t &= \langle (Y_n^o - H_n X_{n,n-h}) \frac{\partial J_t}{\partial Y_n^o} \rangle \\ &= \left[\frac{\partial J_t}{\partial Y_n^o} \right]^T (Y_n^o - H_n X_{n,n-h}) \end{aligned} \quad (\text{E.2.16})$$

と表される (LB04 の式 (7))．したがって J_t の評価のためには， $\frac{\partial J_t}{\partial Y_n^o}$ の評価が必要である．つまり $\frac{\partial J_{t,n}}{\partial X_{n,n}}$ と $\frac{\partial J_{t,n-h}}{\partial X_{n,n-h}}$ の 2 つの感度をアジョイント感度を評価を必要とする．

E.2.2 感度解析を用いる手法 2

Ancell and Hakim(2007) による感度解析の手法をまとめる．このとき Ancell and Hakim(2007) では EnKF の摂動を入力アンサンブル摂動とした第 2 アンサンブル感度を用いる場合のみ述べているが，ここでは正規乱数を入力アンサンブル摂動とした第 2 アンサンブル感度を用いた場合についても考慮する．感度解析を用いる手法 1 では観測値をデータ同化することによって予報に与える影響の良し悪しとその変化量を評価できたが，この感度解析を用いる手法 2 では変化量しか評価できないことに注意．

データ同化サイクルにおいて，時刻 ini における予報値 X^f ，予報誤差共分散 P^f をそれぞれ時刻 ini における解析値 X_{ini} ，解析誤差共分散 P_{ini} とすると，時刻 ini における観測値 Y_{ini}^o をデータ同化することによる解析インクリメントは

$$\delta X_{ini} = K_{ini}(Y_{ini}^o - H_{ini}X_{ini}) \quad (\text{E.2.17})$$

と表すことができる．このとき K_{ini} は

$$K_{ini} = P_{ini}H_{ini}^T[H_{ini}P_{ini}H_{ini}^T + R_{ini}]^{-1} \quad (\text{E.2.18})$$

また感度解析の定義式 (??) を用いると，時刻 ini の入力の変化 X_{ini} に対するモデルの出力の変化 δj_{fin} は

$$\begin{aligned} \delta j_{fin} &= \frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \delta X_{ini} \\ &= \frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} K_{ini}(Y_{ini}^o - H_{ini}X_{ini}) \end{aligned} \quad (\text{E.2.19})$$

$$= A^{AS} K_{ini}(Y_{ini}^o - H_{ini}X_{ini}) \quad (\text{E.2.20})$$

このとき感度 $\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}}$ はアジョイント感度 A^{AS} とした．アジョイント感度 A^{AS} は 2.3.1 節で述べたように式 (??) が成り立つのであれば，式 (??) は第 1 アンサンブル感度 A^{ES1} に置き換えることも可能である．

さらに式 (??) を第 2 アンサンブル感度 A^{ES2} で表すことを考える．まず入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動 E_{ini} を用いた場合を考える．入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動 E_{ini} を用いたとき得られる誤差共分散を P_{ini}^{EnKF} と表記する．このとき KF から得られる P_{ini} と P_{ini}^{EnKF} は等しいことに注意． A^{AS} と A^{ES2} の関係は式 (??) より

$$A^{AS} = A^{ES2} D_{ini} (P_{ini}^{EnKF})^{-1} \quad (E.2.21)$$

であるので，式 (??)，式 (??) を式 (??) に代入すると δj_{fin} は A^{ES2} を用いて

$$\begin{aligned} \delta j_{fin} &= [A^{AS}] K_{ini} (Y_{ini}^o - H_{ini} X_{ini}) \\ &= A^{ES2} D_{ini} (P_{ini}^{EnKF})^{-1} P_{ini} H_{ini}^T [H_{ini} P_{ini} H_{ini}^T + R_{ini}]^{-1} (Y_{ini}^o - H_{ini} X_{ini}) \\ &= A^{ES2} D_{ini} H_{ini}^T [H_{ini} P_{ini} H_{ini}^T + R_{ini}]^{-1} (Y_{ini}^o - H_{ini} X_{ini}) \end{aligned} \quad (E.2.22)$$

と表すことができる．よって入力アンサンブル摂動として EnKF から得られる摂動を用いた場合， P_{ini} の逆行列を計算する必要がないので第 2 アンサンブル感度を用いての式 (??) の計算が可能である．

