

博士論文

惑星大気スーパーローテーションの力学に関する研究
—自転軸対称な理論モデルの構築と数値実験—

山本博基

京都大学大学院理学研究科
地球惑星科学専攻地球物理学分野

平成 24 年 3 月 26 日

要旨

惑星大気大循環の 1 形態である，自転を追い越す向きの惑星規模の高速東西風「スーパーローテーション」の力学を，理想化された自転軸対称な大気の基本方程式系をもとに，理論的・数値的に研究した．理論モデルを構築することで，スーパーローテーションの強度と力学的平衡状態を見積もり，広いパラメータ範囲で，その妥当性を数値実験で確かめた．

基礎方程式系として，自転軸対称なブシネスク流体のプリミティブ方程式系を用いた．放射による加熱・冷却は赤道対称なニュートン加熱・冷却で与え，非軸対称な擾乱による運動量輸送の東西平均効果は強い水平渦拡散として与えた．このような系では，子午面循環と水平拡散が角運動量を赤道上空に供給するため，スーパーローテーションが生成・維持される．この機構は，ギーラシメカニズムと呼ばれている．

この基礎方程式系に，風速と温位の分布と定常状態を仮定することで，惑星大気大循環を特徴づける 4 つの無次元量—スーパーローテーション強度 (S)，地表付近の南北風速を代表的風速としたロスビー数 (R_{vB})，大気上端の南北風速を代表的風速としたロスビー数 (R_{vT})，鉛直平均温位場の極・赤道間温位差の放射対流平衡温位場のそれに対する割合 (β)—を未知数とした連立 4 元代数方程式で記述される理論モデルを構築した．さらに，この連立方程式から， S に関する 5 次方程式を導出し，その唯一の正の解 (S_t) を，スーパーローテーション強度の理論の見積もりとした．

次に，基礎方程式系を十分な解像度で離散化した数値モデルを用いて，時間発展計算を行い，広いパラメータ範囲で，定常状態の数値解を得た．数値解から計算したスーパーローテーション強度 (S_n) を， S_t と比較したところ，その相対誤差は 50% 未満であった．これは外部条件によって S_n が 5 桁程変化していることに比べて非常に小さく， S_t がよい見積もりであることを示している．

さらに，理論モデルを調べることで，解の典型的な力学的平衡状態は，旋衡風平衡，地衡風平衡，水平拡散平衡，それぞれに対して，子午面循環による熱の移流が無視できる状態と無視できない状態があり，計 6 種類であることを明らかにした．これに，ギーラシメカニズムが働いていない直接循環の解を加えた，7 種の解の，パラメータ空間における分布を見積もり，再び数値実験でその妥当性を確認した．

最後に，水平拡散が弱い場合の解について調べた．まず，本研究の基本方程式系は，水平拡散がなければ，地球型ハドレー循環の理論モデル「ヘルド・ハウモデル」の基礎となった方程式系とほぼ同じになることを指摘した．そして，数値実験により，水平拡散が小さくなるにつれて，解の東西風速分布は，剛体回転に近く赤道にジェットをもつ分布から，中緯度にジェットをもつ分布に変わり，さらに水平拡散が無視できるほど小さくなると，ヘルド・ハウモデルの解に近い分布に変化していくことを示した．

目次

第1章	はじめに	9
1.1	スーパーローテーションの観測	10
1.1.1	金星	10
1.1.2	タイタン	12
1.2	スーパーローテーションのメカニズムに関する研究	14
1.2.1	夜昼間対流に着目する仮説	14
1.2.2	重力波に着目する仮説	15
1.2.3	子午面循環に着目する仮説	17
1.2.4	大気大循環モデルを用いた研究	19
1.3	松田の研究	20
1.3.1	展開に用いた基本モード	21
1.3.2	水平拡散が無限大の場合	21
1.3.3	水平拡散が有限の場合	24
1.4	本研究の目的	27
1.4.1	問題意識	27
1.4.2	目的	27
第2章	基礎方程式系	29
第3章	スーパーローテーション強度の理論的見積もり	33
3.1	理論モデルの構築	33
3.1.1	東西運動方程式	34
3.1.2	熱力学方程式	36
3.1.3	南北運動方程式	37
3.1.4	連立4元代数方程式	39
3.1.5	スーパーローテーション強度に関する5次方程式	39
3.2	理論モデルの解析	40

3.2.1	3 次方程式化	41
3.2.2	さらなる簡単化	41
3.2.3	力学的平衡状態	46
3.3	数値実験	47
3.3.1	数値モデルと実験設定	47
3.3.2	数値解	48
3.3.3	多重安定平衡状態	54
3.3.4	理論的見積もりとの比較	57
3.3.5	鉛直エクマン数依存性	62
3.4	考察	64
3.4.1	理論モデルを構築するために導入した仮定	64
3.4.2	子午面循環の構造の変化	67
3.4.3	静的不安定	69
3.4.4	Matsuda (1980) との比較	69
3.5	まとめ	74
3.6	補遺	76
3.6.1	5 次方程式 (3.34) に正の解は 1 つだけ存在することの証明	76
3.6.2	式 (3.40) の導出	78
第 4 章	力学的平衡状態にもとづく解の分類とそのパラメータ依存性	81
4.1	解型の定義	81
4.1.1	C1, C0, G1, G0, H1, H0 型解	82
4.1.2	D 型解	82
4.1.3	Matsuda (1980) との対応	83
4.2	解型のパラメータ依存性	83
4.2.1	CY, GY, HY 型解の境界	84
4.2.2	X1 と X0 型解の境界	84
4.2.3	D 型解の境界	85
4.2.4	レジームダイアグラム	85
4.3	数値実験	87
4.3.1	実験設定	87
4.3.2	数値解の解型分布	87
4.4	考察	94
4.4.1	多重安定平衡状態	94
4.4.2	理論レジームダイアグラムと異なる場合	95

4.5	まとめ	97
第5章	解の水平エクマン数依存性	99
5.1	ハドレー循環のヘルド・ハウモデルとの関係	99
5.2	Held and Hou (1980) の理論モデルと数値解	100
5.2.1	理論モデル	100
5.2.2	数値解	101
5.3	数値実験	103
5.3.1	実験設定	103
5.3.2	数値解	103
5.4	考察	108
5.4.1	ヘルド・ハウモデル解への変わり方	108
5.4.2	Yamamoto et al. (2009) との差異	111
5.5	まとめ	114
5.6	補遺—ハイドの定理	115
第6章	議論	117
6.1	惑星大気の理想化に用いた近似や仮定	117
6.1.1	プリミティブ運動方程式	117
6.1.2	ブシネスク近似	118
6.1.3	乾燥大気	118
6.1.4	地形なし	118
6.1.5	赤道対称なニュートン加熱・冷却	119
6.1.6	自転軸対称仮定	120
6.1.7	運動量の強い水平渦拡散	120
6.2	理論的・数値的結果の金星やタイタンへの応用	121
6.2.1	スーパーローテーション強度と力学的平衡状態の見積もり	122
6.2.2	数値解の水平エクマン数依存性と金星大気の東西風速分布の変動	122
6.2.3	多重安定平衡状態	122
6.3	惑星大気大循環論における位置づけ	123
第7章	本研究のまとめ	125
	基礎となった論文	131
	謝辞	133

付録 A	数値モデルの構築	135
A.1	数理モデル化	136
A.2	空間離散化	138
A.2.1	球面調和関数展開	139
A.2.2	鉛直格子配置	140
A.2.3	空間離散化した数理モデル	142
A.2.4	上下端境界条件	144
A.3	時間発展計算	145
A.4	水平拡散項	147
A.4.1	角運動量を保存する水平拡散項	147
A.4.2	水平拡散係数が大きい場合の数値計算法	148
A.5	自転軸対称 2 次元化	149
A.6	ソースコードの公開先	149
付録 B	図集	151

第 1 章

はじめに

惑星規模の大気の流れ「大気大循環」は惑星ごとに異なっている．たとえば地球では，低緯度で偏東風，中緯度で偏西風が卓越し，平均子午面循環はハドレー循環，フェレル循環，極循環からなる．火星では，夏半球で東風が，冬半球では西風が卓越し，数年から数十年に 1 度の頻度でグローバル・ダスト・ストームが発生する．木星では，東風と西風のジェットが交互に並んでいるなかに，巨大な渦である大赤斑が存在する．そして，金星と土星の衛星タイタンでは，「スーパーローテーション」と呼ばれる，自転を高速で追い越す風が吹いている．

このような惑星大気大循環の多様さは，惑星の自転周期や赤道半径などの惑星パラメータの多様さ (表 1.1) に依るところが大きい．そして，大気大循環を含めた，それぞれの惑星の気象を統一的に理解しようとする学問が，惑星気象学である．

惑星気象学はまだまだ発展途上の学問分野であり，解き明かすべき謎が山積している．なかでもスーパーローテーションのメカニズムは，惑星気象学の重要な謎の 1 つと考えられている．宇宙から見れば，地球大気の流れは，地球の自転に対して，せいぜい 1 割程度ずれているにすぎない．これは，大気がつねに地表面摩擦を受けているからである．それでは，金星やタイタンの大気では，地表面摩擦に抗してどのようなメカニズムで自転の何倍も速い東西風が維持されているのだろうか．これが，スーパーローテーションの謎である．

本章ではまず，金星とタイタンの大気東西風の観測結果を紹介する．次に，スーパーローテーションのメカニズムに関する，これまでの研究を概観する．その後，本研究と関連が深い，松田の研究 (Matsuda, 1980, 1982) の要点を述べる．最後に，本研究の目的について述べる．

表 1.1 太陽系の惑星およびタイタンの惑星パラメータ . (国立天文台, 2010; Sánchez-Lavega, 2010)

	自転周期 (地球日)	赤道半径 (km)	表面重力 (m/s^2)	赤道自転速度 (m/s)
水星	58.65	2440	3.72	3.02
金星	243.02	6052	8.90	1.81
地球	0.9973	6378	9.78	465
火星	1.0260	3397	3.72	241
木星	0.414	71492	23.18	12552
土星	0.444	60268	9.19	9866
天王星	0.718	25559	8.70	2587
海王星	0.671	24764	10.86	2683
タイタン	15.9	2575	1.35	11.8

1.1 スーパーローテーションの観測

地上から観測できる地球の大気に比べて、惑星大気の観測は非常に難しく、観測データも少ない。金星は、地球の隣の惑星ではあるものの、全球が硫酸のエアロゾルからなる雲で覆われているために、特に雲層 (高度約 45–65 km) より下の様子はよく分かっていない。タイタンは地球から遠く、近づいた探査機も少ないために、金星よりもさらに観測データが少ない。それでも、これまでに送られた探査機によって、断片的ではあるものの、惑星大気の貴重な観測データが得られてきた。本節では、金星とタイタンの大気の東西風の観測結果を紹介する。

1.1.1 金星

金星大気のスーパーローテーションは、1960 年代の Boyer らによる地上望遠鏡による紫外線観測 (Boyer and Camichel, 1961; Boyer and Guérin, 1969) で、その存在が示唆された。彼らは、紫外線で金星昼面を観測したときに見える横倒しの Y 字型をした雲の模様が、およそ 4 日 (地球日) で 1 周する速さで東から西へ伝播していることを発見した (図 1.1)。その後、旧ソ連の金星探査機ヴェネラシリーズ (Venera series, 1961–1984 年) および米国のパイオニア・ヴィーナス (Pioneer Venus, 1979 年) による直接観測により、様々な緯度やローカルタイム^{*1}において東風が高度 60 km 付近で 100 m/s に達することが明らかになった (図 1.2)。これは金星大気が地表面よりも約 55 倍高速で回転して

^{*1} 惑星の 1 太陽日を 24 時間に換算した地方時。太陽直下点が正午の地点になる。

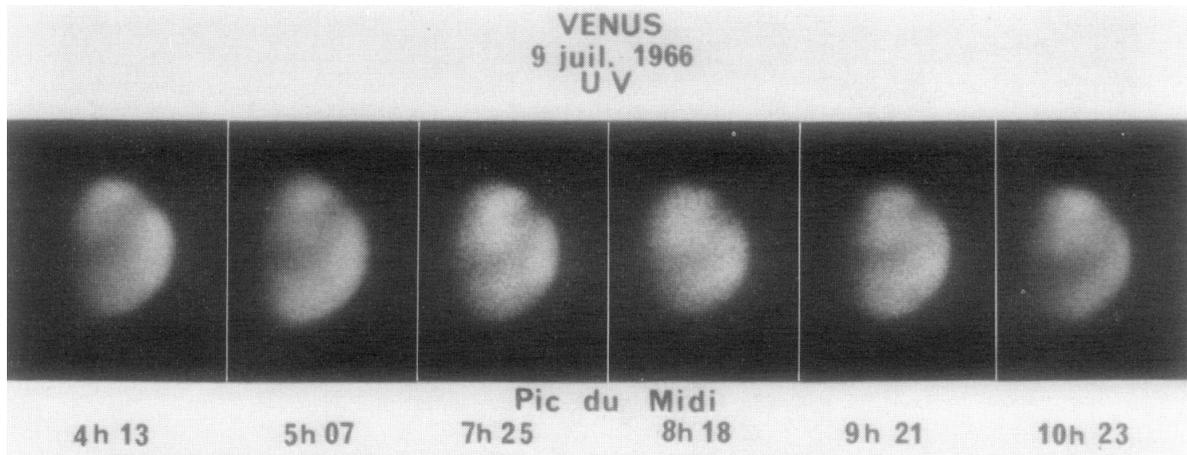


図 1.1 地上望遠鏡による金星の雲の紫外線観測 . (Boyer and Guérin, 1969)

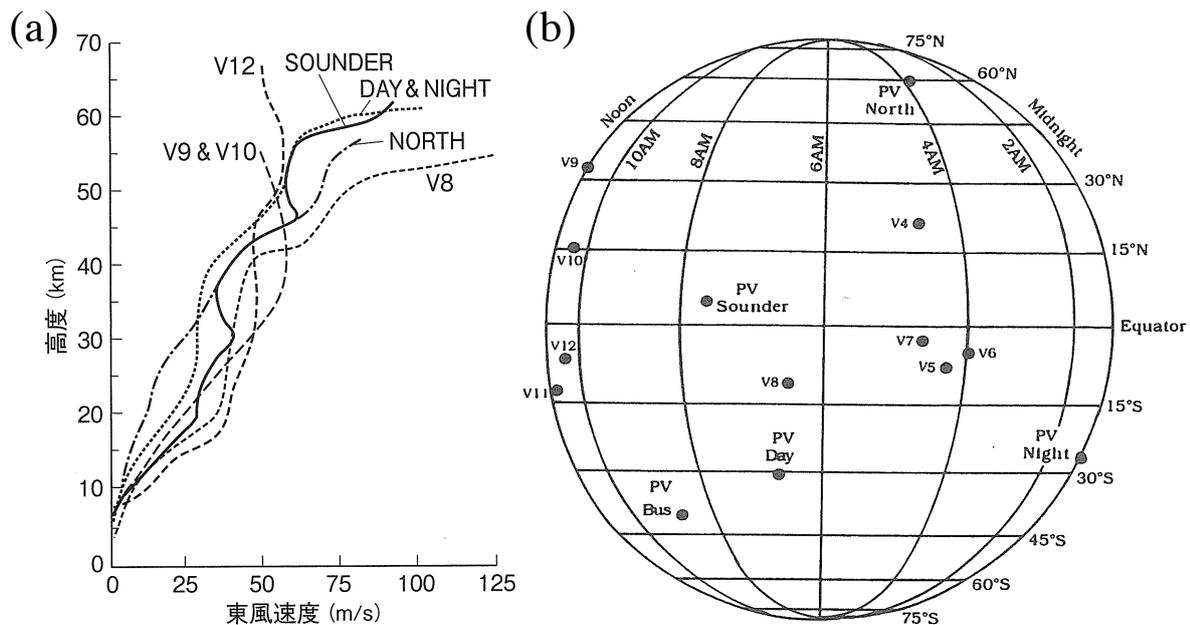


図 1.2 (a) 金星の東風の鉛直分布 (Schubert, 1983; 松田, 2011) と (b) 観測地点 (Gierasch et al., 1997) . V8 , V9 , V10 , V12 はそれぞれ, 旧ソ連の探査機ヴェネラ 8号, 9号, 10号, 12号による観測 . その他は米国のパイオニア・ヴィーナスの探査機による観測 .

いることを意味している。^{*2} また, 図 1.3 は雲追跡法で見積もられる雲層上部 (高度 65 km 付近) の昼面平均の東西風速分布を示している . 東西風速分布は, 剛体回転に近い分布 (1979 年) であつたり, 中緯度にジェットをもつ分布 (1982 年) であつたりと, 年々変

^{*2} 金星の自転は東から西に向かう回転である .