次に，入力アンサンブル摂動として正規乱数 E_{ini} を用いた場合得られる誤差共分散を P_{ini}^{random} と表記する．このとき KF から得られる P_{ini} と P_{ini}^{random} は異なることに注意． A^{AS} と A^{ES2} の関係は式 (??) より

$$A^{AS} = A^{ES2} D_{ini} (P_{ini}^{random})^{-1} \quad (E.2.23)$$

であるので，式 (??)，式 (??) を式 (??) に代入すると δj_{fin} は A^{ES2} を用いて

$$\begin{aligned} \delta j_{fin} &= [A^{AS}] K_{ini} (Y_{ini}^o - H_{ini} X_{ini}) \\ &= A^{ES2} D_{ini} (P_{ini}^{random})^{-1} P_{ini} H_{ini}^T [H_{ini} P_{ini} H_{ini}^T + R_{ini}]^{-1} (Y_{ini}^o - H_{ini} X_{ini}) \end{aligned} \quad (E.2.24)$$

と表すことができる．よって入力アンサンブル摂動として正規乱数を用いた場合 $(P_{ini}^{random})^{-1}$ の計算が必要となる． $(P_{ini}^{random})^{-1}$ が自明であるためには入力アンサンブル摂動のアンサンブルメンバー数がモデルの次元以上でなければならないが，これは計算資源的に実現不可能である．そこで，入力アンサンブル摂動のアンサンブルメンバー数がモデルの次元よりも小さい場合の対処法として P_{ini}^{random} を擬似逆行列として表せば式 (??) は計算可能となる．しかし，データ同化に EnKF を用いた場合，式 (??) は式 (??) と比べると，正規乱数を摂動としたアンサンブル予報を追加で行い，さらに P_{old}^{random} の逆行列計算をする必要があるなど明らかに計算資源面での負荷が大きいため式 (??) を用いる利点はない．

E.3 LETKF を用いる手法

この手法は再解析する場合にのみ有効な手法である。

解析時刻 n と解析時刻 n より h 時間早い解析時刻 $n-h$ での m メンバーからなる解析アンサンブルを初期値とし、時刻 $t (t > n)$ までアンサンブル予報したときのアンサンブル平均をそれぞれ次のように記述する。

$$\bar{X}_{t,n}^f = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m M_{t,n}(X_n^{a(k)}) \quad \bar{X}_{t,n-h}^f = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m M_{t,n}(X_{n-h}^{a(k)}) \quad (\text{E.3.1})$$

このとき時刻 t における $\bar{X}_{t,n}^f$ 、 $\bar{X}_{t,n-h}^f$ の予報誤差 e をそれぞれ

$$e_{t,n} = \bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_t^a, e_{t,n-h} = \bar{X}_{t,n-h}^f - \bar{X}_t^a \quad (\text{E.3.2})$$

と定義する。このとき \bar{X}_t^a は verifying analysis である。予報に対する観測インパクトを見積もるための評価関数 J は、時刻 n と時刻 $n-h$ を初期時刻とした予報値 $\bar{X}_{t,n}^f$ 、 $\bar{X}_{t,n-h}^f$ の予報誤差 $e_{t,n}$ 、 $e_{t,n-h}$ の 2 乗の差 (L2 ノルム) と定義している。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} (e_{t,n}^T e_{t,n} - e_{t,n-h}^T e_{t,n-h}) \\ &= \frac{1}{2} (e_{t,n}^T + e_{t,n-h}^T) (e_{t,n} + e_{t,n-h}) \end{aligned} \quad (\text{E.3.3})$$

式 (??) に式 (??) を代入すると、

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} (\bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_t^a + e_{t,n-h})^T (\bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_t^a - \bar{X}_{t,n-h}^f + \bar{X}_t^a) \\ &= \frac{1}{2} (2e_{t,n-h} + \bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_{t,n-h}^f)^T (\bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_{t,n-h}^f) \end{aligned} \quad (\text{E.3.4})$$

と変形できる。

LETKF において、時刻 n における $k (k = 1 \sim m)$ 番目の解析アンサンブルメンバー $X_n^{a(k)}$ は式 (??) から求めた解析アンサンブル平均 \bar{X}_n^a に摂動 $\delta X_n^{a(k)}$ を加えたものである。つまり、

$$X_n^{a(k)} = \bar{X}_{n,n-h}^f + E_{n,n-h}^f \tilde{P}_n^a (H_n E_{n,n-h}^f)^T R_n^{-1} (Y_n^o - H_n \bar{X}_{n,n-h}^f) + \delta X_n^{a(k)} \quad (\text{E.3.5})$$