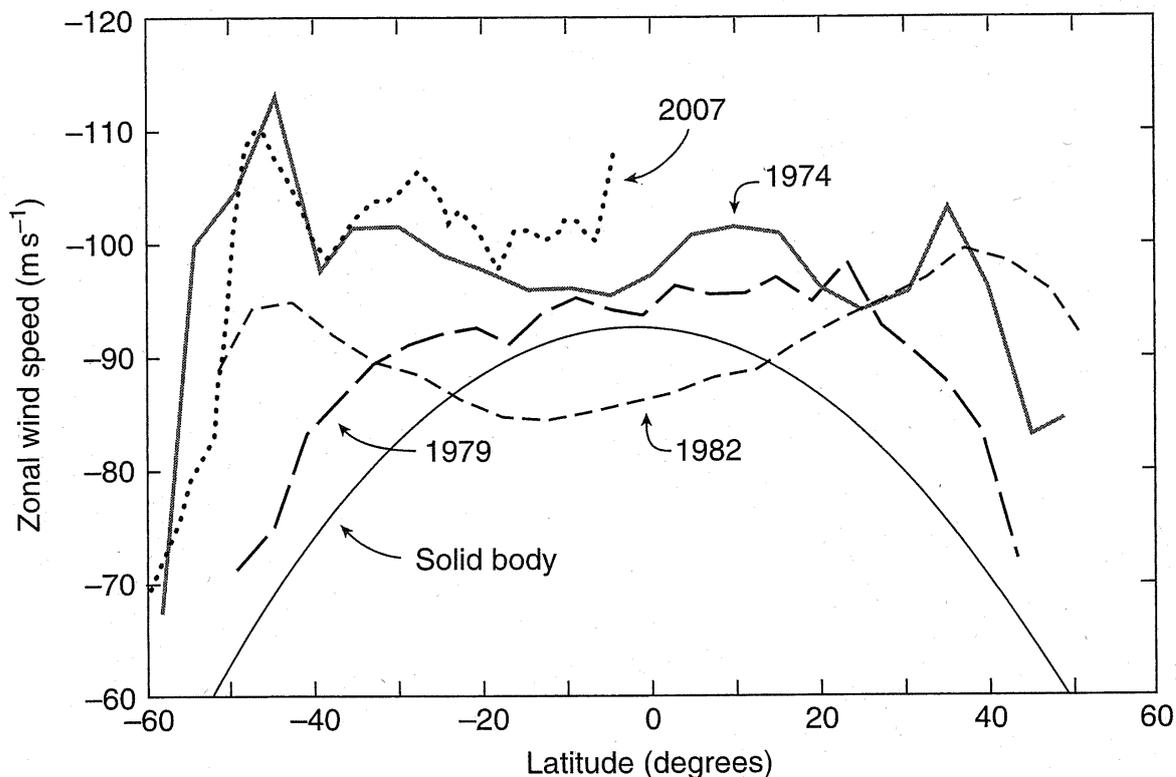


図 1.3 雲追跡法で見積もられた雲層上部 (高度 65 km 付近) の昼面平均東西風速。米国のマリナー 10 号 (Mariner 10, 1974 年), パイオニア・ヴィーナス (1979 年, 1982 年), および欧州宇宙機関のヴィーナス・エクスプレス (Venus Express, 2007 年) による観測。(Taylor, 2010, Fig. 8.8)

動している可能性が指摘されている。なお、金星大気東西風の観測データは、上述のいくつかの地点での鉛直分布と昼面雲層上部の緯度分布ぐらいしかなく、雲層より下の風速を含めた 3 次元的な風速分布はまったく観測されていない。

1.1.2 タイタン

タイタン大気のスーパーローテーションは、Sicardy et al. (1990) による、星の光の掩蔽観測によって初めて観測的に示唆された。その後 2005 年に、米国の土星探査機カッシーニ (Cassini) がタイタン大気に投下したホイヘンス (Huygens) をドップラー追跡することにより、東西風速の鉛直分布が得られた (図 1.4)。高度 120 km 付近で 100 m/s 程度の西風が観測されており、これはタイタン大気が自転速度の約 9 倍の速さで回転していることを意味する。なお、タイタン大気の東西風観測は、金星よりもさらに少なく、緯度分布などはまったく観測されていない。

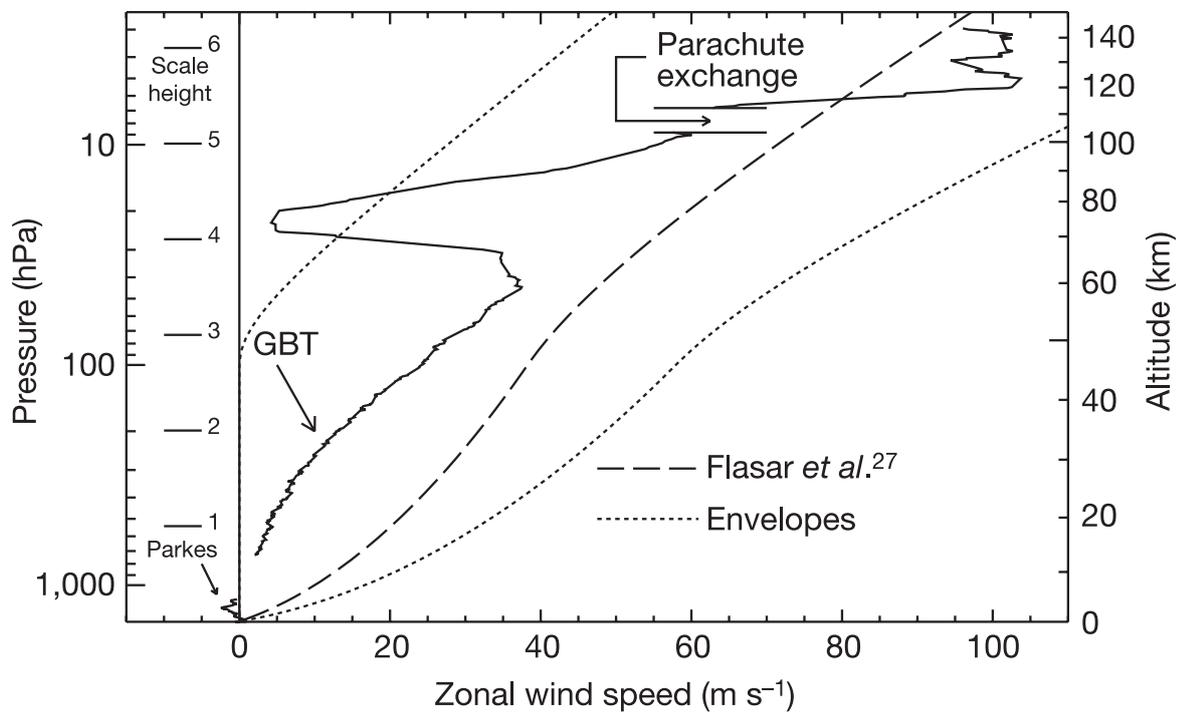


図 1.4 タイタン大気の東西風速の鉛直分布 (実線) . 米国の土星探査機カッシーニがタイタン大気に投下したホイヘンスのドップラー追跡による観測 . 破線は , 米国のヴォイジャー 2 号 (Voyger 2 , 1981 年) による気温の観測結果にもとに Flasar *et al.* (1997) が推定した風速であり , 点線はその誤差範囲 . (Bird *et al.*, 2005)

1.2 スーパーローテーションのメカニズムに関する研究

1960年代に金星大気のスーパーローテーションが発見されて以来、この特異な現象を説明する試みが始まり、さまざまな仮説が提案されてきた。これらは、大きく3つのグループに分けることができる。すなわち、

- 夜昼間対流に着目する仮説
- 重力波に着目する仮説
- 子午面循環に着目する仮説

の3つである。本節では、このグループ別に、スーパーローテーションのメカニズムに関する研究を紹介していき、最後に大気大循環モデル (General Circulation Model; 以後、GCM と呼ぶ) を用いた研究を紹介する。

1.2.1 夜昼間対流に着目する仮説

スーパーローテーションが発見される以前は、金星の大気大循環として、太陽直下点で上昇し、その反対側で下降する、夜昼間対流が予想されていた (図 1.5)。そのため、夜昼間対流を起点に、スーパーローテーションを説明する試みがなされた。夜昼間対流は、太陽直下点とその裏側の点を通る直線に対して軸対称なので、赤道上の鉛直断面で考える。仮に、太陽直下点がつねに同じ位置にあれば、夜昼間対流は直立するため運動量を輸送しない (図 1.6a)。もし、この対流が図 1.6b のように傾けば、経度方向に正の運動量が上方に輸送され、負の運動量が下方に輸送される。下方に輸送された負の運動量は、地表面を通して固体惑星に吸収される。結果として、上空に正の運動量が供給され続け、鉛直粘性

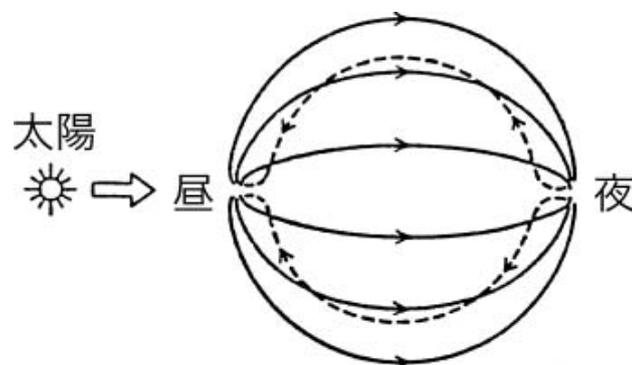


図 1.5 夜昼間対流の模式図。(松田, 2000)

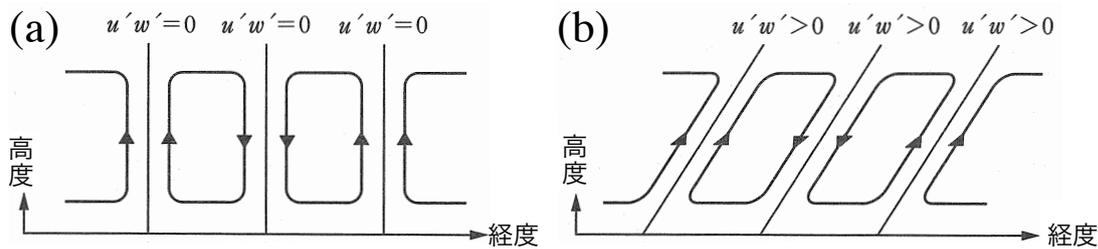


図 1.6 (a) 直立した夜昼間対流と (b) 傾いた夜昼間対流の模式図．(松田, 2000, 一部修正)

による減速効果とつり合う速さまで加速される．

Schubert and Whitehead (1969) は、放射による加熱と冷却は地面付近に集中しており、温度偏差は拡散的に上空に伝わっているために、夜昼間対流が傾くと考えた．つまり、金星の太陽直下点の移動にともない、高温（上昇流）域と低温（下降流）域も移動するが、温度偏差が上空に伝わるのに時間がかかるため、高度により高温・低温域がずれて、夜昼間対流が傾くと考えた．この場合、対流は金星から見える太陽の動きとは逆向きに、上空に向かって傾く．そして、上空は自転の向きに加速される．[図 1.6 で、右から左に太陽が動くときに (b) のように対流が傾く．] しかし、金星大気では放射による加熱は上空の雲層に集中しているため、対流の傾きが上の議論とは逆になり、上空は自転の逆向きに加速されると考えられる．

一方、Thompson (1970) は夜昼間対流が傾く原因を、対流自体の不安定性に求めている．つまり、対流が少しでも傾けば、上下にそれぞれ逆向きの水平運動量が輸送されて、平均流が鉛直シアーをもち、すると対流はますます傾くと考えた．これだと、上空で自転と逆向きの風が吹くこともあり得るが、実際には太陽の動きが影響して、上空では自転の向きの風が吹きやすいことを、Thompson (1970) は 2 次元の数値計算で示している．ところが、Takagi and Matsuda (1999, 2000) が球面上の 3 次元モデルで夜昼間対流の安定性を調べたところ、2 次元モデルでは不安定になる場合も、3 次元モデルでは安定であることが示された．

このように、スーパーローテーションが発見されて間もなく提案された夜昼間対流の傾きに着目した仮説は、現在では、少なくとも金星のスーパーローテーションのメカニズムとしては妥当でないと考えられている．

1.2.2 重力波に着目する仮説

重力波が励起され、鉛直に伝播し、つぶれることで平均流の運動量が増減することに着目してスーパーローテーションを説明しようという研究が数多くなされてきた．

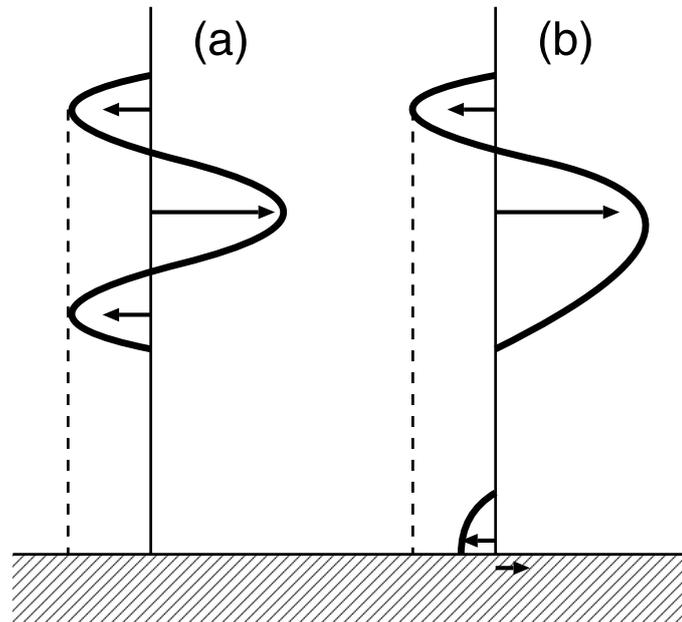


図 1.7 熱潮汐波による東西風の加速の模式図．(a) 地面まで伝播できない場合と (b) 地面まで伝播できる場合．破線は太陽加熱の位相速度を表す．(Takagi and Matsuda, 2007)

Fels and Lindzen (1974) は、金星の雲層が太陽光で加熱されることで励起される重力波、すなわち熱潮汐波が、上下に伝播することでスーパーローテーションが維持されている、とする仮説を提案した。熱潮汐波は、太陽の動きと同じ向きの位相速度をもつので、自転の逆向きの運動量を雲層からもち去る。その結果、雲層では自転向きの流れ、スーパーローテーションが形成される。Fels and Lindzen (1974) はこのような仮説を提案したが、彼らの計算では下方に伝播した熱潮汐波は、地面付近まで到達する前につぶれてしまっていた (図 1.7a)。その後、Leovy (1987) と Zhu (2006) は平均子午面循環による運動量の移流が、熱潮汐波が運ぶ運動量と打ち消し合うと考え、Fels and Lindzen (1974) の仮説を修正した。一方、Takagi and Matsuda (2005) は、現実的な金星大気の放射緩和時間の鉛直分布を用いて、熱潮汐波の伝播を計算し、下方に伝播した熱潮汐波が地表面付近まで到達することを示した (図 1.7b)。その後、GCM を用いた数値実験で、上のメカニズムによりスーパーローテーションが生成・維持されることが示された (Takagi and Matsuda, 2007)。

Hou and Farrell (1987) は大気下層の対流活動で励起された重力波が、上方に伝播して自転の向きの運動量を運ぶことでスーパーローテーションが維持されていると考えた。また、Young et al. (1994) は大規模地形で励起された定在重力波の伝播によって、スーパーローテーションが維持されている可能性を示した。

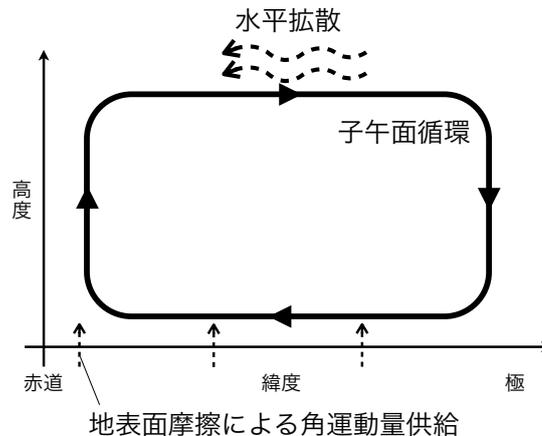


図 1.8 ギーラシメカニズムの模式図．

1.2.3 子午面循環に着目する仮説

現在のところ，金星大気の平均子午面循環の様子はよく分かっていないが，自転が遅い金星では，地球のように中高緯度で傾圧擾乱が発達しないために，赤道から極まで達する大きな循環が想像されている．そのような子午面循環によって，スーパーローテーションが維持されていると唱えたのが Gierasch (1975) であり，これはギーラシメカニズムと呼ばれている．Gierasch (1975) は，自転軸対称な 2 次元大気に無限大の水平渦拡散を仮定し，子午面循環で上空に運ばれた角運動量（自転の向きに正）が，水平拡散により赤道側に集められることで，スーパーローテーションが維持されると説明した（図 1.8）．ここで，水平拡散は，高度ごとに角運動量を保存したまま，東西風を剛体回転，つまり角速度一定の分布にするように働く．また，この水平拡散は，3 次元大気における非軸対称擾乱による角運動量輸送の効果を表すものとして導入されている．

ギーラシメカニズムによるスーパーローテーションの生成過程は，以下のように説明することができる．

- (1) まず，東西風速 u がどこでもゼロの大気に，赤道から極まで達する子午面循環を考える．このとき，角運動量 $M \equiv (u + a\Omega \cos \phi)a \cos \phi$ の分布は $M_R \equiv a^2\Omega \cos^2 \phi$ である（図 1.9a，破線）．ここで， a は惑星半径， Ω は自転角速度， ϕ は緯度を表す．
- (2) 水平拡散がなければ，自転軸対称な大気の空気塊は角運動量を保ちながら移流されるので，子午面循環の極向きの流れがある上空では，赤道上で $u = 0$ であった空気塊が $M = M_M \equiv a^2\Omega$ のまま極まで運ばれ，東西風は $u_M \equiv a\Omega \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi}$ の分布になる（図 1.9ab，細線）．このとき，子午面循環により下層大気から上空に角運動量が供給される．

- (3) 一方，赤道向きの流れがある地表付近では，極で $u = 0$ であった空気塊が， $M = M_0 \equiv 0$ のまま赤道まで運ばれ， u の分布は $u_0 \equiv -a\Omega \cos \phi$ になる (図 1.9cd, 細線)．しかし，地表面摩擦により地表付近ではすぐさま $u = u_R \equiv 0$ ， $M = M_R$ になる (図 1.9cd, 太線)．すなわち，地面から大気に角運動量が供給される．
- (4) ここに無限大の水平拡散が作用すると，上空では角運動量を保存しながら剛体回転になるので， M の分布は $M_\omega \equiv \frac{3}{2}a^2\Omega \cos^2 \phi$ に， u の分布は $u_\omega \equiv \frac{1}{2}a\Omega \cos \phi$ となり，赤道側に角運動量が集まる (図 1.9ab, 太線)．
- (5) 剛体回転場は極側で M が小さいため，子午面循環の下降流で上空から大気下層に運ばれる角運動量は，(2) で下層から供給された角運動量よりも少ない．そのため，角運動量が上空に貯まる．
- (6) (2)–(5) と同様の過程が繰り返されることで，上空の角運動量が大きくなる．やがて鉛直拡散で上空から失われる角運動量と，子午面循環で供給される角運動量がつり合うようになり，平衡状態に達する．

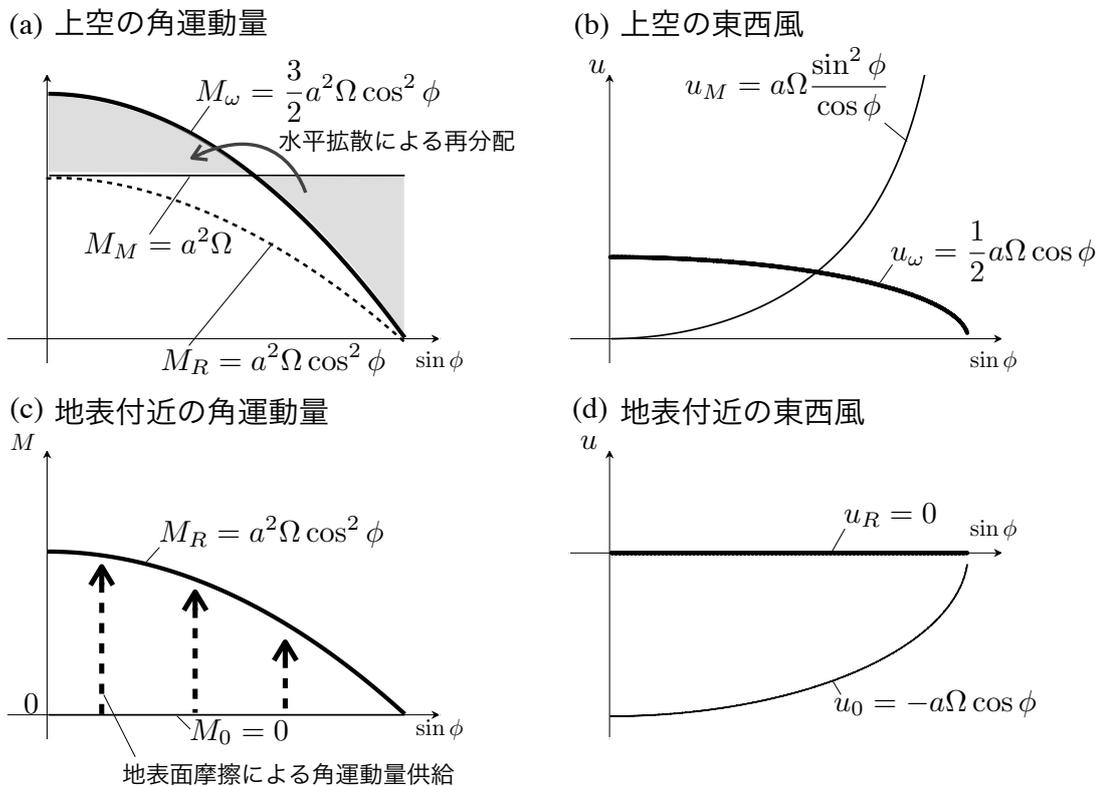


図 1.9 ギーラシメカニズムによる角運動量供給の模式図．(a) 上空の角運動量分布，(b) 上空の東西風速分布，(c) 地表付近の角運動量分布，(d) 地表付近の東西風速分布．