このとき

$$E_{n,n-h}^f = [X_{n,n-h}^{f(1)} - \bar{X}_{n,n-h}^f | \cdots | X_{n,n-h}^{f(m)} - \bar{X}_{n,n-h}^f] \quad (\text{E.3.6})$$

また

$$Y_n^f = H_n E_{n,n-h}^f \quad (\text{E.3.7})$$

$$\tilde{K}_n = \tilde{P}_n^a (Y_n^f)^T R_n^{-1} \quad (\text{E.3.8})$$

$$d_n = Y_n^o - H_n \bar{X}_{n,n-h}^f \quad (\text{E.3.9})$$

とおき，式 (??) を次のように簡略化して記述する．

$$X_n^{a(k)} = \bar{X}_{n,n-h}^f + E_{n,n-h}^f \tilde{K}_n d_n + \delta X_n^{a(k)} \quad (\text{E.3.10})$$

式 (??) を用いると， $\bar{X}_{t,n}^f$ は次のように表すことができる．

$$\bar{X}_{t,n}^f = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m M_{t,n}(X_n^{a(k)}) \quad (\text{E.3.11})$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m M_{t,n}(\bar{X}_{n,n-h}^f + E_{n,n-h}^f \tilde{K}_n d_n + \delta X_n^{a(k)}) \quad (\text{E.3.12})$$

接線形モデル $M_{t,n}$ を用い，式 (??) を $\bar{X}_{n,n-h}^f$ のまわりで線形化すると，

$$\bar{X}_{t,n}^f \sim M_{t,n}(\bar{X}_{n,n-h}^f) + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m M_{t,n}(E_{n,n-h}^f \tilde{K}_n d_n + \delta X_n^{a(k)}) \quad (\text{E.3.13})$$

式 (??)，式 (??) より

$$E_n^a = E_{n,n-h}^f [(m-1)\tilde{P}_n^a]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.3.14})$$

式 (??) の k 列目の摂動成分 $\delta X_n^{a(k)}$ を $[(m-1)\tilde{P}_n^a]^{\frac{1}{2}}$ の k 列目の摂動成分 $W_n^{a(k)}$ で表すと，

$$\delta X_n^{a(k)} = E_{n,n-h}^f \delta W_n^{a(k)} \quad (\text{E.3.15})$$

式 (??) を式 (??) に代入すると，

$$\bar{X}_{t,n}^f \sim M_{t,n}(\bar{X}_{n,n-h}^f) + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m M_{t,n}(E_{n,n-h}^f (\tilde{K}_n d_n + \delta W_n^{a(k)})) \quad (\text{E.3.16})$$

時刻 t は誤差が線形で成長するのに十分短い時間だと仮定すると，

$$\mathbf{M}_{t,n} E_{n,n-h}^f = E_{t,n-h}^f \quad (\text{E.3.17})$$

$$= [X_{t,n-h}^{f(1)} - \bar{X}_{t,n-h}^f | \cdots | X_{t,n-h}^{f(m)} - \bar{X}_{t,n-h}^f] \quad (\text{E.3.18})$$

式 (??) を式 (??) に代入すると、

$$\bar{X}_{t,n}^f = \bar{X}_{t,n-h}^f + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m E_{t,n-h}^f (\tilde{K}_n d_n + \delta W_n^{a(k)}) \quad (\text{E.3.19})$$

$$= \bar{X}_{t,n-h}^f + E_{t,n-h}^f \tilde{K}_n d_n + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m E_{t,n-h}^{f(j)} \sum_{k=1}^m \delta W_n^{a(j,k)} \quad (\text{E.3.20})$$

ここで $\sum_{j=1}^m \delta W_n^{a(j,k)} = \sum_{k=1}^m \delta W_n^{a(k,j)} = 1$ となることを証明する． m 次元のベクトル V を次のように各成分が 1 のベクトルとして定義する．

$$V = [1 \cdots 1]^T \quad (\text{E.3.21})$$

式 (E.3.21) の両辺の逆行列をとり，左から V をかけると，

$$\begin{aligned} (\tilde{P}^a)^{-1}V &= [(m-1)I + (HE^f)^T R^{-1} HE^f]V \\ &= (m-1)V \end{aligned} \quad (\text{E.3.22})$$

このとき， E^f の列成分の合計はゼロなので， $E^f V = 0$ であることを用いた．さらに，LETKF での変換行列 T は $T = (m-1)\tilde{P}^{a\frac{1}{2}}$ で与えられるので，

$$TT^T = (m-1)\tilde{P}^a \quad (\text{E.3.23})$$

式 (E.3.22) の両辺に V をかけて式 (E.3.23) を代入すると，

$$\begin{aligned} TT^T V &= (m-1)\tilde{P}^a V \\ &= V \end{aligned} \quad (\text{E.3.24})$$