Gierasch (1975) はまた、実際にこのようなメカニズムでスーパーローテーションが生成・維持されるためには、

水平拡散の緩和時間が、子午面循環の循環時間よりも十分に短く、かつ鉛直拡散の緩和時間よりも十分に短いことが必要である

と主張している。

Gierasch (1975) は無限大の水平拡散を仮定していたが、この仮定を有限の水平拡散に緩和し、スーパーローテーションのパラメータ依存性を研究したのが Matsuda (1980, 1982) である (1.3 節で詳述)。なお、本研究では以後、子午面循環と(無限大に限定せず)強い水平拡散によるスーパーローテーションの生成・維持機構を「ギーラシメカニズム」と呼ぶ。

ギーラシメカニズムでは強い水平渦拡散が重要な役目を担っており、Gierasch (1975) 以後、金星大気でこの強い水平渦拡散、すなわち非軸対称擾乱による赤道向き角運動量輸送が存在しうるかどうかを調べる研究が行われてきた。Rossow and Williams (1979) は低速回転している球面上の2次元乱流の性質を調べ、順圧不安定が角運動量を赤道向きに輸送することを示した。Iga and Matsuda (2005) は球面上の浅水モデルを用いて、金星大気雲層で観測されている速度場のシアー不安定を調べ、ほとんどすべての成長モードで角運動量輸送が赤道向きであることを示した。また、Luz and Hourdin (2003) は浅水モデルを用いて、タイタン大気における順圧波動が、角運動量を赤道向きに輸送しうることを示している。

1.2.4 大気大循環モデルを用いた研究

GCM で金星の大気大循環を再現して、スーパーローテーションのメカニズムに迫ろうとする試みがなされてきた。Young and Pollack (1977) は、初めて GCM でスーパーローテーションを生み出すことに成功した。しかし、彼らのモデルは、水平方向に10個のモードしか含まれない低波数で切断されたスペクトルモデルであったり、十分に定常状態になるまで時間積分がなされていなかったなど、問題が多かった。Del Genio and Zhou (1996) は、地球用の GCM を転用して、自転を遅くして大気大循環を計算した結果、70 m/s 程度のスーパーローテーションを得ることに成功した。ただし、大気下端が1気圧であったり、東西一様な加熱を与えているなど、金星大気の再現としては非現実的であった。2000年代に入り、世界中の複数のグループで、金星用に調整された GCM を用いた数値実験でスーパーローテーションが得られるようになった (Yamamoto and Takahashi, 2003; Hollingsworth et al., 2007; Lee et al., 2007)。ただし、これらの GCM は、放射過程としてニュートン加熱・冷却を用いており、スーパーローテーションを実現

するために、予想されているよりも大きな加熱を与える必要があった。Lebonnois et al. (2010) は、金星用の高度な放射コードを開発して GCM に組み込み、スーパーローテーションの再現を試みた。しかし、モデル内の雲層より下の平均東西風は、観測されている東西風よりも大幅に弱かった。

このように、GCM による金星大気スーパーローテーションの研究が盛んになってきているが、十分に現実的な設定でスーパーローテーションを再現するには至っていない。困難さの原因は、モデル内で再現すべき大気現象の時間と空間のスケールの幅が非常に広いことにある。スーパーローテーションは 4 日で金星を 1 周し、熱潮汐波の周期は 100 日程度であり、金星大気の放射緩和時間は高度によって数日から数万日までの幅がある (Gierasch and Young, 2003)。空間スケールは、熱潮汐波や平均子午面循環が惑星規模なのに対して、雲の模様を形作る対流活動はより小規模である。何よりも、スーパーローテーションに重要な大気現象が特定されていないので、どれほど小さいスケールまで解像すればよいのか、はっきりしていない。

GCM を用いた研究のもう 1 つの問題が、計算結果の解釈である。モデル内の物理過程が複雑になるほど、計算された結果をもたらず物理を特定することが困難になる。今後、ますます複雑化していくであろう GCM の結果に妥当な解釈を与えていくためには、Hoskins (1983) や Held (2005) など主張されているような、複雑な GCM から理想化された単純な大気モデルまでを、バランスよく用いて研究を進める必要がある。

1.3 松田の研究

惑星大気を理想化した低自由度系で、ギラシメカニズムを研究したのが Matsuda (1980, 1982) である。Matsuda (1980) は、自転軸対称なブシネスク流体プリミティブ方程式系の 2 層モデルの、速度場と温度場を少数の基本モードに展開して、モード間の相互作用を陽に非線形項として表現したモード方程式系 (低自由度スペクトルモデル、あるいは、高度打ち切りモデルとも呼ばれる) を構築した。そして、このモード方程式系の、

- (1) 東西風速のパラメータ依存性
- (2) 解の支配的なモーメントバランス
- (3) 多重安定平衡解の存在範囲

を、水平拡散係数の大きさが無限大の場合と有限の場合について明らかにした。Matsuda (1982) は、これらの結果を、モード方程式系を 5 層に拡張した数値モデルの時間発展計算を行うことで、数値的に確かめた。

以下、Matsuda (1980) の要点を示していく。なお、本節で用いる変数を表す記号は Matsuda (1980) に合わせている。そのため、第 2 章以降の記号とは異なる意味をもつも

のもあるので注意してほしい。

1.3.1 展開に用いた基本モード

松田が2層モデルの速度場^{*3}と温度場の展開に用いた基本モードは、

- 剛体回転を表すモード： T_{1u}^0 (上層), T_{1l}^0 (下層)
- 差動回転を表すモード： T_{3u}^0 (上層), T_{3l}^0 (下層)
- 赤道から極まで達する子午面循環を表すモード： S_2^0
- 温度の平均鉛直勾配を表すモード： θ_0^0
- 南北温度差を表すモード： θ_2^0

である。ただし、 S_2^0 , θ_0^0 , θ_2^0 は2層の境界面で定義されている。また、定常解を考えているため $T_{1l}^0 = 0$ (大気と地面の正味の角運動量交換がゼロ) としている。上層の剛体回転モード T_{1u}^0 が平均東西風の強さを表すため、スーパーローテーションの指標になっている。また、差動回転モード T_{3u}^0 が大きければ、極側の東西風が強くなり、ギーラシメカニズムが阻害されるので、スーパーローテーションが発達しないことになる。ただし、水平拡散が無限大の場合には、東西風速場はつねに剛体回転なので、差動回転モード T_{3u}^0 , T_{3l}^0 は無視される。松田は、以上の基本モードからなるモード方程式系を作った [Matsuda (1980) 式 (2.1)–(2.5)(2層化前), 式 (3.1)–(3.3)(水平拡散が無限大の場合), および式 (4.2)–(4.5)(水平拡散が有限の場合)]。

1.3.2 水平拡散が無限大の場合

松田は、子午面循環による温度場の変化は無視できると仮定して、モード方程式系から平均東西風の強さ $U \equiv T_{1u}^0/R$ と外部パラメータの関係を表す以下の方程式を導いた (Matsuda, 1980, 式 3.15)。

$$\left(\frac{U}{R}\right)^2 + 2\Omega \left(\frac{U}{R}\right) + \Lambda_1 \left(\frac{U}{R}\right) + \Lambda_2 \left(\frac{U}{R}\right) = \tilde{Q} \quad (1.1a)$$

^{*3} ブシネスク近似により速度場 \mathbf{v} は非発散であるため、 \mathbf{v} はトロイダルポテンシャル T とポロイダルポテンシャル S を用いて、 $\mathbf{v} = \nabla \times T\mathbf{k} + \nabla \times \nabla \times S\mathbf{k}$ と書ける。ただし、 \mathbf{k} は鉛直成分の単位ベクトルを表す。自転軸対称性と赤道対称性を考慮すると T と S はルジャンドル陪関数 P_n^m を用いて次のように展開できる。

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n+1}^0 P_{2n+1}^0(\sin \phi), \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+2}^0 P_{2n+2}^0(\sin \phi)$$

ただし，

$$\Lambda_1 = \frac{5}{2} \frac{\nu^2}{H^4 \Omega}, \quad \Lambda_2 = \frac{5}{2} \frac{\alpha g \Gamma \nu}{c R^2 \Omega}, \quad \tilde{Q} = \frac{3}{2} \frac{\alpha g |Q_2^0| H}{c R^2} \quad (1.1b)$$

であり， R は惑星半径， Ω は自転角速度， ν は鉛直拡散係数， H は上層の高度， α は熱膨張係数， g は重力加速度， Γ は平均鉛直温度勾配， c はニュートン冷却係数， Q_2^0 は外部加熱の南北差を表す．方程式 (1.1a) は， U 以外は外部パラメータなので， U のパラメータ依存性を表している．

式 (1.1a) は子午面内のモーメントのバランスを表している．左辺第1項は遠心力，第2項はコリオリ力，第3項は子午面循環にかかる鉛直拡散によるモーメントを表し，左辺第4項は成層の効果，右辺は南北温度差によるモーメントを表している．[左辺第3項は，平均的な南北風の強さ V と U の関係式 $U/V = 3\Omega H^2/(5\nu)$ (Matsuda, 1980, 式 3.10) を用いて U で書かれている．] 松田は，式 (1.1a) の左辺で卓越する項により，解を以下の3つに分類した．

- 金星型温度風バランス (V)：遠心力によるモーメントが卓越
- 地球型温度風バランス (E)：コリオリ力によるモーメントが卓越
- 直接循環バランス (D)：子午面循環にかかる鉛直拡散によるモーメントが卓越

さらに，松田は 鉛直拡散の緩和時間 (H^2/ν) と放射緩和時間 ($1/c$) が等しい場合 について， U とモーメントバランスの， τ_Ω/τ_d と G_r に対する依存性を求めた (図 1.10, 1.11)．ただし， $\tau_\Omega \equiv 2\pi/\Omega$ ， $\tau_d \equiv H^2/\nu = 1/c$ であり， G_r は以下で定義される．

$$G_r \equiv \frac{\alpha g |Q_2^0| (H^2/\nu) H^3}{\nu^2} \left(\frac{H}{R} \right)^2 \quad (1.2)$$

いま， $H^2/\nu = 1/c$ なので， $|Q_2^0|(H^2/\nu) = |Q_2^0|/c$ は南北加熱差と見なすことができ， G_r を，鉛直拡散に対する南北加熱差の大きさを表す無次元数であるグラシヨフ数に H/R の2乗をかけた無次元量と見なすことができる． G_r を用いると，式 (1.1a) の \tilde{Q} は，次のように書かれる．

$$\tilde{Q} = \frac{3}{2} \frac{H^6}{\nu^3 c} G_r \quad (1.3)$$

水平拡散が無限大の場合， G_r が大きいほど， U は大きくなっている (図 1.10)．すなわち，南北加熱差が大きいほど，スーパーローテーションが強くなっている． G_r を固定すれば， U は， τ_Ω/τ_d のある値で最大となる．これは， τ_Ω/τ_d は鉛直拡散の大きさに比例する量だからである．また，スーパーローテーションが強くなるのは，モーメントバランスが金星型温度風バランスのときである (図 1.10, 1.11)．

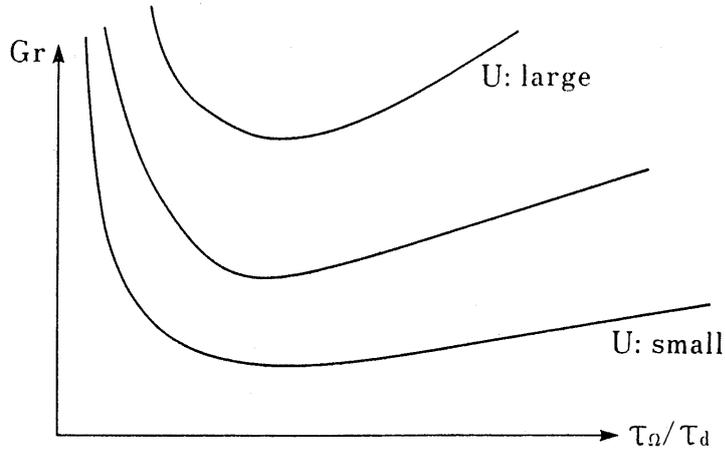


図 1.10 上層の東西風速 U の τ_Ω/τ_d と Gr に対する依存性．水平拡散が無限大の場合．(Matsuda, 1980, Fig. 3)

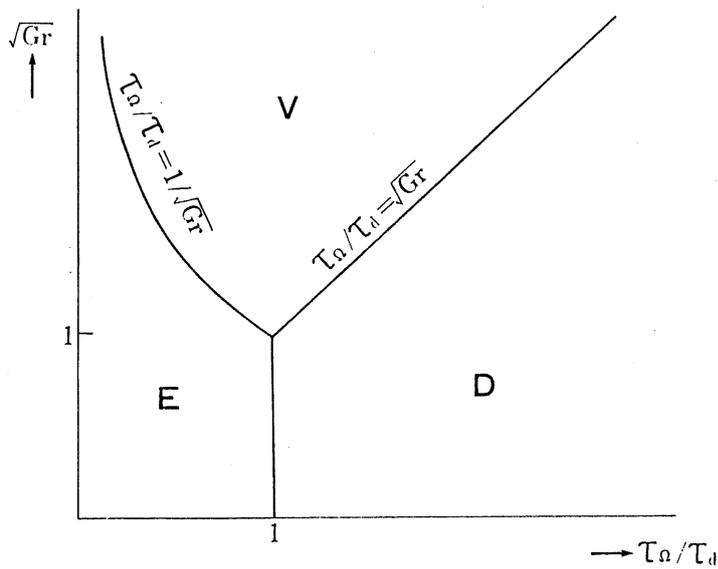


図 1.11 解のモーメントバランスの τ_Ω/τ_d と Gr に対する依存性．水平拡散が無限大の場合．V は金星型温度風バランス，E は地球型温度風バランス，D は直接循環バランスを表す．(Matsuda, 1980, Fig. 2)

1.3.3 水平拡散が有限の場合

無限大の場合と同様に，子午面循環による温度場の変化は無視できると仮定して，松田は，モード方程式系から子午面内のモーメントのバランスを表す次式を導いた (Matsuda, 1980, 式 4.17) .

$$\left(\frac{U}{R}\right)^2 + 2\Omega \left(\frac{U}{R}\right) + \frac{3}{2} \frac{\nu^2}{\delta H^4} \sigma + \frac{3}{2} \frac{\alpha g \Gamma \nu}{\delta c H^2} \sigma + \frac{24}{7} \left(\frac{U}{R}\right) \left(\frac{T_{3u}^0}{R^2}\right) + 12 \left(\frac{\bar{T}_3^0}{R^2}\right) \left(\frac{T_3^{0'}}{R^2}\right) = \tilde{Q} \quad (1.4a)$$

ただし，

$$\sigma \equiv -\frac{S_2^0}{\nu_H H}, \quad \delta \equiv \frac{R^2}{\nu_H} \frac{\nu}{H^2}, \quad \bar{T}_3^0 \equiv \frac{1}{2}(T_{3u}^0 + T_{3l}^0), \quad T_3^{0'} \equiv T_{3u}^0 - T_{3l}^0 \quad (1.4b)$$

であり， ν_H は水平拡散係数である．ここで，式 (1.4a) の左辺第 5 項は T_{1u}^0 モードと T_{3u}^0 モードの相互作用を表す非線形項であり，第 6 項は T_{3u}^0 モードと T_{3l}^0 モードの相互作用を表す非線形項である．これ以外の項は，式 (1.1a) と同様である． U , \bar{T}_3^0 , $T_3^{0'}$ は σ の関数として以下のように書かれる (Matsuda, 1980, 式 4.6–4.8) .

$$U = R\Omega \frac{\frac{3}{5}\sigma - \frac{96}{7}\sigma^3}{\delta + \frac{108}{35}\sigma^2 + \frac{432}{35}\sigma^3} \quad (1.4c)$$

$$\bar{T}_3^0 = R^2\Omega \frac{\frac{4}{5}\gamma\delta^2\sigma + \frac{6}{5}\sigma^2 + \frac{24}{5}\sigma^3}{\delta + \frac{108}{35}\sigma^2 + \frac{432}{35}\sigma^3} \quad (1.4d)$$

$$T_3^{0'} = R^2\Omega \frac{\frac{16}{5}\delta\sigma + \frac{12}{5}\sigma^2 + \frac{96}{7}\sigma^3}{\delta + \frac{108}{35}\sigma^2 + \frac{432}{35}\sigma^3} \quad (1.4e)$$

ただし，

$$\gamma = 2 \frac{H}{T_{3l}^0} \left. \frac{\partial T_3^0}{\partial z} \right|_{\text{下端境界}} \quad (1.4f)$$

である．松田も，Gierasch と同様に，実際にギーラシメカニズムが働いてスーパーローテーションになるためには，水平拡散の緩和時間は，鉛直拡散のそれより短い必要があると考えた．ゆえに，松田は $\delta \ll 1$ の場合に限定して，方程式 (1.4) を解析している．

松田は，式 (1.4c) を用いて，上層の平均東西風速 U は子午面循環の強さを表す σ が $\sqrt{105\delta}/18$ のときに最大となることを示した (図 1.12) . これは，水平拡散係数を有限の大きさに緩和したため，子午面循環が強くなると，差動回転モードによるギーラシメカニズムの障害効果が大きくなるためである．

次に松田は，再び 鉛直拡散の緩和時間 (H^2/ν) と放射緩和時間 ($1/c$) が等しい場合 について，式 (1.4a) の左辺第 1, 2, 3 項の大きさの σ に対する依存性を調べることで，解

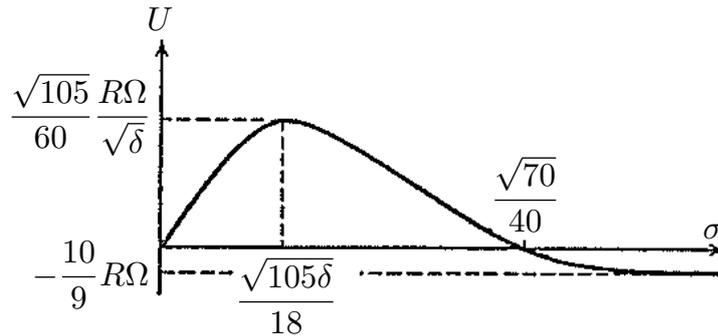


図 1.12 上層の東西風速 U の σ に対する依存性．水平拡散が有限の場合．(Matsuda, 1980, Fig. 5; 一部修正)

のモーメントバランスを求めた (図 1.13) . その結果 , 外部パラメータが適当な範囲内の値 (たとえば , 図 1.13 で α_2 で表される値) のときには , 同一の外部条件に対して , 3 つの平衡解が存在することが明らかになった . ただし , 3 つの解のうち , 高速東西風をもつ解 (V 型解) と子午面循環が強い解 (D 型解) は安定であるが , 両者の中間の解は不安定である (Matsuda, 1982) . 松田は , V 型解がスーパーローテーションの状態に対応し , D 型解は実際の 3 次元大気においては , 夜昼間対流に対応すると考えた .

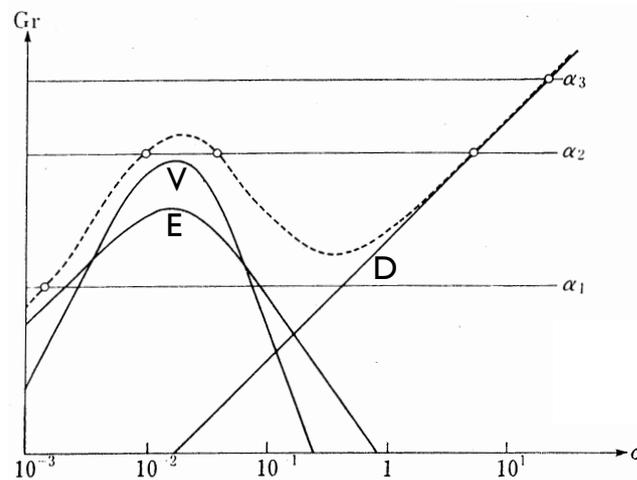


図 1.13 方程式 (1.4a) の左辺第 1 項 (V) , 第 2 項 (E) , 第 3 項 (D) と左辺全体 (破線) , それぞれの大きさの σ 依存性 . 式 (1.4a) の右辺 (水平線) の大きさに依存して , 左辺の卓越項と解 (破線と水平線の交点) の数が変化している . (Matsuda, 1980, Fig. 6a; 一部修正)

松田は , 上記の手法を外部条件を変えながら繰り返すことで , 解のモーメントバランスの τ_Ω/τ_d と G_r に対する依存性を求めた (図 1.14) . 水平拡散が無限大の場合 (図 1.11)

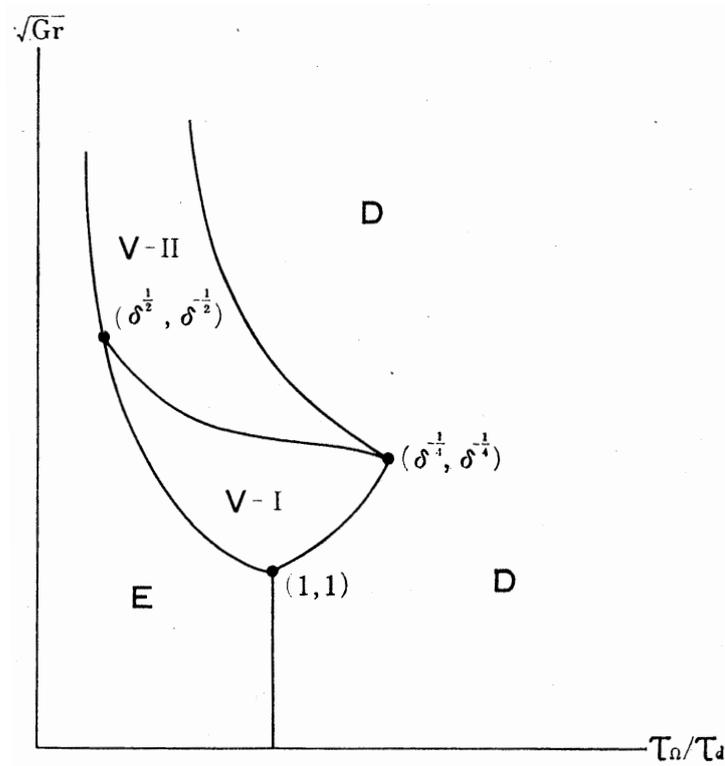


図 1.14 解のモーメントバランスの τ_{Ω}/τ_d と G_r に対する依存性．水平拡散係数が有限の大きさの場合．V-I は金星型温度風バランスの解のみが存在するパラメータ領域，V-II は金星型温度風バランスの解と直接循環バランスの解が共に安定平衡解として存在する領域を表す．E は地球型温度風バランス，D は直接循環バランスを表す．(Matsuda, 1980, Fig. 9)

と比べると，右上の領域 (τ_{Ω}/τ_d と G_r が大きい領域) が V から D に変わっており，スーパーローテーションになるパラメータ領域が小さくなっている．

1.4 本研究の目的

1.4.1 問題意識

本章冒頭で述べたように、惑星大気スーパーローテーションのメカニズムは、惑星気象学における重要な問題である。金星大気のスーパローテーションが発見された1960年代以降、様々な仮説が提案され、研究されてきたにも関わらず、未だ解明されていない。その主な原因は、観測データが限られていることにある。

この状況を打破するために、2010年5月21日に、我が国初の金星探査機「あかつき」が打ち上げられた。あかつきは、3台の赤外カメラと1台の紫外カメラで、複数の高度の雲の動きを同時に観測し、金星の風速分布を3次元的に推定する予定であった(Nakamura et al., 2007, 2011)。ところが、同年12月7日の金星周回軌道への投入に失敗し、金星を追い越して太陽を周回する軌道に入ってしまった。現在は、2015年の金星再会合時の金星周回軌道への投入が検討されている。

現代気象学では、観測、理論、そして様々な複雑さの階層の数値モデルによる研究が、相互に影響を与えることが必要だと言われている(たとえば、Hoskins, 1983; Held, 2005)。しかしながら、上述のように、地球から遠く離れた惑星の大気観測には、いまでも技術的困難がともなう。そのため、限られた観測機会を最大限に活かすためにも、理論的・数値的研究を強化する必要がある。

1.4.2 目的

そこで本研究では、スーパーローテーションのメカニズムとして現在でも有力な仮説の1つである、ギラシメカニズムに対する理解を深めることを目的とする。ギラシメカニズムにもとづくスーパーローテーションの性質は、1.3節で紹介したMatsuda (1980)によって調べられている。しかし、松田の研究には、

- 子午面循環による温度場の変化を無視していた
- モード間の相互作用を陽に扱っていたため、代数的に複雑になった
- 十分な自由度の数値モデルを用いた、理論的見積もりの検証が行われなかった^{*4}

といった問題点がある。これらの問題点を克服するために、本研究では、

- (1) 子午面循環による温度場の変化を内部変数として扱い、
- (2) 速度場や温度場の空間分布を仮定したうえで、惑星大気大循環を特徴づける無次元

^{*4} 無論、当時の計算機資源を考えれば、仕方のないことではある。

量の関係式 (連立代数方程式) を導き, 無次元量のパラメータ依存性や解の力学的平衡状態を代数的に求め,

- (3) 十分な自由度の数値モデルを用いた数値実験により, 理論的見積もりの妥当性を検証する.

さらに, ギーラシメカニズムに必要な強い水平拡散を弱めた場合の, 解の振る舞いを明らかにする.

本研究で用いる, 理論的手法 (2) は偏微分方程式を解くことを避け, 変数の空間分布を適当な三角関数で仮定し, その大きさにのみ着目するものである. 対して, 数値的手法 (3) は, 元の無限自由度の偏微分方程式の解を, 十分な解像度で離散化した数値モデルを用いて求めるものである. 一方, 松田のモード方程式系では, 東西風速として剛体回転モードと差動回転モードの2モードのみを許し, それらの相互作用も含めて偏微分方程式を陽に解いていた. すなわち, 本研究の理論的手法と数値的手法, 松田の手法は, 空間自由度に関して,

本研究の理論的手法 < 松田の手法 << 本研究の数値的手法

という関係が成り立っている.

本論文の構成は次のようになっている. まず, 第2章で本研究で扱う基礎方程式系を示す. つづいて第3章では, 上述の理論的手法でスーパーローテーション強度を求めたうえで, その妥当性を数値的手法で確かめる. 第4章では, 力学的平衡状態をもとに解を分類し, そのパラメータ依存性を調べる. 第5章では, ギーラシメカニズムに必要な強い水平拡散を, 弱めたときの解を調べる. 第6章では, 本研究で用いた近似や仮定, 本研究の理論的・数値的結果について議論する. 最後に, 本研究のまとめを第7章で述べる.

第 2 章

基礎方程式系

本研究では、以下の近似や仮定で理想化された球面上の大気の基本方程式系を用いる。

- プリミティブ運動方程式：次の 3 つの近似を含む運動方程式
 - 静力学平衡近似：鉛直方向には重力と気圧傾度力が釣り合っている
 - 浅い大気の近似：大気の厚さは惑星半径に比べて十分に小さい
 - 伝統的な近似：鉛直風にとまなうコリオリ項とメトリック項を無視する
- ブシネスク近似：浮力項以外では大気の密度変化を無視する
- 乾燥大気：凝結物質を考慮しない
- 地形なし：大気下端の地表面の起伏を考慮しない
- 赤道対称なニュートン加熱・冷却：放射による加熱・冷却を、ある放射対流平衡温度場からの差に比例する形で与える
- 自転軸対称仮定：東西方向に一様
- 運動量の強い水平渦拡散：非軸対称な擾乱による運動量輸送の東西平均効果を、分子拡散と同様に定式化した水平渦拡散で表す（本研究では、運動量のみ輸送する非軸対称擾乱を仮定し、熱の水平拡散は考慮しない）

なお、実際の惑星大気に対する上記の近似や仮定の妥当性に関しては、6.1 節で議論する。

基礎方程式系は，以下のように書かれる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = \nu_H D_H(u) + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_H D_H(v) + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta - \Theta_0}{\Theta_0} \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (2.1d)$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1e)$$

ただし，

$$D_H(u) \equiv \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2} \quad (2.2a)$$

$$D_H(v) \equiv \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2} \quad (2.2b)$$

である．従属変数 u, v, w はそれぞれ東西，南北，鉛直方向の風速成分であり， θ は温位である．変数 Φ は $\Phi \equiv p'/\rho_0$ で定義される．ただし， p' は圧力擾乱， ρ_0 は基準密度（定数）である．独立変数 ϕ, z, t はそれぞれ緯度，高度，時間を表す．定数 a は惑星半径， Ω は自転角速度， g は重力加速度である． ν_H と ν_V はそれぞれ運動量の水平と鉛直の渦拡散係数であり， κ_V は鉛直熱拡散係数である． τ はニュートン加熱・冷却の緩和時定数であり， Θ_0 は基準温位である．水平拡散項 $D_H(u), D_H(v)$ は [Becker \(2001\)](#) にしたがって，角運動量を保存する形で定義されている．放射対流平衡温位 θ_e は，ルジャンドル多項式の $P_2(\sin \phi) = (3 \sin^2 \phi - 1)/2$ をもとに，

$$\theta_e \equiv \Theta_0 \left[1 - \Delta_H \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (2.3)$$

で与えられる．ただし， Δ_H は θ_e の極・赤道間温位差の Θ_0 に対する割合を表す．また， θ_e の全球平均値は Θ_0 である．

上端 ($z = H$) の境界条件は，自由滑り，質量の流出入なし，および断熱である．

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{上端：} z = H) \quad (2.4)$$

下端 ($z = 0$) の境界条件は，粘着，質量の流出入なし，および断熱である．

$$u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{下端：} z = 0) \quad (2.5)$$

外部強制であるニュートン加熱・冷却の基準となる放射対流平衡温位場 (2.3) が赤道対称なので、駆動される大気の運動も、赤道対称になる。よって、側方境界条件は、赤道 ($\phi = 0$) および極 ($\phi = \pi/2$) にて質量と運動量の流出入なし、および断熱となる。

$$v = \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial w}{\partial \phi} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \left(\text{赤道} : \phi = 0, \text{極} : \phi = \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.6)$$

基礎方程式系 (2.1)–(2.6) は、これまでに様々な惑星大気大循環の研究に用いられてきた。Matsuda (1980, 1982) は、この方程式系の従属変数を少数のモードに展開することで低自由度スペクトルモデルを構築して、金星のスーパーローテーションのパラメータ依存性を調べている (参照：1.3 節)。Held and Hou (1980) は、方程式系 (2.1)–(2.6) から水平拡散項を取り除き、下端粘着条件を線形摩擦条件に変えた方程式系をもとに、地球のハドレー循環の理論モデルを構築している。^{*1} この理論モデルはヘルド・ハウモデルと呼ばれている。Williams (2003) は、地表面摩擦や大気安定度、自転角速度などを変えた数値実験を行い、地球と木星の大気大循環を調べている。

^{*1} ただし、静力学平衡の式の表記は、Held and Hou (1980) の式 (1) と本研究の式 (2.1a) で異なっている。これは、Held and Hou (1980) では $\Phi \equiv [p' - P(z)]/\rho_0$ [$P(z)$ は圧力の基本場] と定義されているからである。

第 3 章

スーパーローテーション強度の理論的見積もり

本章では、第 2 章で記述した基礎方程式系 (2.1)–(2.6) をもとに、理論モデルを構築することでスーパーローテーション強度の理論的見積もりを求める。理論モデルは、惑星大気大循環を特徴づける 4 つの無次元量を未知数とした連立 4 元代数方程式の形で表され、その解がスーパーローテーション強度の見積もりとなる。また、理論モデルを解析することで、典型的な力学的平衡状態のパラメータ依存性を調べる。その後、基礎方程式系 (2.1)–(2.6) を十分な解像度で離散化した数値モデルで時間発展計算を行い、解の平衡状態を数値的に求め、理論的見積もりの妥当性を確認する。

3.1 理論モデルの構築

本研究で用いる惑星大気大循環を特徴づける 4 つの無次元量は、

$$S \equiv \frac{U}{a\Omega}, \quad R_{vB} \equiv \frac{V_B}{a\Omega}, \quad R_{vT} \equiv \frac{V_T}{a\Omega}, \quad \beta \equiv \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0\Delta_H} \quad (3.1)$$

である。ここで、 S はスーパーローテーション強度を表し、 U は大気上端での東西風の代表的な強さを表す。 R_{vB} と R_{vT} はそれぞれ、地表付近と大気上端での南北風の代表的な強さ V_B と V_T を用いて表されるロスビー数である。^{*1} そして、 β は鉛直平均した極・赤道間温位差 $\Delta\Theta$ の放射対流平衡温位場の極・赤道間温位差 $\Theta_0\Delta_H$ に対する割合である。^{*2} 以下、定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) の仮定のもとで、東西運動方程式 (2.1a)、熱力学方程式 (2.1d)、南北運動方程式 (2.1b) から、4 つの無次元量 (3.1) の関係式を 4 つ導いていく。

^{*1} 普通、ロスビー数は着目する現象の代表的な流速で定義され、自転効果に対する非線形効果の強さを表す。しかし、本研究では自転速度 ($a\Omega$) で無次元化した南北風の代表的な強さとして用いる。

^{*2} 本研究では、 β はコリオリパラメータの緯度に対する変化率 (ベータ項) ではないことに注意。

3.1.1 東西運動方程式

まずは, S と R_{vB} の関係式と, S と R_{vT} の関係式を導く. 単位質量あたりの絶対角運動量 $M \equiv (u + a\Omega \cos \phi)a \cos \phi$ を用いれば, 式 (2.1a) は,

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (vM \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (wM) = \nu_H D_H(u) a \cos \phi + \nu_V \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \quad (3.2)$$

と書き直せる. これを赤道 ($\phi = 0$) から極 ($\phi = \pi/2$) まで緯度積分すれば,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial z} (wM) \cos \phi d\phi = \nu_V \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \cos \phi d\phi \quad (3.3)$$

が得られる. ここで, 水平拡散項は M を南北方向に再分配するだけで, 角運動量を生成させたり消滅させたりはしないので, $\int_0^{\pi/2} D_H(u) \cos^2 \phi d\phi = 0$ である. また, 側方境界条件 (2.6) の $v(0, z) = v(\pi/2, z) = 0$ から, 式 (3.2) の第1項の積分はゼロになる. 式 (3.3) を $z = 0$ から $z = H$ まで鉛直積分すれば,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\partial M}{\partial z} \Big|_{z=0} \cos \phi d\phi = 0 \quad (3.4)$$

が得られる. ここでは, 鉛直境界条件 (2.4) と (2.5) の $w(\phi, 0) = w(\phi, H) = \partial u / \partial z|_{z=H} = 0$ を用いた. 式 (3.4) は, 地表面を通した角運動量の出入りが全球平均でゼロになることを表している.

いま, 相対角運動量 $M_r(\phi, z) \equiv u(\phi, z)a \cos \phi$ の緯度積分を,

$$M_0(z) \equiv \int_0^{\pi/2} M_r(\phi, z) \cos \phi d\phi \quad (3.5)$$

で表すことにする. すると, 式 (3.4) および鉛直境界条件 $\partial u / \partial z|_{z=H} = u(\phi, 0) = 0$ から, $M_0(z)$ に関する境界条件が得られる.

$$\frac{\partial M_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial M_0}{\partial z} \Big|_{z=H} = M_0(0) = 0 \quad (3.6)$$

この境界条件を考慮すれば, $M_0(z)$ は一般性を失うことなく, 次のように三角関数で展開できる.

$$M_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(2m+1)\pi z}{H} \right] \right\} \quad (3.7)$$

ただし, b_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) は展開係数である. いま, $m = 0$ のモードが卓越すると考えて, $M_0(z)$ を次のように仮定する.

$$M_0(z) \approx \frac{Ua}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi z}{H} \right) \right] \quad (3.8)$$

ただし, U は上端での東西風 $u(\phi, H)$ の代表的な強さを表す.