よって式 (E.3.24) から V は TT^T の固有ベクトルで固有値は 1 であることがわかる．対称行列の特性に基づき T の固有ベクトルもまた V で固有値は 1 に等しい．

$$TV = V \quad (\text{E.3.25})$$

したがって T の各成分を $\delta W^{(j,i)}$ と表すと

$$\sum_{i=1}^m \delta W^{(j,i)} = 1 \quad (\text{E.3.26})$$

であることがわかる．また T は対称行列なので

$$\sum_{j=1}^m \delta W^{(j,i)} = 1 \quad (\text{E.3.27})$$

とも表すことができる．よって $\sum_{k=1}^m \delta W_n^{a(k,j)} = 1$ である．

さらに $\sum_{j=1}^m E_{t,n-h}^{f(j)}$ は予報アンサンブル摂動の平均はゼロであることから $\sum_{j=1}^m E_{t,n-h}^{f(j)} = 0$ ．したがって最終的に式 (E.3.27) は

$$\bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_{t,n-h}^f = E_{t,n-h}^f \tilde{K}_n d_n \quad (\text{E.3.28})$$

したがって，式 (E.3.28) に式 (E.3.27) を用いると

$$e_{t,n} - e_{t,n-h} = E_{t,n-h}^f \tilde{K}_n d_n \quad (\text{E.3.29})$$

と求まる．また

$$e_{t,n} + e_{t,n-h} = \bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_t^a + \bar{X}_{t,n-h}^f - \bar{X}_t^a \quad (\text{E.3.30})$$

$$= \bar{X}_{t,n-h}^f - \bar{X}_t^a + \bar{X}_t^a + \bar{X}_{t,n}^f - \bar{X}_{t,n-h}^f \quad (\text{E.3.31})$$

$$= 2e_{t,n-h} + E_{t,n-h}^f \tilde{K}_n d_n \quad (\text{E.3.32})$$

以上より，式(??)は次のように表される．

$$J = (e_{t,n-h} + \frac{1}{2}E_{t,n-h}^f \tilde{K}_n d_n)^T E_{t,n-h}^f \tilde{K}_n d_n \quad (\text{E.3.33})$$

したがって，時刻 n でデータ同化した観測値が時刻 t での予報値をどれくらい改善するか ($J < 0$)，悪化させるか ($J > 0$) は式(??)を用いることで確認することができる．

付録F 機動的観測 (adaptive observation)

機動的観測は、現状の観測地点に加えて新たにどの観測地点を追加すれば予測精度向上につながるかを知ることが目的としている。機動的観測の手法として、アジョイント感度、あるいは特異ベクトルを用いた手法 (Buizza and Montani, 1999; Gelaro et al., 1999; Langland et al., 1999) とアンサンプルベースの手法 (Bishop et al., 2001; Hamill and Snyder 2002, Ancell and Hakim 2007) の2通りの手法が提案、研究されている。ここでは、Ancell and Hakim(2007)による第2アンサンプル感度を用いた機動的観測の手法をまとめる。このとき Ancell and Hakim(2007)ではEnKFから得られた摂動を入力アンサンプル摂動とした第2アンサンプル感度を用いる場合のみ述べているが、ここでは正規乱数を入力アンサンプル摂動とした第2アンサンプル感度を用いた場合についても考慮した。

入力が微小に変化 δX_{ini} したときの出力の変化 δj_{fin} は感度解析を用いて、

$$\delta j_{fin} = \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right] \delta X_{ini} \quad (\text{F.0.1})$$

このとき、出力の分散 σ は

$$\sigma = \frac{1}{m-1} \delta j_{fin} \delta j_{fin}^T \quad (\text{F.0.2})$$

と表せることができ、式(??)を代入すると

$$\sigma = \frac{1}{m-1} \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right] \delta X_{ini} \delta X_{ini}^T \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right]^T \quad (\text{F.0.3})$$

$$= \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right] P_{ini} \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right]^T \quad (\text{F.0.4})$$