ここで, 式 (3.3) を地表付近 $z = h \approx 0$ において考える. ただし, $z = h$ では $u \approx 0$, $M_r \approx 0$, $w \approx 0$ だとする. すると, $z = h$ における式 (3.3) の左辺は,

$$\begin{aligned} [z = h \text{ における式 (3.3) の左辺}] &= \int_0^{\pi/2} \left(M \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=h} \cos \phi d\phi \\ &\approx a^2 \Omega \int_0^{\pi/2} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=h} \cos^3 \phi d\phi \\ &= -a \Omega \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \phi} [v(\phi, h) \cos \phi] \cos^2 \phi d\phi \quad (3.9) \end{aligned}$$

となる. 3 行目への式変形には連続の式 (2.1e) を利用した. ここで, 赤道で上昇した大気が極で下降する 1 つの大きな構造の子午面循環を仮定し, その地表付近の赤道向きの流れが,

$$\boxed{v(\phi, h) \approx -V_B \sin 2\phi} \quad (3.10)$$

で表されるとする. ただし, V_B は地表付近の南北風の代表的な強さである. 式 (3.10) を式 (3.9) に代入すれば,

$$\text{式 (3.9)} \approx \frac{8}{15} a \Omega V_B \quad (3.11)$$

となる. 一方, $z = h$ における式 (3.3) の右辺は,

$$\begin{aligned} [z = h \text{ における式 (3.3) の右辺}] &= \nu_V \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^2 M_r}{\partial z^2} \Big|_{z=h} \cos \phi d\phi \\ &= \nu_V \frac{\partial^2 M_0}{\partial z^2} \Big|_{z=h} \\ &\approx \nu_V \frac{U a \pi^2}{2H^2} \quad (3.12) \end{aligned}$$

と書ける. よって, 式 (3.11) と (3.12) から, 次の関係式が得られる.

$$\frac{8}{15} a \Omega V_B \approx \nu_V \frac{U a \pi^2}{2H^2} \quad (3.13)$$

この関係式は, 単位時間あたりの大気・固体惑星間の正味の角運動量の収支がつり合っていることを表している. 右辺は鉛直拡散によって大気が失う角運動量を表しており, 左辺は地面付近を移流されることによって大気を得る角運動量^{*3}を表している. 式 (3.13) の両辺を $a^2 \Omega^2$ で割れば, 以下の S と R_{vB} の関係式が得られる (簡単のため, $16/15 \approx 1$ とする).

^{*3} $z = h$ では地表面摩擦の影響でどの緯度でも $u \approx 0$ なので, 空気塊は地表付近 $z = h$ を極から赤道まで流される間に, $a^2 \Omega$ の角運動量を得る. 空気塊が極から赤道まで流されるのにかかる時間は a/V_B なので, 単位時間あたりに得る角運動量は $a^2 \Omega / (a/V_B) = a \Omega V_B$ となる.

$$R_{vB} \approx \pi^2 E_V S \quad (3.14)$$

ただし, $R_{vB} = V_B/(a\Omega)$, $S = U/(a\Omega)$ であり, $E_V \equiv \nu_V/(H^2\Omega)$ は鉛直エクマン数^{*4}である. この関係式 (3.14) は, 地表付近の南北風の強さ (R_{vB}) は大気上端の東西風の強さ (S) に比例することを表している.

次に, 大気上端 ($z = H$) で式 (3.3) を考える. ただし, $z = H$ で東西風と南北風はそれぞれ,

$$u(\phi, H) \approx \frac{3U}{2} \cos \phi, \quad v(\phi, H) \approx V_T \sin 2\phi \quad (3.15)$$

で書かれると仮定する. V_T は大気上端の南北風の代表的な強さである. 式 (3.13) を得たときと同様の操作を行えば, 以下の関係式が得られる.

$$-\frac{8}{15} \left(\frac{3}{2}U + a\Omega \right) V_T \approx -\nu_V \frac{Ua\pi^2}{2H^2} \quad (3.16)$$

両辺を $a^2\Omega^2$ で割って整理すれば (簡単のため, $16/15 \approx 1$, $3/2 \approx 1$ とする),

$$R_{vT} \approx \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right) \quad (3.17)$$

となる. ただし, $R_{vT} = V_T/(a\Omega)$ である. この関係式 (3.17) は, 大気上端の南北風の強さ (R_{vT}) は $S \ll 1$ ならば S に比例して増加するが, $S \gg 1$ ならば $\pi^2 E_V$ に漸近することを表している.

3.1.2 熱力学方程式

つづいて, R_{vB} と R_{vT} , β の関係式を導く. 定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) を仮定した熱力学方程式 (2.1d) は, 連続の式 (2.1e) を用いることで, 以下のようにフラックス形式で書き直せる.

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) = -\frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (3.18)$$

式 (3.18) を $z = 0$ から $z = H$ まで鉛直積分して, 両辺を H で割ると,

$$\frac{1}{aH \cos \phi} \int_0^H \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) dz = -\frac{1}{H} \int_0^H \frac{\theta - \theta_e}{\tau} dz \quad (3.19)$$

が得られる. ただし, 鉛直境界条件 (2.4) と (2.5) を利用している. 定常状態の仮定から, θ の全球平均値は, θ_e の全球平均値 Θ_0 に等しくなければならない. いま, 鉛直平均温位

*4 自転効果に対する鉛直拡散の強さを表す無次元数.

$\bar{\theta}(\phi)$ の緯度依存性は θ_e のそれと同様であると仮定する．すなわち，

$$\bar{\theta}(\phi) \equiv \frac{1}{H} \int_0^H \theta(\phi, z) dz \approx \Theta_0 - \Delta\Theta \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \quad (3.20)$$

と仮定する．ただし， $\Delta\Theta$ は鉛直平均温位の極・赤道間の差である．式 (2.3) と (3.20) を式 (3.19) に代入すれば，

$$\frac{1}{aH \cos \phi} \int_0^H \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) dz \approx -\frac{\Theta_0 \Delta_H - \Delta\Theta}{\tau} \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \quad (3.21)$$

が得られる．式 (3.21) の左辺は熱の南北移流が大気柱にもたらす正味の加熱・冷却を表しているので，左辺の代表的な大きさは $\Delta\Theta$ と南北風の強さにおおよそ比例している．式 (3.21) の両辺の大きさを考えれば，次の関係式が得られる．

$$\frac{\Delta\Theta(V_T + V_B)}{2a} \sim \frac{\Theta_0 \Delta_H - \Delta\Theta}{\tau} \quad (3.22)$$

ただし，南北風の強さとして $(V_T + V_B)/2$ を用いている．式 (3.22) の両辺を $\Delta\Theta\Omega$ で割れば，

$$\frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} \sim \frac{1}{\tau\Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (3.23)$$

という関係式が得られる．ただし， $\beta = \Delta\Theta/(\Theta_0 \Delta_H)$ である．

3.1.3 南北運動方程式

最後に，南北方向の力のつり合いを表す S ， R_{vB} ， R_{vT} ， β の関係式を導く．定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) のもとで $z = H$ での式 (2.1b) から $z = h$ での式 (2.1b) を差し引く．

$$\begin{aligned} & \frac{v(H)}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} \Big|_{z=H} - \frac{v(h)}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} \Big|_{z=h} + \frac{[u(H)^2 - u(h)^2] \tan \phi}{a} + 2\Omega[u(H) - u(h)] \sin \phi \\ & = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \Big|_{z=H} - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \Big|_{z=h} \right) + \nu_H \{ D_H[v(H)] - D_H[v(h)] \} \\ & \quad + \nu_V \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=H} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=h} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

読みやすさのため，ここでは $u(\phi, z)$ と $v(\phi, z)$ のなかの ϕ は省略している．右辺第 1 項を評価するために，静力学平衡の式 (2.1c) を緯度微分してから， $z = 0$ から $z = H$ まで鉛直積分したものを考える．

$$\int_0^H \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial z} dz = \frac{g}{\Theta_0} \int_0^H \frac{\partial \theta}{\partial \phi} dz \quad (3.25)$$

式 (3.20) を利用すれば，式 (3.25) の積分は，

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right|_{z=H} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right|_{z=0} \approx -\frac{2gH\Delta\Theta}{\Theta_0} \sin \phi \cos \phi \quad (3.26)$$

と計算される．式 (3.26) において $\partial\Phi/\partial\phi|_{z=0} \approx \partial\Phi/\partial\phi|_{z=h}$ と近似したものと， $u(H) \sim U$ ， $u(h) \sim 0$ ， $v(H) \sim V_T$ ，そして $v(h) \sim V_B$ という大気上端と地表付近での東西風，南北風の強さをを用いれば，式 (3.24) の各項の大きさに関する以下の関係式が得られる．

$$\frac{V_T^2 - V_B^2}{a} + \frac{U^2}{a} + 2\Omega U \sim \frac{2gH\Delta\Theta}{a\Theta_0} - 20\frac{\nu_H(V_T + V_B)}{a^2} + O\left(\nu_V \frac{V_T + V_B}{H^2}\right) \quad (3.27)$$

ここで，右辺第2項の係数 $-20/a^2$ は， $v(\phi, H) \approx V_T \sin 2\phi$ と $v(\phi, h) \approx -V_B \sin 2\phi$ が仮定されているために出てきた係数である．すなわち， $v = \sin 2\phi$ を式 (2.2b) に代入すれば， $D_H(v) = -20/a^2$ が得られるためである．また， v の鉛直構造は与えられていないので，鉛直拡散項の正負の符号は考慮せずに大きさのみを記している（右辺第3項）．関係式 (3.27) の両辺を $a\Omega^2$ で割れば，以下の関係式が得られる．

$$(R_{vT}^2 - R_{vB}^2) + S^2 + 2S \sim 2\beta R_T - 20E_H(R_{vT} + R_{vB}) + O[E_V(R_{vT} + R_{vB})] \quad (3.28)$$

ただし， $R_T \equiv gH\Delta_H/(a^2\Omega^2)$ は外部熱ロスビー数^{*5}であり， $E_H \equiv \nu_H/(a^2\Omega)$ は水平エクマン数^{*6}である．

ここで，Gierasch (1975) や Matsuda (1980) は，ギーラシメカニズムが働くためには，水平拡散の緩和時間が子午面循環の循環時間よりも十分に短く，かつ鉛直拡散の緩和時間よりも十分に短いことが必要である，と主張していたことを思い出してほしい（参照：1.2.3 節，1.3.3 節）．この条件を無次元数で表せば，

$$E_H \gg R_{vB} \quad \text{かつ} \quad E_H \gg E_V \quad (3.29)$$

となる．ここで，式 (3.14) と (3.17) より $R_{vB}^{-1} < R_{vT}^{-1}$ なので，子午面循環の無次元循環時間の逆数として R_{vB} を用いている．本節では，条件 (3.29) が満たされて，ギーラシメカニズムが働く前提で理論モデルを構築する．不等式 (3.29) の両辺に $(R_{vT} + R_{vB})$ をかければ，以下の不等式が得られる．

$$E_H(R_{vT} + R_{vB}) \gg R_{vB}(R_{vT} + R_{vB}) > |R_{vT}^2 - R_{vB}^2| \quad (3.30)$$

かつ

$$E_H(R_{vT} + R_{vB}) \gg E_V(R_{vT} + R_{vB}) \quad (3.31)$$

*5 自転効果に対する南北加熱差の大きさを表す無次元数．分子 ($gH\Delta_H$) よりも分母 ($a^2\Omega^2$) の方が惑星ごとの違いが大きいと考えられるため，自転効果の目安として使われる． R_T が大きいほど自転効果が小さい．

*6 自転効果に対する水平拡散の強さを表す無次元数．

不等式 (3.30) は，関係式 (3.28) において，水平拡散項 $E_H(R_{vT} + R_{vB})$ に比べて移流項 $(R_{vT}^2 - R_{vB}^2)$ は無視できることを表し，不等式 (3.31) は鉛直拡散項 $O[E_V(R_{vT} + R_{vB})]$ が無視できることを表している．すなわち，関係式 (3.28) は，

$$S^2 + 2S \sim 2\beta R_T - 20E_H(R_{vT} + R_{vB}) \quad (3.32)$$

と近似される．ここで，左辺第1項はメトリック項，第2項はコリオリ項，右辺第1項は気圧傾度力項，第2項は水平拡散項の大きさを，それぞれ表している．

3.1.4 連立4元代数方程式

いま，4つの関係式 (3.14)，(3.17)，(3.23)，(3.32) を1組の連立代数方程式だと考える．すなわち，4つの関係式を，惑星大気大循環を特徴づける無次元量 S ， R_{vB} ， R_{vT} ， β を4つ未知数とする，連立4元代数方程式だとみなす．

理論モデル：連立4元代数方程式

$$R_{vB} = \pi^2 E_V S \quad (3.33a)$$

$$R_{vT} = \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right) \quad (3.33b)$$

$$\frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} = \frac{1}{\tau\Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (3.33c)$$

$$S^2 + 2S = 2\beta R_T - 20E_H(R_{vT} + R_{vB}) \quad (3.33d)$$

すると，この連立方程式の解は，3.1.1節から3.1.3節で与えた仮定のもとでの，惑星大気大循環の特徴を表していると期待される．

3.1.5 スーパーローテーション強度に関する5次方程式

連立方程式 (3.33) から R_{vB} ， R_{vT} ， β を消去すると，スーパーローテーション強度 S に関する5次方程式が得られる．

S の5次方程式

$$\left[S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right] \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right] = 2R_T \quad (3.34)$$

ただし， $A \equiv \pi^2 \tau \Omega E_V$ ， $B \equiv 20\pi^2 E_H E_V$ ，および R_T は，外部パラメータからなる正定数である． A は， $\pi^2 \tau (H^2/\nu_V)^{-1}$ とも書けるので，鉛直拡散の緩和時間 (H^2/ν_V) に対する，ニュートン加熱・冷却の緩和時間 (τ) の割合に比例するパラメータである．また， B は， $5[2\pi\Omega^{-1} \sqrt{(a^2/\nu_H)^{-1} (H^2/\nu_V)^{-1}}]^2$ とも書けるので，水平拡散と鉛直拡散の緩和時

間の幾何平均 $[\sqrt{(a^2/\nu_H)(H^2/\nu_V)}]$ に対する，自転周期 $(2\pi\Omega^{-1})$ の割合の2乗に比例するパラメータである．

5次方程式 (3.34) には， A, B, R_T の値に関わらず，正の解は1つだけ存在する（証明は3.6.1節を参照）．他の解は，（虚部がゼロではない）複素数解または負の実数解である．いま，複素数解は物理的に意味をもたない．一方，負の解は，東西風が自転の逆向きに吹いていることを意味する．この場合，式 (3.33a) と (3.33b) から R_{vB} と R_{vT} が負になる．すなわち，子午面循環は極で上昇し，赤道で下降する循環になる．さらに，式 (3.33c) から $\beta > 1$ すなわち $\Delta\theta > \theta_0\Delta_H$ （極・赤道間温位差が放射対流平衡温位場のそれよりも大きい），あるいは $\beta < 0$ すなわち $\Delta\theta < 0$ （極が赤道よりも暖かい）となることが分かる．このような状況は非現実的であるため，本研究では，5次方程式 (3.34) の正の解にのみ注目する．

S の5次方程式 (3.34) の係数が A, B, R_T の3つのパラメータで書かれているので，その解が陽に依存するパラメータは， A, B, R_T のみである．ところが， R_{vB} と S の関係式 (3.33a) と R_{vT} と S の関係式 (3.33b) は E_V を含むので， R_{vB} と R_{vT} は， A, B, R_T に加えて E_V にも陽に依存する．一方， β と S の関係式は式 (3.33a) と (3.33b) を式 (3.33c) に代入することで得られる．

$$\beta = \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (3.35)$$

このように， β と S の関係式は A のみで記述できるため， β が陽に依存するパラメータは， S と同じく A, B, R_T のみである．

3.2 理論モデルの解析

前節で，ギラシメカニズムにもとづくスーパーローテーションの理論モデルとして， S に関する5次方程式 (3.34) を導いた．その解は，ニュートン法などの数値解法により簡単に求めることができるものの，代数的（解析的）に解を求めることはできない^{*7}．そこで，本節では5次方程式 (3.34) を3次方程式に近似して，その解析解を求める．その後，外部パラメータ A や B などの大小関係が顕著な場合に妥当な近似解と，そのときの南北方向の力のつり合いにもとづく力学的平衡状態を求める．

^{*7} 一般に，代数的に解けるのは4次方程式までである（日本数学会，2007）．

3.2.1 3次方程式化

本研究では $S > 0$ なので，以下の不等式が成り立つ．

$$1 < \left(\frac{2+S}{1+S} \right) < 2 \quad (3.36)$$

そこで， $(2+S)/(1+S)$ を定数 C で近似する．すると，5次方程式 (3.34) は以下の3次方程式に近似される．

$$(S^2 + 2S + BCS) \left(\frac{ACS}{2} + 1 \right) \approx 2R_T \quad (3.37)$$

展開して整理すると，

$$\frac{AC}{2}S^3 + \left(1 + AC + \frac{ABC^2}{2} \right) S^2 + (2 + BC)S \approx 2R_T \quad (3.38)$$

となる． A, B, C, R_T はすべて正定数なので，3次方程式 (3.38) にも正の解は1つだけ存在する．

いま，5次方程式 (3.34) の正の解を S_t で表し， $C = 1$ としたときの3次方程式 (3.38) の正の解を $S_{C=1}$ ， $C = 2$ としたときの解を $S_{C=2}$ で表す．図 3.1 に $A = 1, B = 10$ のときの S_t (実線)， $S_{C=1}$ (破線)， $S_{C=2}$ (点線) の R_T 依存性を示す．ここで， S_t はニュートン法で数値的に求め， $S_{C=1}$ と $S_{C=2}$ はカルダノの公式^{*8}で代数的に求めている．図 3.1 の水平線は $S = 1$ を示しており， $S \gg 1$ ならば $S_t \approx S_{C=1}$ ， $S \ll 1$ ならば $S_t \approx S_{C=2}$ である．

3.2.2 さらに簡単化

カルダノの公式で得られる解析解は式が複雑なため，解のパラメータ依存性を見いだすことは困難である．そこで，3次方程式 (3.38) の左辺3項のうち，1つが卓越し，右辺

^{*8} カルダノ (Cardano) の公式 (日本数学会, 2007) ．

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) の解は，

$$x = m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}, \quad \omega m^{\frac{1}{3}} + \omega^2 n^{\frac{1}{3}}, \quad \omega^2 m^{\frac{1}{3}} + \omega n^{\frac{1}{3}}$$

ただし， ω は1の立方根 $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ で (i は虚数単位) ，

$$m \equiv \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}, \quad n \equiv \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}$$

$$p \equiv \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad q \equiv \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

である．

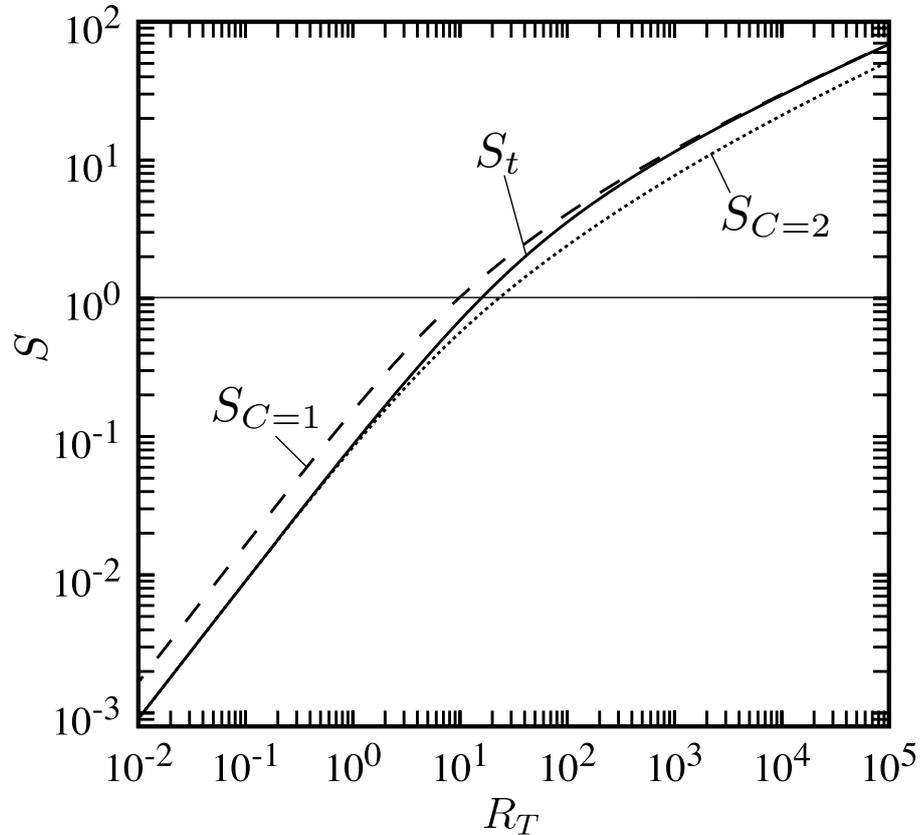


図 3.1 5 次方程式 (3.34) の正の解 (S_t , 実線), $C = 1$ としたときの 3 次方程式 (3.38) の正の解 ($S_{C=1}$, 破線), $C = 2$ としたときの 3 次方程式 (3.38) の正の解 ($S_{C=2}$, 点線) の R_T (横軸) 依存性. 他のパラメータは $A = 1, B = 10$ である. S_t はニュートン法で数値的に求め, $S_{C=1}$ と $S_{C=2}$ はカルダノの公式で代数的に求めている. 水平な線は $S = 1$ を示す.

($2R_T$) とつり合う場合に妥当な近似解を求める. すなわち, 3 次方程式 (3.38) 左辺の S^i (S の i 乗) の項が卓越すると仮定し,

$$\text{式 (3.38) 左辺の } S^i \text{ の項} \approx 2R_T$$

を $i = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ計算し, S について解いて得られる近似解 S_i を求める. すると, 以下の近似解が得られる.

$$S_1 \equiv \frac{2R_T}{2 + BC}, \quad S_2 \equiv \sqrt{\frac{2R_T}{1 + AC + 0.5ABC^2}}, \quad S_3 \equiv \left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.39)$$

ただし, S^i の項が他の 2 項よりも卓越するとした仮定が妥当であるためには, S_i を S に代入して評価した他の 2 項が, $2R_T$ よりも十分に小さくなくてはならない. 逆に, S_i で評価した他の 2 項が $2R_T$ よりも十分に小さい場合に, 近似解 S_i が妥当だと言える. すな

わち,

$$S_t \approx \begin{cases} S_1 & (R_T \ll R_{T1}) \\ S_2 & (R_{T1} \ll R_T \ll R_{T2}) \\ S_3 & (R_{T2} \ll R_T) \end{cases} \quad (3.40a)$$

ただし,

$$R_{T1} \equiv \frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)}, \quad R_{T2} \equiv \frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2} \quad (3.40b)$$

である [式 (3.40) の導出は 3.6.2 節を参照] .

上の近似解 (3.39), (3.40) は, カルダノの公式で得られる解析解よりも簡単な式である. また, S_t の R_T 依存性が, R_T が増加するにつれて $S_t \propto R_T$ から $S_t \propto \sqrt{R_T}$ へ, そして $S_t \propto R_T^{1/3}$ へと変化することを示している. しかし, 式 (3.39), (3.40) は解の力学的平衡状態を調べるには依然として複雑である.

そこで, 今度は A, B, AB と 1 の大小関係が顕著な場合を考えることで, S_1, S_2, R_{T1}, R_{T2} の近似式を求める. まず, S_1 の分母と R_{T1} の分子はそれぞれ, $(2 + BC)$ とその 2 乗であることに着目する. いま, $C \sim 1$ なので, B と 1 の大小関係が顕著な場合,

$$(2 + BC) \approx \begin{cases} 2 & (B \ll 1) \\ BC & (B \gg 1) \end{cases}$$

と近似できる. 次に, S_2 と R_{T1} の分母および R_{T2} の分子は $(1 + AC + 0.5ABC^2)$ を含んでいることに着目する. $B \ll 1$ のときは, つねに $A \gg AB$ なので,

$$(1 + AC + 0.5ABC^2) \approx \begin{cases} 1 & (A \ll 1) \\ AC & (A \gg 1) \end{cases}$$

の近似が成り立つ. 一方, $B \gg 1$ のときは, つねに $A \ll AB$ なので,

$$(1 + AC + 0.5ABC^2) \approx \begin{cases} 1 & (AB \ll 1) \\ 0.5ABC^2 & (AB \gg 1) \end{cases}$$

の近似が成り立つ. 以上より, 次の 4 通りの場合,

$$B \ll 1, \quad \begin{cases} A \ll 1 & \dots & (a) \\ A \gg 1 & \dots & (b) \end{cases}$$

$$B \gg 1, \quad \begin{cases} AB \ll 1 & \dots & (c) \\ AB \gg 1 & \dots & (d) \end{cases}$$

には S_1, S_2, R_{T1}, R_{T2} は表 3.1 に示す式で近似できる. 角括弧内に記した記号 (C1, C0, G1, G0, H1, H0) は次小節で述べる, 力学的平衡状態の種類を表す.

図 3.2 は (a) $A = 10^{-2}, B = 10^{-2}$, (b) $A = 10^2, B = 10^{-2}$, (c) $A = 10^{-3}, B = 10^2$, (d) $A = 10^2, B = 10$ の各場合の, 5 次方程式 (3.34) の正の解 S_t (実線) と表 3.1 で与えられる簡単な近似式 (破線) の, R_T に対する依存性を示している. ここで, $C = 2$ とした

表 3.1 近似解 (3.39), (3.40) のより簡単な近似式と力学的平衡状態 (角括弧内の記号). ただし, $A = \pi^2 \tau \Omega E_V$, $B = 20\pi^2 E_H E_V$ である. また, $S \gg 1$ ならば $C = 1$ が, $S \ll 1$ ならば $C = 2$ が, よりよい近似を与える.

	B	$A (AB)$	S_1	S_2	S_3	R_{T1}	R_{T2}
(a)	$B \ll 1$	$A \ll 1$	R_T [G1]	$\sqrt{2R_T}$ [C1]	$\left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$ [C0]	2	$\frac{2}{A^2 C^2}$
(b)		$A \gg 1$		$\sqrt{\frac{2R_T}{AC}}$ [G0]		$\frac{2}{AC}$	$2AC$
(c)	$B \gg 1$	$AB \ll 1$	$\frac{2R_T}{BC}$ [H1]	$\sqrt{2R_T}$ [C1]		$\frac{B^2 C^2}{2}$	$\frac{2}{A^2 C^2}$
(d)		$AB \gg 1$		$\sqrt{\frac{4R_T}{ABC^2}}$ [H0]		$\frac{B}{A}$	$\frac{AB^3 C^4}{4}$

ときに $S_i \leq 1$ ならば $C = 2$ で計算し, $S_i > 1$ ならば $C = 1$ で計算している. また, 近似式から得られる $S_1(R_{T1})$ と $S_2(R_{T2})$ の値も示されている. S_t (実線) の R_T 依存性は, 近似解 (3.39) が示すように R_T が増加するにつれて, $S_t \propto R_T$ から $S_t \propto \sqrt{R_T}$ へ, そして $S_t \propto R_T^{1/3}$ へと変化している. さらに, 表 3.1 で与えられる簡単な近似式 (破線) は $R_T = R_{T1}, R_{T2}$ の近くを除けば, S_t のよい近似になっている.

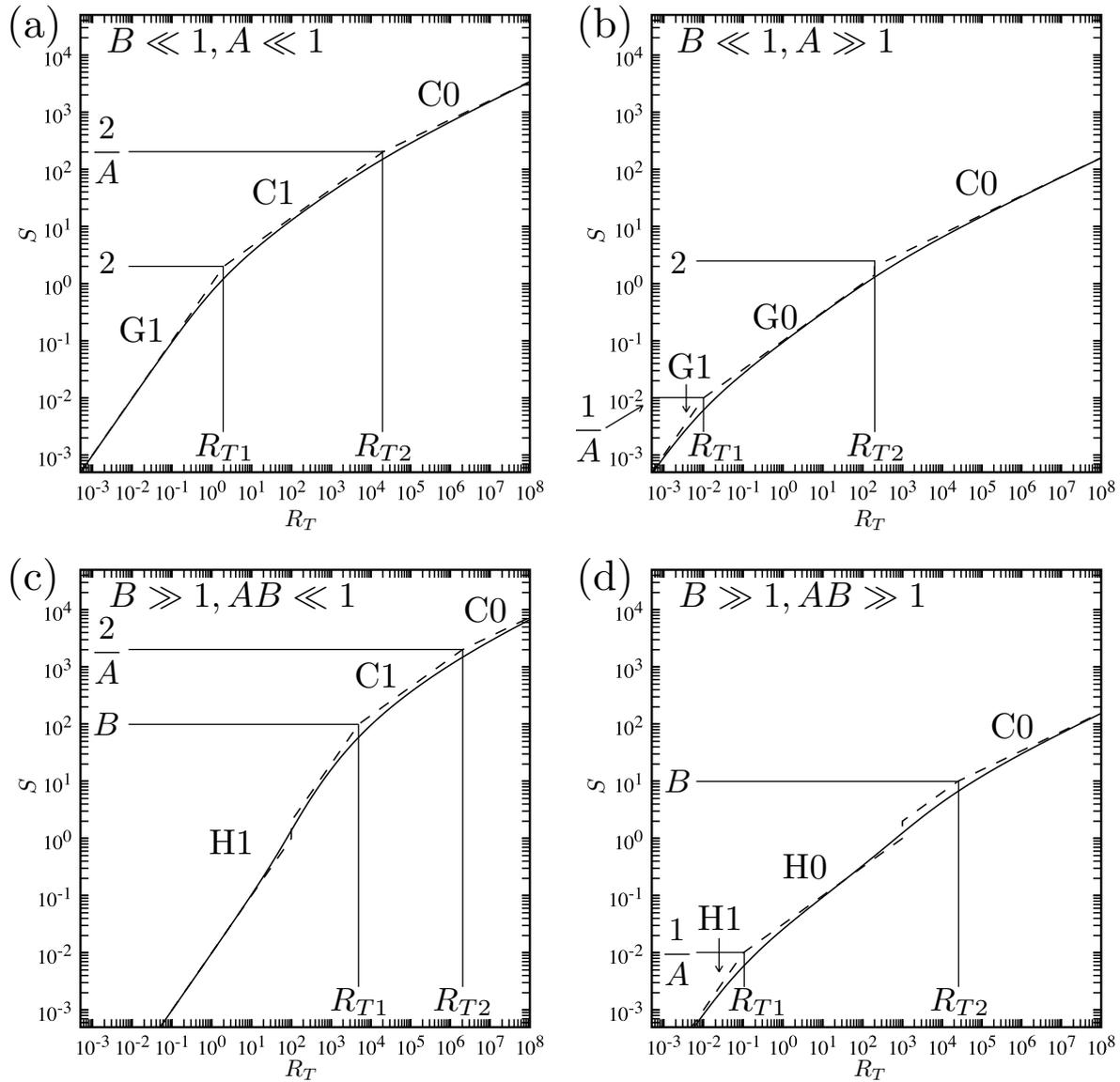


図 3.2 5 次方程式 (3.34) の正の解 S_t (実線) と表 3.1 で与えられる簡単な近似式 S_1 , S_2 , S_3 (破線) の R_T (横軸) 依存性. ただし, (a) $A = 10^{-2}$, $B = 10^{-2}$, (b) $A = 10^2$, $B = 10^{-2}$, (c) $A = 10^{-3}$, $B = 10^2$, (d) $A = 10^2$, $B = 10$ である. 各パネルの 2 本の垂直線はそれぞれ R_{T1} (左) と R_{T2} (右) の位置を示す. 2 本の水平線の左側に $S_1(R_{T1})$ (下) と $S_2(R_{T2})$ (上) の値を示す. 記号 C1, C0, G1, G0, H1, H0 は力学的平衡状態の種類を示す.

3.2.3 力学的平衡状態

3.2.2 節の解析の結果， S_t の簡単な近似式として，6 種類の式を得た (表 3.1)．このことは，典型的な解の力学的平衡状態が 6 種類存在することを示唆している．解の力のつり合いは，式 (3.37) を南北運動方程式の形に書き換えた，次の式から理解できる．(各項の下に，その物理的な意味を記す．)

$$\underbrace{S^2}_{\text{メトリック項}} + \underbrace{2S}_{\text{コリオリ項}} + \underbrace{BCS}_{\text{水平拡散項}} \approx \underbrace{2R_T\beta}_{\text{気圧傾度力項}} \quad (3.41)$$

ここで，左辺第 3 項は南北風にかかる水平拡散項であることに注意したい．また， β は式 (3.35) に $(2+S)/(1+S) = C$ を利用することで，

$$\beta = \left(\frac{ACS}{2} + 1 \right)^{-1} \quad (3.42)$$

と書かれる．

式 (3.41) の 4 つの項はすべて正の値をとるので，この式のつり合いにおいて，右辺の気圧傾度力項は，必ず，支配的な項の 1 つになる．いま，式 (3.41) の左辺 3 項のうち 1 つの項が卓越し，右辺とつり合う場合を考える．すなわち，卓越する力のつり合いは，

$$\text{気圧傾度力項と} \begin{cases} \text{メトリック項} & (S \gg 1, S \gg B \text{ のとき}) & \cdots & \text{旋衡風平衡} & [C] \\ \text{コリオリ項} & (S \ll 1, B \ll 1 \text{ のとき}) & \cdots & \text{地衡風平衡} & [G] \\ \text{水平拡散項} & (B \gg S, B \gg 1 \text{ のとき}) & \cdots & \text{水平拡散平衡} & [H] \end{cases}$$

である．ここでは，南北風にかかる水平拡散項と気圧傾度力項とのつり合いを水平拡散平衡と呼んでいる．また，傾度風平衡などの 3 項あるいは 4 項が，同程度の大きさになるつり合いは考えていない．

次に， AS の大きさに依存して， β が以下のように近似できることに注目する．

$$\beta \approx \begin{cases} 1 & (AS \ll 1 \text{ のとき}) & \cdots & [1] \\ (0.5ACS)^{-1} & (AS \gg 1 \text{ のとき}) & \cdots & [0] \end{cases}$$

定義より β は，放射対流平衡温位場の極・赤道間温位差に対する鉛直平均温位場の極・赤道間温位差の割合 ($\beta = \Delta\theta/\theta_0\Delta_H$) である．よって，[1] のときは $\Delta\theta \approx \theta_0\Delta_H$ であり，子午面循環による熱の移流が無視できる状態である．このとき，気圧傾度力項の大きさは $2R_T\beta \approx 2R_T$ であり，外部パラメータ R_T のみによって決められる．一方，[0] のときは $\Delta\theta \ll \theta_0\Delta_H$ であり，子午面循環による熱の移流が，南北温位差を小さくしている．このとき，気圧傾度力項の大きさは $2R_T\beta \approx 4R_T/(ACS)$ であり，内部変数である S にも依存する．

上述の $[C, G, H]$ それぞれのつり合いに対して, $[1, 0]$ のどちらの状態もありうるので, $C1, C0, G1, G0, H1, H0$ の計 6 種類の典型的な力学的平衡状態が存在することになる. たとえば, $C1$ は $\beta \approx 1$ での旋衡風平衡を表し, $G0$ は $\beta \approx (0.5ACS)^{-1} \ll 1$ での地衡風平衡を表す. これらの力学的平衡状態の A, B, R_T に対する依存性は, 表 3.1 および図 3.2 に示されている.

3.3 数値実験

本節では, 数値モデルを用いた時間発展計算を行い, 第 2 章で記述した基礎方程式系の定常状態あるいは統計的平衡状態の数値解を求める. 数値解からスーパーローテーション強度などの惑星大気大循環を特徴づける無次元量を計算し, 3.2 節で求めた理論の見積もり—連立 4 元代数方程式 (3.33) の解—と比較する.

3.3.1 数値モデルと実験設定

数値モデルは基礎方程式系 (2.1)–(2.6) を十分な解像度で離散化して構築されている.*⁹ 南北, 鉛直, 時間方向の離散化には以下の方法と解像度を用いている.

- 南北: ルジャンドル多項式展開によるスペクトル法
 - 切断波数は 85 (ガウス緯度で赤道から極まで 64 格子点)
- 鉛直: 中央差分法
 - 50 層 (等間隔)
- 時間: 古典的な 4 次のルンゲ・クッタ法
 - 時間刻み幅は 6 s から 5400 s の間の適切な値 (外部パラメータの値に依存)

等温位 ($\theta = \Theta_0$) の静止大気を初期値として与え, 解が定常状態あるいは統計的平衡状態に達するまで, 時間発展計算を行う.

表 3.2 (a)–(d) に示されている 4 通りの無次元パラメータ $A = \pi^2 \tau \Omega E_V$, $B = 20\pi^2 E_H E_V$ の組合せ*¹⁰ に対して, $R_T = 10^n$ ($n = -2, -1, \dots, 5$) のときの数値解を求める. ただし, 鉛直エクマン数は $E_V = 10^{-3}$ で固定している. これは, 式 (3.33a) と (3.33b) が示すように, R_{vB} と R_{vT} の理論の見積もりが E_V に陽に依存するためである.

*⁹ 実際には, 風速ベクトル $\mathbf{v} \equiv (u, v, w)$ をトロイダル成分 ψ とポロイダル成分 χ の和 $\mathbf{v} = -\nabla \times \psi \mathbf{k} + \nabla \times \nabla \times \chi \mathbf{k}$ (\mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトル) で表すことで, 方程式系 (2.1) を $\psi, \partial^2 \chi / \partial z^2, \theta$ の 3 変数の予報式に変換して, 離散化されている (参照: 付録 A).

*¹⁰ 表 3.2 (a)–(d) に示されている 4 通りの A, B の組合せは, 前節の表 3.1 (a)–(d) の不等式を満たしている. ただし, A, B の値は図 3.2 を描くのに用いた値とは異なる. 図 3.2 のパラメータ値の数値解を求めるためには, 膨大な計算資源が必要である.