と σ は感度解析の結果を用いて求めることができることがわかる。

ここで、式(??)を用いて機動的観測する場所を考える。通常観測のデータ同化後の解析誤差共分散行列を P_{old} とし、機動的観測した場所を新たにデータ同化した場合の解析誤差共分散行列を P_{new} とする。このとき P_{old} と P_{new} の関係は、KFより

$$P_{New} = [I - K_{new} H_{new}] P_{old} \quad (\text{F.0.5})$$

また K_{new} は

$$K_{new} = P_{old} H_{new}^T [H_{new} P_{old} H_{new}^T + R_{new}]^{-1} \quad (\text{F.0.6})$$

である。機動的観測した場所を同化したとすると、 j_{fin} の分散 σ の変化量 $\delta\sigma$ は

$$\delta\sigma = \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right] (P_{old} - P_{new}) \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right]^T \quad (\text{F.0.7})$$

式 (??) に式 (??) を代入すると

$$\delta\sigma = \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right] K_{new} H_{new} P_{old} \left[\frac{\partial j_{fin}}{\partial X_{ini}} \right]^T \quad (\text{F.0.8})$$

この式 (??) を用いることによって, j_{fin} の分散を最も小さくする地点, つまり $\delta\sigma$ を最も大きくする地点を知ることができ, その地点を機動的観測すればよい. このとき式 (??) において $\partial J_i / \partial X_{n,n}$ はアジョイント感度 A^{AS} , または第 1 アンサンブル感度 A^{ES1} で表される.

さらに, 第 2 アンサンブル感度 A^{ES2} で式 (??) を表すことを考える. まず入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動 E_{old} を用いた場合について考える. 入力アンサンブル摂動として EnKF から得られた摂動 E_{old} を用いたとき得られる誤差共分散を P_{old}^{EnKF} と表記する. このとき KF から得られる P_{old} と P_{old}^{EnKF} は等しいことに注意. A^{AS} と A^{ES2} の関係は式 (??) で, K_{new} は式 (??) で与えられるので, それぞれ式 (??) に代入すると $\delta\sigma$ は A^{ES2} を用いて

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= A^{AS} K_{new} H_{new} P_{old} [A^{AS}]^T \\ &= A^{ES2} D_{old} (P_{old}^{EnKF})^{-1} P_{old} H_{new}^T [H_{new} P_{old} H_{new}^T + R_{new}]^{-1} H_{new} P_{old} (P_{old}^{EnKF})^{-1} D_{old} [A^{ES2}]^T \\ &= A^{ES2} D_{old} H_{new}^T [H_{new} P_{old} H_{new}^T + R_{new}]^{-1} H_{new} D_{old} [A^{ES2}]^T \end{aligned} \quad (\text{F.0.9})$$

と表すことができる. よって EnKF から得られる摂動を入力アンサンブル摂動とした場合, P_{old} の逆行列を計算する必要がなくなるので第 2 アンサンブル感度を用いての式 (??) の計算が可能である.

次に, 入力アンサンブル摂動として正規乱数から得られた摂動 E_{old} を用いた場合について考える. 入力アンサンブル摂動として正規乱数から得られた摂動 E_{old} を用いたとき得られる誤差共分散を P_{old}^{random} と表記する. このとき KF から得られる P_{old} と P_{old}^{random} は異なることに注意. A^{AS} と A^{ES2} の関係は式 (??), K_{new} は式 (??) で与えられるので, それぞれ式 (??) に代入すると $\delta\sigma$ は A^{ES2} を用いて

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= A^{AS} K_{new} H_{new} P_{old} [A^{AS}]^T \\ &= A^{ES2} D_{old} (P_{old}^{random})^{-1} P_{old} H_{new}^T [H_{new} P_{old} H_{new}^T + R_{new}]^{-1} H_{new} P_{old} (P_{old}^{random})^{-1} D_{old} [A^{ES2}]^T \end{aligned} \quad (\text{F.0.10})$$

と表すことができる. よって入力アンサンブル摂動として正規乱数を用いた場合 $(P_{old}^{random})^{-1}$ の計算が必要となる. $(P_{old}^{random})^{-1}$ が自明であるためには入力アンサンブル摂動のアンサンブルメンバー数がモデルの次元以上でなければならないが, これは計算資源的に実現不可能である. そこで, 入力アンサンブル摂動のアンサンブルメンバー数がモデルの次元よりも小さい場合の対処法として P_{old}^{random} を擬似逆行列として表せば式 (??) は計算可能となる. しかし, データ同化に EnKF を用いた場合, 式 (??) は式 (??) と比べると, 正規乱数を摂動としたアンサンブル予報を追加で行い, さらに P_{old}^{random} の逆行列計算をする必要があるなど明らかに計算資源面での負荷が大きいため式 (??) を用いる利点はない.

参考文献

- Anderson JL , Anderson SL . 1999 . A Monte Carlo implementation of the nonlinear filtering problem to produce ensemble assimilations and forecasts . *Mon . Weather Rev .* **127** , 2741-2758
- Ancell B , Hakim G.J . 2007 . Comparign Adjoint- and Ensemble-Sensitivity Analysis with applications to Observation Targetting . *Mon . Wea . Rev. ,* **135** , 4117-4134
- Anderson , J . L. , 2001 : An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation . *Mon . Wea . Rev. ,* **129** , 2884-2903
- Andrews , A. , 1968 : A square root formulation of the Kalman covariance equations . *AIAA J. ,* **6** , 1165-1168
- Baek , S . J. , B . R. , Hunt , E . Kalnay , E . Ott , and I . Szunyogh 2006 : Local ensemble Kalman filtering in the presence of model bias , *Tellus ,* **58A**, 293-306
- Bergthorsson , P . and B . Doos , 1995 : Numerical weather map analysis . *Tellus ,* **7** , 329-340
- Bishop , C . H. , B . J . Etherton , and S . J . Majumdar . , 2001 : Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter . PartI : Theoretical aspects . *Mon . Wea . Rev. ,* **129** , 420-436 .
- Bouttier , F . and P . Courtier , 1999 : Data assimilation concepts and methods , *Meteorological Training Course Lecture Series , ECMWF ,* 75pp
- Bowler , N. , 2006 : Comparison of error breeding , singular vectors , random perturbations and ensemble Kalaman filter perturbation strategies on a simple model . *Tellus ,* **58A** , 538-548 .
- Buizza , R., and A. Montani , 1999 : Targeting observations using singular vectors. *J. Atmos. Sci.,* **56**, 2965-2985.
- Burgers , G. , P . J . van Leeuwen , and G . Evensen , 1998 : Analysis Scheme in the Ensemble Kalman Filter . *Mon . Wea . Rev. ,* **126** , 1719-1724 .
- Cane , M . A. , A . Kaplan , R . N . Miller , B . Tang , E . C . Hackert , and A . J . Busalacchi , 1996 : Mapping tropical Pacific sea level : Data assimilation wia a reduced state space kalaman filter . *J . Geophys . Res. ,* **101**(C10) , 22 , 599-22 , 617 .
- Cardinali C , Pezzulli S , Andersson E , 2004 : Influence-matrix diagnostic of a data assimilation system . *Q . J . R . Meteorol . Soc .* **130** , 2767-2786 .

- Caccusi , D , G . , 1981 : Sensitivity theory for non-linear systems . I :Nonlinear functional analysis approach . J . Math . Phys. , **22** , 2794-2803
- Corazza M , Kalnay E , Patil D . J , Yang S-C , Morss R , Cai M , Szunyogh I , Hunt B . R , Yorke J , A , 2003 : Use of the breeding technique to estimate the structure of the analysis " error of the day ". Nonlinear Proc . Geophys . **10** , 233-243 .
- Danforth ,C . , E . Kalnay , and T . Miyoshi , 2007:Estimating and correcting global weather model error . Mon . Wea . Rev. , **135**,281-299.
- Dee , D . P . 1995 . On-line estimation of error covariance parameters for atmospheric data assimilation . Mon . Weather Rev . **123** , 1128-1145 .
- Dee , D. P . and A . M . Da Silva , 1998 : Data assimilation in the presence of forecast bias . Quart . J . Roy . Meteor . Soc. , **124** , 269-295.
- Descamps , L . and O . Talagrand , 2007 ; On some Aspects of the Definition of Initial Conditions for Ensemble Prediction . Mon . Weather Rev . **135** , 3260-3272 .
- Desroziers G . , L.Berre , B.Chapnik , and P.Poli , 2005 : Diagnosis of observation , background and analysis error statistics in observation space . Q . J . R . Meteor . Soc , **127** , 1433-1452
- Eliassen, A. 1954 : Provisional report on calculation of spatial covariance and autocorrelation of the pressure field. No. 5, Videnskaps-Akademiets Institutt for Vaer-Og Klimaforsking, Oslo. (reprinted in Bengtsson et al. 1981, pp. 319-330 .
- Errico , R . M . , and T . Vukicevic , 1992 : Sensitivity analysis using an adjoint of the PSU-NCAR mesoscale model . Mon . Wea . Rev. , 120 , 1644-1660 .
- Evensen , G . , 1994 : Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics . J . Geophys . Res. , **99**(C5) , 10143-10162 .
- Fertig , E . , J . Harlim . and B . R . Hunt , 2007:A comparative study of 4D-Var and a 4D Ensemble Kalman Filter : Perfect model simulations with Lorenz-96 . Tellus , **59A** , 96-100 .
- Fukumori I . and P . Malanotte-Rizzoli , 1995 : An approximate Kalman filter for ocean data assimilation : An example with an idealized Guls Stream model . J . Geophys . Res. , **100**(C4) , 6777-6793 .
- Gelaro , R., R . H . Langland , G . D . Rohaly , and T . E . Rosmond , 1999 : An assessment of the singular-vector approach to targeted observing using the FASTEX dataset . Quart . J . Roy . Meteor . Soc. , **125** , 3299-3327.
- Gandin, L. S. 1963 : Objective analysis of meteorological fields, Gidrometeorologicheskoe Izdatel'stvo, Leningrad (in Russian), English traslation by Israeli Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1965.