表 3.2 数値実験で用いた $A, B, E_V, \tau\Omega, E_H$ の値．記号 (a)–(d) で示される A, B の組合せは表 3.1 の同じ記号の不等式を満たしている．ただし， $A = \pi^2 \tau\Omega E_V$ ， $B = 20\pi^2 E_H E_V$ である．

	A	B	E_V	$\tau\Omega$	E_H
(a)	$\pi^2 \times 10^{-2}$	$2\pi^2 \times 10^{-2}$	10^{-3}	10	1
(b)	$\pi^2 \times 10^0$			10^3	
(c)	$\pi^2 \times 10^{-3}$	$2\pi^2 \times 10^0$		1	10^2
(d)	$\pi^2 \times 10^{-1}$			10^2	
(d')			10^{-2}	10	10

る．理論的見積もりの E_V に対する依存性は，本節の最後に確かめる．また，他の無次元外部パラメータの値は，すべての計算において $P_{rV} \equiv \nu_V/\kappa_V = 1$ と $\Delta_H = 0.1$ を用いる．以後，記号 (a)–(d) と R_T で実験パラメータの値，あるいはそのときの数値解を表すことにする．たとえば，(a) $R_T = 10^2$ は $A = \pi^2 \times 10^{-2}$ ， $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$ ， $E_V = 10^{-3}$ ， $R_T = 10^2$ のときの実験パラメータの値，もしくはこのときの数値解を表す．

実際の数値計算では，次元付きパラメータの値として金星における値 $a = 6.05 \times 10^6$ m， $H = 5 \times 10^4$ m， $g = 8.84$ m/s²， $\Theta_0 = 500$ K を用いる．ただし， H と Θ はおおまかな見積もりである．なお，残りの次元付きパラメータの値は，無次元パラメータの値と定義にしたがって一意に決められる．^{*11}

3.3.2 数値解

等温位静止大気を初期値として時間発展計算を行った結果，(a) $R_T \leq 10^0$ および $R_T = 10^5$ ，(b) $R_T \leq 10^3$ ，(c) $R_T \leq 10^2$ および $R_T \geq 10^4$ ，そして (d) $R_T \leq 10^3$ の場合に，解は定常状態に達した．他の場合は，解は非定常だが，統計的に平衡な状態に達した．以下では，定常解あるいは統計的平衡状態にある解の時間平均場を記述し，解析していく．

無次元東西風

図 3.3 は無次元東西風速 $u(\phi, z)/(a\Omega)$ の分布を示している．等値線間隔は，それぞれの最大値 (各パネル上部の値) の 10 分の 1 である．また，各パネルの右上の記号は，定常解 (S) と統計的平衡状態にある解の時間平均場 (SS) の別と，理論モデルから見積もられ

^{*11} 具体的には，まず $R_T = gH\Delta_H/(a^2\Omega^2)$ から Ω の値が決める．そして， $E_H = \nu_H/(a^2\Omega)$ ， $E_V = \nu_V/(H^2\Omega)$ ， $P_{rV} = \nu_V/\kappa_V$ ， $\tau\Omega$ から ν_H ， ν_V ， κ_V ， τ の値がそれぞれ決められる．

る解の力学的平衡状態 ($C1, C0, G1, G0, H1, H0$)*¹²を示している (図 3.4, 3.5 も同様). 得られた数値解の無次元東西風速分布は, 以下の 2 種類に大別できる.

- (a) $R_T = 10^5$, (c) $R_T \geq 10^4$ 以外の解
 - 自転を追い越す向きの, 赤道上空を中心とした 深いジェット が存在する
 - ほぼ剛体回転の状態にある
 - R_T が大きいほど, 最大風速は大きくなっている
- (a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T \geq 10^4$ の解
 - 自転を追い越す向きの, 赤道上空を中心とした (薄い上層に制限されている) 浅いジェット が存在する
 - ジェットより下は, ほぼ無風状態にある
 - 比較的遅い

無次元子午面流線関数

図 3.4 は無次元子午面流線関数 $\Psi(\phi, z)/(aH\Omega)$ の分布を示している. ただし, $v = -\partial\Psi/\partial z$, $w = (a \cos \phi)^{-1} \partial(\Psi \cos \phi)/\partial \phi$ であり, 等値線間隔はそれぞれの最大値 (各パネル上部に表示) の 10 分の 1 である. 子午面流線関数は, 定常解 (S) と統計的平衡状態にある解の時間平均場 (SS) で特徴に差がある.

- 定常解 (S)
 - 1 つの大きな直接循環である
 - 浅いジェットの解 [(a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T \geq 10^4$] を除けば, R_T が大きくなるにしたがって, 流線関数は徐々に, $z = H/2$ に対して上下非対称な形, あるいは 極上空に傾いた形 に変化している
- 統計的平衡状態にある解の時間平均場 (SS)
 - 極上空に傾いた 三角形に近い構造の直接循環 と, 相対的に小さな対流 [たとえば, (a) $R_T = 10^1$], あるいは, 傾いた構造の間接循環 [たとえば, (a) $R_T = 10^2$] で構成されている

また, 上記のいずれの場合も, R_T が大きくなるにつれて無次元子午面循環は強くなっている. とりわけ, 浅いジェットをもつ解の子午面循環は強い.

無次元温位

図 3.4 は無次元温位 $\theta(\phi, z)/\Theta_0$ の分布を示している. 等値線間隔は, すべて 0.01 で

*¹² 数値解から求めているわけではないことに注意. 数値解の力学的平衡状態は第 4 章で求める.

ある． R_T が小さいときは，温位分布は放射対流平衡温位 θ_e の分布にほぼ等しい．対して， R_T が大きいときには，温位の南北勾配が θ_e のそれよりも小さい．これらのことは， R_T が大きくなるにしたがって子午面循環が強くなることと整合的である．すなわち，子午面循環が強くなることで，熱移流の効果が大きくなり，温位の南北勾配を小さくなっている．

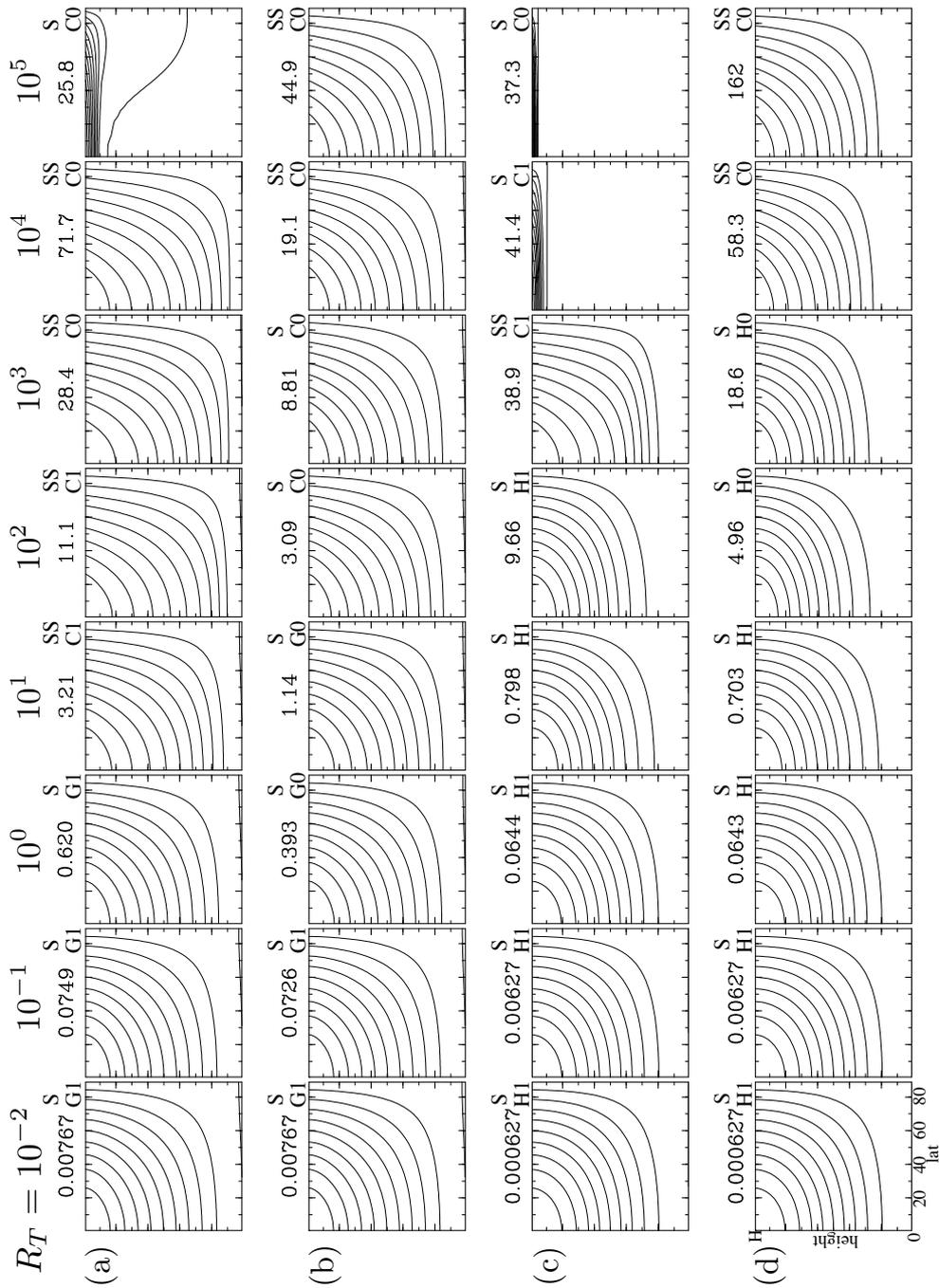


図 3.3 等温位静止大気を初期値とした時間発展計算で得られた定常解 (S; パネル右上に表示), あるいは, 統計的平衡状態にある解の時間平均場 (SS) の無次元東西風 $u(\phi, z)/(a\Omega)$. ただし, (a) $A = \pi^2 \times 10^{-2}, B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, (b) $A = \pi^2 \times 10^0, B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, (c) $A = \pi^2 \times 10^{-3}, B = 2\pi^2$, (d) $A = \pi^2 \times 10^{-1}, B = 2\pi^2 \times 10^0$ で, 図の上部に表示されている R_T の値の場合. 横軸が緯度で, 縦軸が高度である. 各パネル上部の数値は, その数値解の $u(\phi, z)/(a\Omega)$ の最大値を示している. 等値線間隔は, それぞれ最大値の 10 分の 1 である. 記号 C1, C0, G1, G0, H1, H0 は, 理論モデルから見積もられる解の力学的平衡状態の種類を表す.

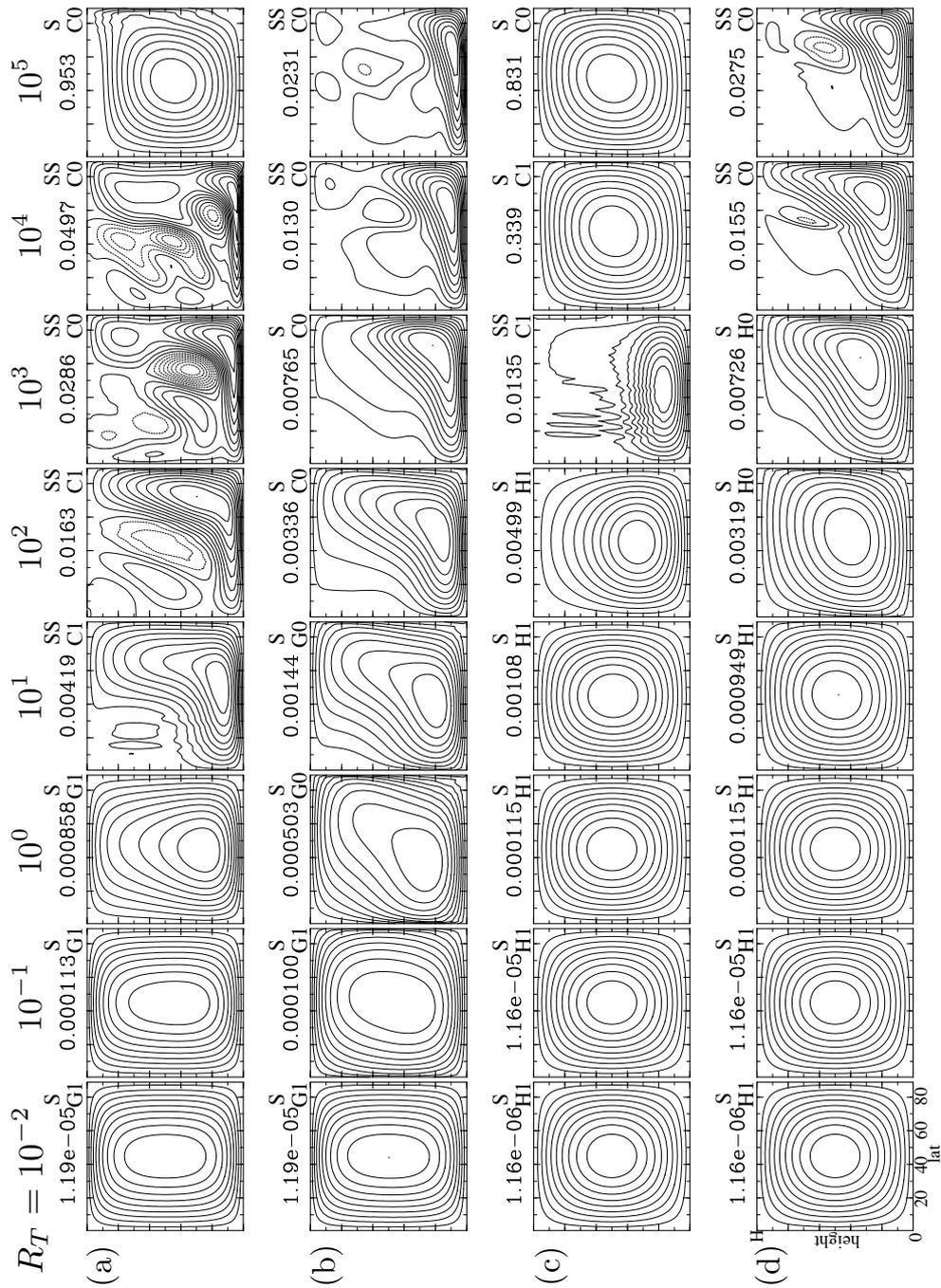


図 3.4 図 3.3 と同じ．ただし，無次元子午面流線関数 $\Psi(\phi, z)/(aH\Omega)$ ， $[v = -\partial\Psi/\partial z, w = (a \cos \phi)^{-1} \partial(\Psi \cos \phi)/\partial \phi]$ について．

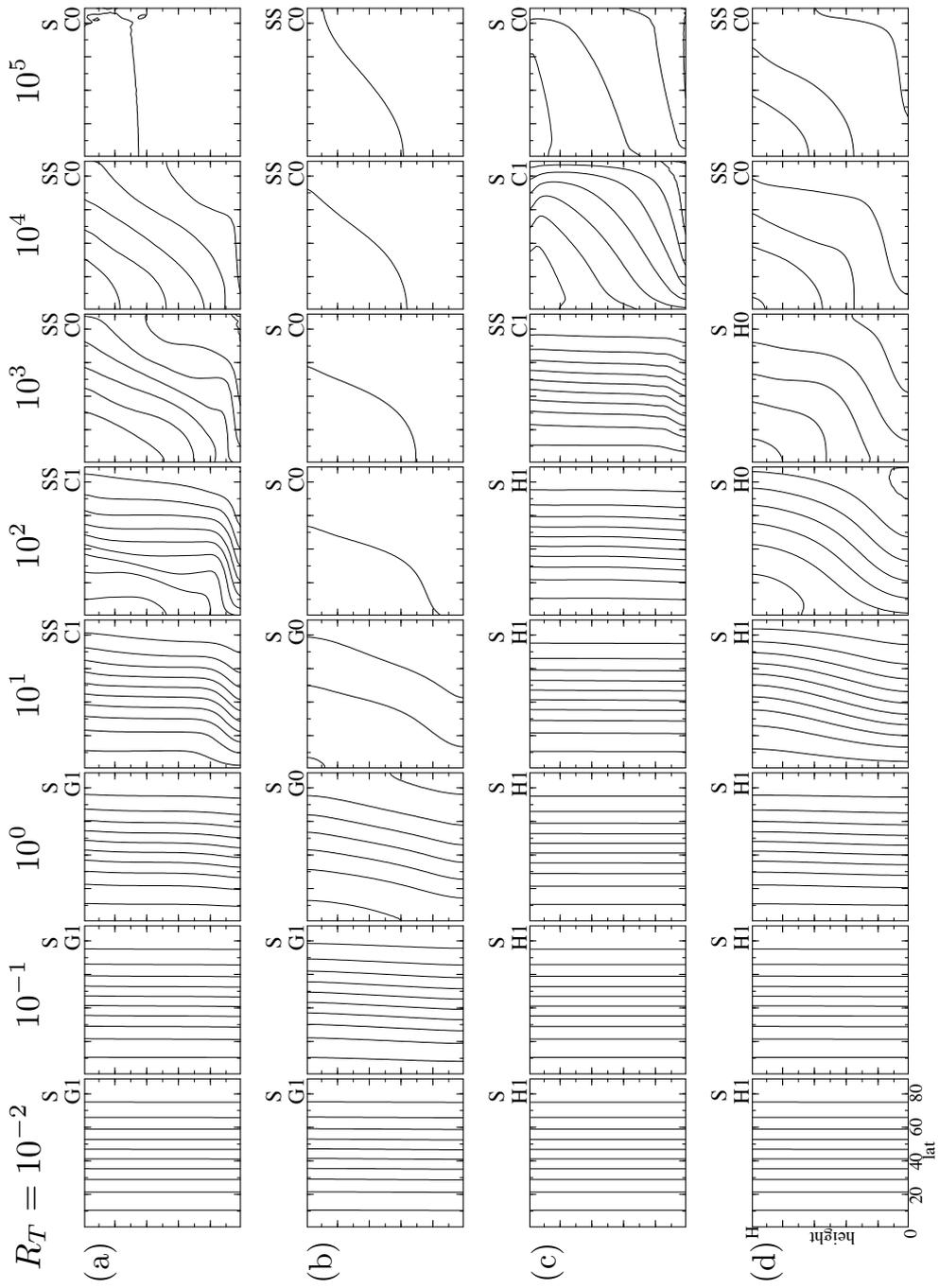


図 3.5 図 3.3 と同じ. ただし, 無次元温度位 $\theta(\phi, z)/\theta_0$ について. また, 等値線間隔は 0.01 である.