- Gelb , A. , J.F . Kasper , R.A . Nash , C.F . Price and A . A . Sutherland , 1974 : Applied optimal estimation , The M.I.T . Press , 374pp
- Gilchrist , B . and G . Cressman , 1954 : An experiment in objective analysis . *Tellus* , **6** , 309-318
- Hakim , G . J . and R . D . Torn , 2008 : Ensemble synoptic analysis . Sanders Symposium Monograph , Meteor . Monogr. **33** , 147-162 .
- Harlim , J . and B . R . Hunt , 2005 : A local ensemble transform Kalman filter : an efficient scheme for assimilating atmospheric data , preprnt
- Hoskins , B . J . , R . Buizza , and J . Badger , 2000 : The nature of singular vector growth and structure . *Quart . J . Roy . Meteor . Soc.* , **126** , 1565-1580 .
- Houtekamer , P . L and H . L . Mitchell , 1998 : Data Assimilation Using an Ensemble Kalman Filter Technique . *Mon . Wea . Rev.* , **126** , 796-811
- Hunt , B . R . , E . Kalnay , E . J . Kostelich , E . Ott , D . J . Patil , T . Sauer , I , Szunyogh , J . A . Yorke and A . V . Zimin , 2004 : Four-dimensiontional ensemble Kalman filtering . *Tellus* , **56A** , 273-277
- Hunt , B . R . , E . Kostelich , I . Szunyogh , 2007 : Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos : a local ensemble transform Kalman filter . *Physica D* , **230** , 112-126
- Joiner J , Poli P , Frank D , Liu HC . 2004 . Detection of cloud-affected AIRS channels using an adjacent-pixel approach . *Q . J . R . Meteorol . Soc.* **130** : 1469-1487
- Kalman , R . , 1960 : A new approach to linear filtering and predicted problems . *J . Basic Eng.* , **82** , 35-45
- Kalnay , E. , H . Li , T . Miyoshi , S . Yang , and J . Ballaberera-poy , 2007 : 4D-Var or Ensemble Kalman Filter? . *Tellus* , **59 A** , 778-780
- Langland R . H , and Coauthors , 1999 : The North Pacific Experiment (NORPEX-98) : Targeted observations for improved North American weather forecasts . *Bull . Amer . Meteor . Soc.* , **80** , 1363-1384.
- Langland R . H , nad N . L . Baker , 2004 : Estimation of observation impact using the NRLatmo-spheric variational data assimilation adjoint system . *Tellus* **56A** , 189-201
- Lawson W . G , and J . A . Hansen , 2004 : Impications of Stochastic and Determinisitic Filters as Ensemble-Based Data Assimilation Methods in Varying Regimes of error Growth
- Li , H . 2007 : Local ensemble transform Kalman filter with realistic observations , PhD Thesis at the University of Maryland.

- Li , H . , E . Kalnay , and T . Miyoshi , 2009 : Simultaneous estimation of covariance inflation and observation errors within an ensemble Kalman filter . *Quart . J . Roy . Meteor . Soc .* , **135** , 523-533
- Li , H . , J . Liu , and E . Kalnay , 2010 : Correction of 'Estimating observation impact without adjoint model in an ensemble Kalman filter'. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **136** , 1652-1654.
- Liu J, E . Kalnay 2008: Estimating observation impact without adjoint model in an ensemble Kalman filter. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **134** , 1327-1335.
- Liu J , E . Kalnay , T . Miyoshi and C . Cardinali 2009 : Analysis sensitivity calculation in an ensemble Kalman filter , *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **135** , 1842-1851.
- Lions , J . L . , 1971 : *Optimal Control os Systems Governed by Partial Differential Equations* , Springer , 396pp .
- Le Dimet , F . X . and O . Talagrand , 1986 : Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects . *Tellus* , **38A** , 97-110 .
- Lorenc , A . C . , 2003 : The potential of the ensemble Kalaman filter for NWP — a compatison with 4D-Var . *Quart . J . Roy . Meteor . Soc .* , **129** , 3183-3203 .
- Lorenz, E. N., 1963: Deterministic non-periodic flow. *J . Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.
- Lorenz,E.and K.Emanuel,1998 : Optimal Sites for Supplymentary Weather Observations:Simulation with a Small Model.*J.Atoms.Sci.*,**55**,399-414
- Miyoshi,T , 2005:Ensemble kalman filter experiments with a primitive-equation global model.Doctoral dissertation,University of Maryland,College Park,1-45
- Miyoshi , T . , S . Yamane , 2007 : Local ensemble transform Kalman filtering with an AGCM at a T159/L48 resolution . *Mon . Wea . Rev .* , **135** , 3841-3861
- Molteni , F . , 2003 : Atmospheric simulations using a GCM with simplified physical parametrizations . I : Model climatology and variability in multi-decadal experiments . *Climate Dyn .* , **20** , 175-191 .
- Ott , E . , B . R . Hunt , I . Szunyogh , A . V . Zimin , E . J . Kostelish , M . Corazza , E. Kalnay , D . J . Patil , and J . A . Yorke , 2004 : A local ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation . *Tellus* , **56A** , 415-428
- Panofsky , H . , 1949 : Objective weather-map analysis . *J . Appl . Meteor .* , **6** , 386-392 .
- Pham , D . T . , J . Verron , and M . C . Roubaud , 1998 : A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography . *J . Mar . Syst .* , **16** , 323-340
- Sasaki , Y . , 1958 : An objective analysis based on the variational method . *J . Meteor . Soc . Japan* , **36** , 77-88 .

- Talagrand , O . and P . Courtier , 1987: Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation . I : Theory . Quart . J . Roy . Meteor . Soc. , **113** , 1311-132
- Torn, R. D., and G. J. Hakim, 2008: Ensemble-based sensitivity analysis. Mon. Wea. Rev., **136**, 663-677
- Wang X , Bishop C . H , 2003 . A comparison of breeding and ensemble transform Kalman filter ensemble forecast schemes . J . Atmos . Sci . **60** , 1140-1158
- Wang X , Bishop C . H and Julier S . J , 2004 : Which Is Better , an Ensemble of Positive-Negative Paris or a Centered Spherical Simplex Ensemble? Mon.Wea.Rev.,**132**,1590-1605
- Wei M , Toth Z , Wobus R , Zhu , Y and Bishop C . H , 2006 : Ensemble Transform Kalman Filter-based ensemble perturbations in an operational global prediction system at NCEP . Tellus , **58A** , 28-44 .
- Wei M , Toth Z , Wobus R and Zhu , Y , 2008 : Initial perturbations based on the ensemble transform(ET)technique in the NCEP global operational forecast system . Tellus , **60A** , 62-79 .
- Whitaker, J . S . and T . M . Hamill, 2002 : Ensemble Data Assimilation without Perturbed Observations. Mon.Wea.Rev.,**130**,1913-1924
- Whitaker , J . S . , T . M . Hamill , X . Wei , Y . Song and Z . Toth , 2007 : Ensemble Data Assimilation with the NCEP Global Forecast System . Mon . Wea . Rev. , **136** , 463-482
- Zapotocny T . H , Menzel W . P , Nelson III J . P , Jung J . A . 2002 : An impact study of five remotely sensed and five in situ data types in the Eta Data Assimilation System . Weather and Forecasting **17** , 263-285
- Zhang , F . , C.Snyder , and J . Sun , 2004 : Impact of initial estimate and observation availability on convective-scale data assimilation with an ensemble Kalman filter . Mon . Wea . Rev. , **132** , 1238-1253
- 淡路俊之, 蒲地政文, 池田元美, 石川洋一, 2009: データ同化—観測・実験とモデルを融合するイノベーション. 京都大学学術出版会, pp.284
- 三好建正, 2006: アンサンブル技術の短期・中期予報への利用～激しい気象現象の予測向上を目指して～, 数値予報課報告・別冊第 52 号, 80-99
- 三好建正, 2008: カルマンフィルタ, 気象研究ノート, 第 217 号, 69-96
- 山根省三, 2002: 摂動の線型発展の理論, 気象研究ノート, 第 201 号, 21-71