3.3.3 多重安定平衡状態

基礎方程式系 (2.1)–(2.6) は非線形であるため、解には、同一の外部パラメータ条件のもとで複数の安定な平衡状態、すなわち多重安定平衡状態が存在する可能性がある。Matsuda (1980) は少数の基本モードからなるモード方程式系を用いた理論的考察により、金星の大気大循環が、現実のスーパーローテーションとは異なる安定平衡状態をもつ可能性を初めて示した (参照：1.3.3 節)。その後、Matsuda (1982) はモード方程式系を5層に拡張した数値モデルを用いた時間発展計算で、多重安定平衡状態を求めることに成功した。このスーパーローテーションとは異なる安定平衡状態の解は、東西一様な自転軸対称モデルでは東西風が弱く、子午面循環が強い状態の解である。^{*13} また、Kido and Wakata (2008, 2009) は金星用に調整された3次元GCMを用いた数値計算により、同一条件下で、強い東西風・弱い子午面循環の解と弱い東西風・強い子午面循環の解を多重安定平衡状態として得ている。

Matsuda (1982) も Kido and Wakata (2008, 2009) も、時間発展計算で解の安定平衡状態を求めており、多重安定平衡状態が存在する外部条件では、

- 静止大気を初期条件とした場合は、弱い東西風・強い子午面循環の解を
- 強い東西風の鉛直シアアがある大気を初期条件とした場合は、強い東西風・弱い子午面循環の解を

得ている。一方、3.3.2 節で記述した解は、すべて静止大気を初期条件として与えた時間発展計算で得られたものである。これらのことから、強い東西風・弱い子午面循環をもつ深いジェットの解が得られた外部パラメータ条件では、他の安定平衡状態が存在する可能性は低い。対して、弱い東西風・強い子午面循環をもつ浅いジェットの解が得られた外部パラメータ条件 [(a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T \geq 10^4$] では、強い東西風の鉛直シアアを初期に与えれば、深いジェットの解が、もう1つの安定平衡状態の解として得られる可能性は十分にあり。

そこで、(a) $R_T = 10^4$ と (c) $R_T = 10^3$ で統計的平衡状態に達した解をそれぞれ初期値として、(a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T = 10^4$ で、統計的平衡状態に達するまで時間発展計算を

^{*13} Matsuda (1980) は、夜昼間加熱差のある金星大気では、スーパーローテーションとは異なる安定平衡状態は夜昼間対流になると予想している。ところが、Kido and Wakata (2009) の3次元GCMを用いた数値実験では、夜昼間加熱差を与えたにも関わらず、強い東西風・弱い子午面循環の状態と弱い東西風・強い子午面循環の状態を多重安定平衡状態として得ている。これは、金星大気大循環の安定平衡状態として弱い東西風・強い子午面循環の解が存在する可能性を示すものである。しかし、金星大気大循環のスーパーローテーション以外の安定平衡状態がどのようなものか、という議論を深めるためには、より現実的で複雑なGCMを含めた様々なモデルで数値実験を行い、多重安定平衡状態について調べる必要がある。

行った．このようにして得られた解の時間平均場は，静止大気を初期条件とした計算で得られたものと異なり，以下の特徴がある．

- 東西風は強く，剛体回転に近い分布をしている (図 3.6 左)
- 子午面循環は弱く，間接循環をともなっている (図 3.6 中)
- 温位の南北勾配は大きい (図 3.6 右)

つまり，(a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T = 10^4$ では，強い東西風の鉛直シアがある初期条件から時間発展計算を行った結果，安定平衡な状態の解として深いジェットの解が得られた．このように，同一の外部パラメータ条件に対して浅いジェットと深いジェットの解が得られたので，基礎方程式系 (2.1)–(2.6) に，少なくとも (a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T = 10^4$ のときには，少なくとも 2 つの多重安定平衡状態が存在することが確かめられた．なお，(c) $R_T = 10^4$ の深いジェットの解を初期値として，(c) $R_T = 10^5$ で時間発展計算を行ったが，静止大気を初期値とした場合と同じ浅いジェットの解が得られ，多重安定平衡状態は得られなかった．

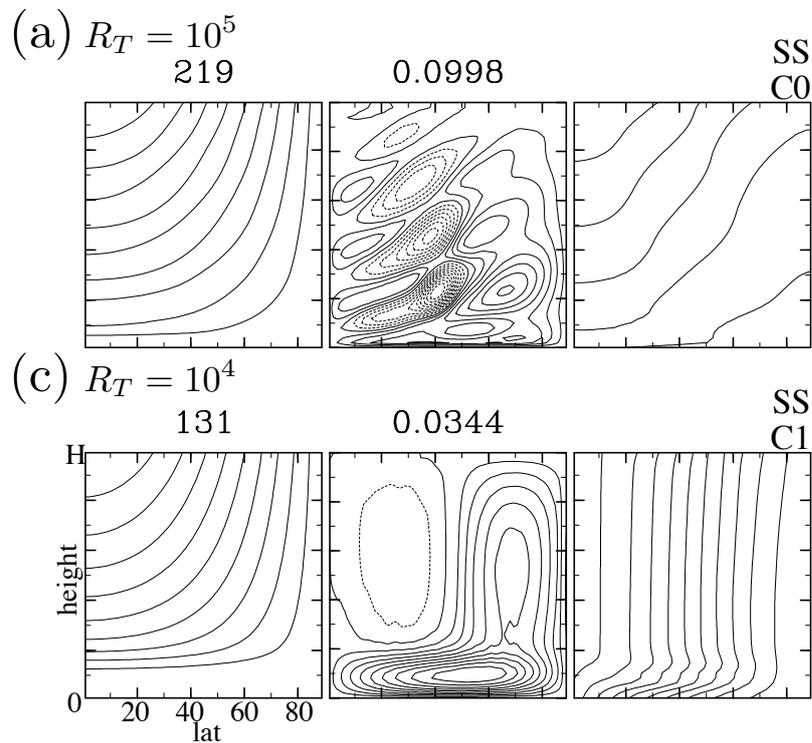


図 3.6 強い東西風の鉛直シアがある初期条件から時間発展計算して得られた統計的平衡状態にある解の時間平均場の無次元東西風 (左), 無次元子午面流線関数 (中), 無次元温度 (右). ただし, (a) $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, $R_T = 10^5$ は $R_T = 10^4$ のときの解を初期値として与え, (c) $A = \pi^2 \times 10^{-3}$, $B = 2\pi^2 \times 10^0$, $R_T = 10^4$ は $R_T = 10^3$ のときの解を初期値として与えている. 等値線間隔とパネル上部の数値, 右上の記号の意味は図 3.3–3.5 と同じである.

3.3.4 理論的見積もりとの比較

スーパーローテーション強度 (S)

数値計算の結果と理論モデルによる見積もり—5 次方程式 (3.34) の正の解 S_t —を比較するため、数値解から計算されるスーパーローテーション強度 S_n を次式で定義する。^{*14}

$$S_n \equiv \frac{1}{a\Omega} \sum_{j=1}^J u(\phi_j, z_K) \cos \phi_j \Delta \phi_j \quad (3.43)$$

ただし、 ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, J$) は赤道から極までのガウス緯度、 z_K はモデル最上層の高度、 $\Delta \phi_j \equiv (\phi_{j+1} - \phi_{j-1})/2$ ($j = 2, 3, \dots, J-1$)、 $\Delta \phi_1 \equiv (\phi_2 + \phi_1)/2$ 、 $\Delta \phi_J \equiv (\pi - \phi_J - \phi_{J-1})/2$ である。図 3.7 は (a)–(d) の場合の S_n (: 定常な深いジェットの解, : 非定常な深いジェットの解, × : 浅いジェット) の解と S_t (実線) の R_T 依存性を示している。ただし、各パネルの 2 本の鉛直線は R_{T1} (左) と R_{T2} (右) の位置を表し、C1, C0, G1, G0, H1, H0 の記号は 3.2.3 節で求めた力学的平衡状態の種類を表す。統計的平衡状態の非定常解の S_n () の変動幅は、 S_n の 3% 未満と小さく、図には示されていない。

少なくとも計算された範囲では、 S_t は深いジェット解の S_n をよく見積もっている。

$$e_r \equiv \frac{S_t - S_n}{S_n} \quad (3.44)$$

で定義される相対誤差は、定常な深いジェット解では $-0.34 \leq e_r \leq 0.38$ であり、非定常な深いジェット解では $-0.48 \leq e_r \leq 0.23$ である。 S_n は外部パラメータによって 5 桁程変化していることに比べて、相対誤差 50% 未満というのは非常に小さい。さらに、定常解の e_r と非定常解の e_r との間に大きな差異はない。これは、理論モデルは定常状態の仮定のもとで構築されているにも関わらず、スーパーローテーション強度の見積もりは、定常解だけでなく統計的平衡状態の解にも妥当であること意味している。

^{*14} 式 (3.43) は、任意の数値解の東西風速分布から $z = H$ での代表的な風速を求めるために、 $u(\phi, H)$ の赤道から極までの重み付き平均である、

$$\frac{a \int_0^{\pi/2} u(\phi, H) \cos \phi d\phi}{a \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi} = \int_0^{\pi/2} u(\phi, H) \cos \phi d\phi$$

を離散的に計算し、その値を $a\Omega$ で割っている。なお、上式は 3.1 節で仮定した $u(\phi, H) = \frac{3U}{2} \cos \phi$ の場合、

$$\int_0^{\pi/2} u(\phi, H) \cos \phi d\phi = \frac{3U}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi = \frac{3U}{2} \left[\frac{\phi + \sin \phi \cos \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8} U \approx U$$

であり、 S_n は 3.1 節の S とほぼ同じ値になる。

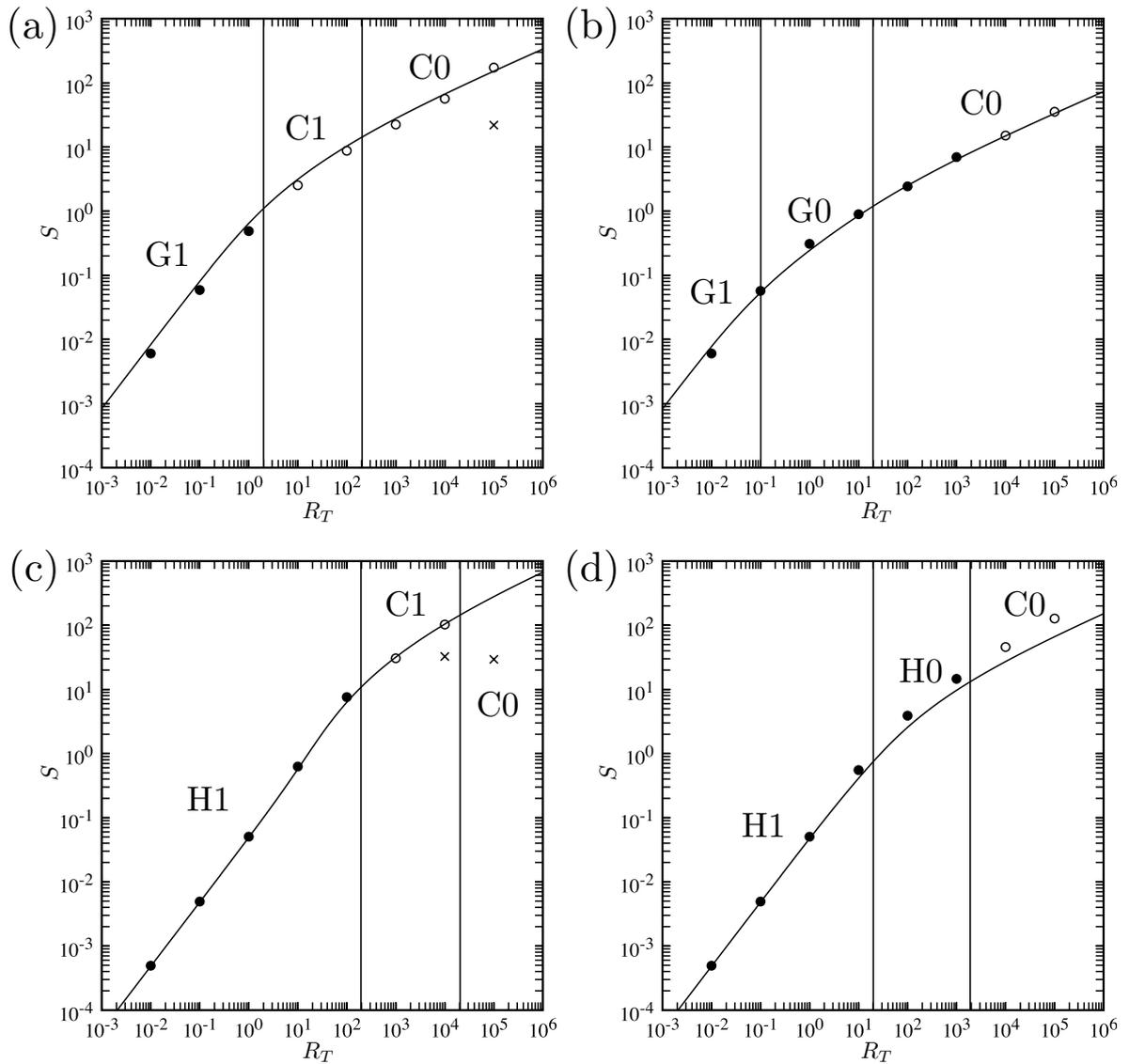


図 3.7 数値解から計算されたスーパーローテーション強度 S_n (: 定常な深いジェット
 の解, : 非定常な深いジェット
 の解, \times : 浅いジェット
 の解) と理論的見積もり S_t
 (実線) の R_T (横軸) 依存性. ただし, (a) $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, (b)
 $A = \pi^2 \times 10^0$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, (c) $A = \pi^2 \times 10^{-3}$, $B = 2\pi^2$, (d) $A = \pi^2 \times 10^{-1}$,
 $B = 2\pi^2 \times 10^0$ の場合. 各パネルの 2 本の鉛直線は R_{T1} (左) と R_{T2} (右) の位置を表
 し, C1, C0, G1, G0, H1, H0 の記号は力学的平衡状態の理論的見積もりを表す.

地表付近と大気上端の南北風を代表的風速としたロスビー数 (R_{vB} , R_{vT})

数値解から計算される R_{vBn} と R_{vTn} をそれぞれ以下で定義する。^{*15}

$$R_{vBn} \equiv -\frac{1}{a\Omega} \sum_{j=1}^J v(\phi_j, z_1) \cos \phi_j \Delta \phi_j \quad (3.45a)$$

$$R_{vTn} \equiv \frac{1}{a\Omega} \sum_{j=1}^J v(\phi_j, z_K) \cos \phi_j \Delta \phi_j \quad (3.45b)$$

ただし, z_1 はモデル最下層の高度である. 図 3.8 は (a)–(d) の場合の R_{vBn} (, , ×) および R_{vTn} (, ,) と, 理論的見積もり R_{vBt} (実線) および R_{vTt} (破線) の R_T 依存性を示している. ただし, R_{vBt} と R_{vTt} はそれぞれ, S_t を式 (3.33a) と (3.33b) に代入して求めている. $S_n \ll 1$ のときは, R_{vBn} は R_{vTn} とほぼ同じ値をであり, $S_n \gg 1$ になれば, R_{vBn} は R_{vTn} よりも非常に大きくなり, R_{vTn} は一定値に近づいている. これらの性質は理論モデル (式 3.33a, 3.33b) と定性的に一致している. 一方, R_{vB} と R_{vT} の理論的見積もりの誤差は, S のそれに比べてわずかに大きい.

鉛直平均した極・赤道間温度差 $\Delta\theta$ の $\Theta_0\Delta_H$ に対する割合 (β)

数値解から計算される β_n を次式で定義する.

$$\beta_n \equiv \frac{1}{\Theta_0\Delta_H} \sum_{k=1}^K \frac{\theta(\phi_1, z_k) - \theta(\phi_J, z_k)}{K} \quad (3.46)$$

ここで, z_k ($k = 1, 2, \dots, K$) はモデルの鉛直各層の高度である. 図 3.8 は (a)–(d) の場合の β_n (, , ×) と 理論的見積もり β_t (実線) の R_T 依存性を示している. β_t は S_t を式 (3.35) に代入することで求めている. 力学的平衡状態が G1, C1, H1 のときは $\beta_n \approx 1$ であり, G0, C0, H0 のときは β_n は R_T の増加にともない減少している. これらは, 力学的平衡状態の分類 (参照: 3.2.3 節) と整合的である.

^{*15} S の場合と同じ理由で, 式 (3.45) を用いる.

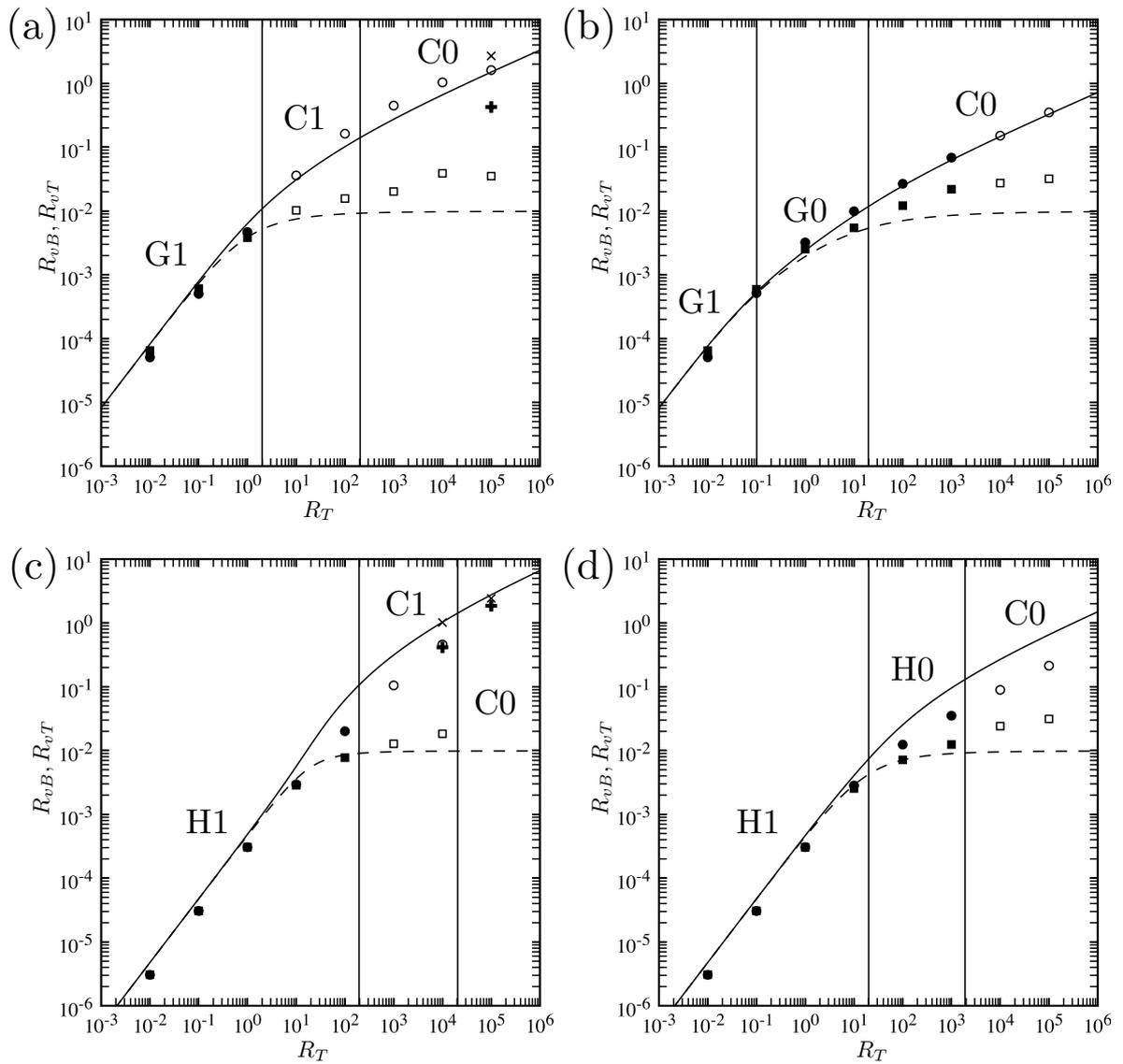


図 3.8 図 3.7 と同じ . ただし R_{vBn} (\bullet , \circ , \times) と R_{vTn} (\bullet : 定常な深いジェット
の解 , \circ : 非定常な深いジェットの解 , \square : 浅いジェットの解) について . 実線は $R_{vB}t$
を , 破線は $R_{vT}t$ を表す .

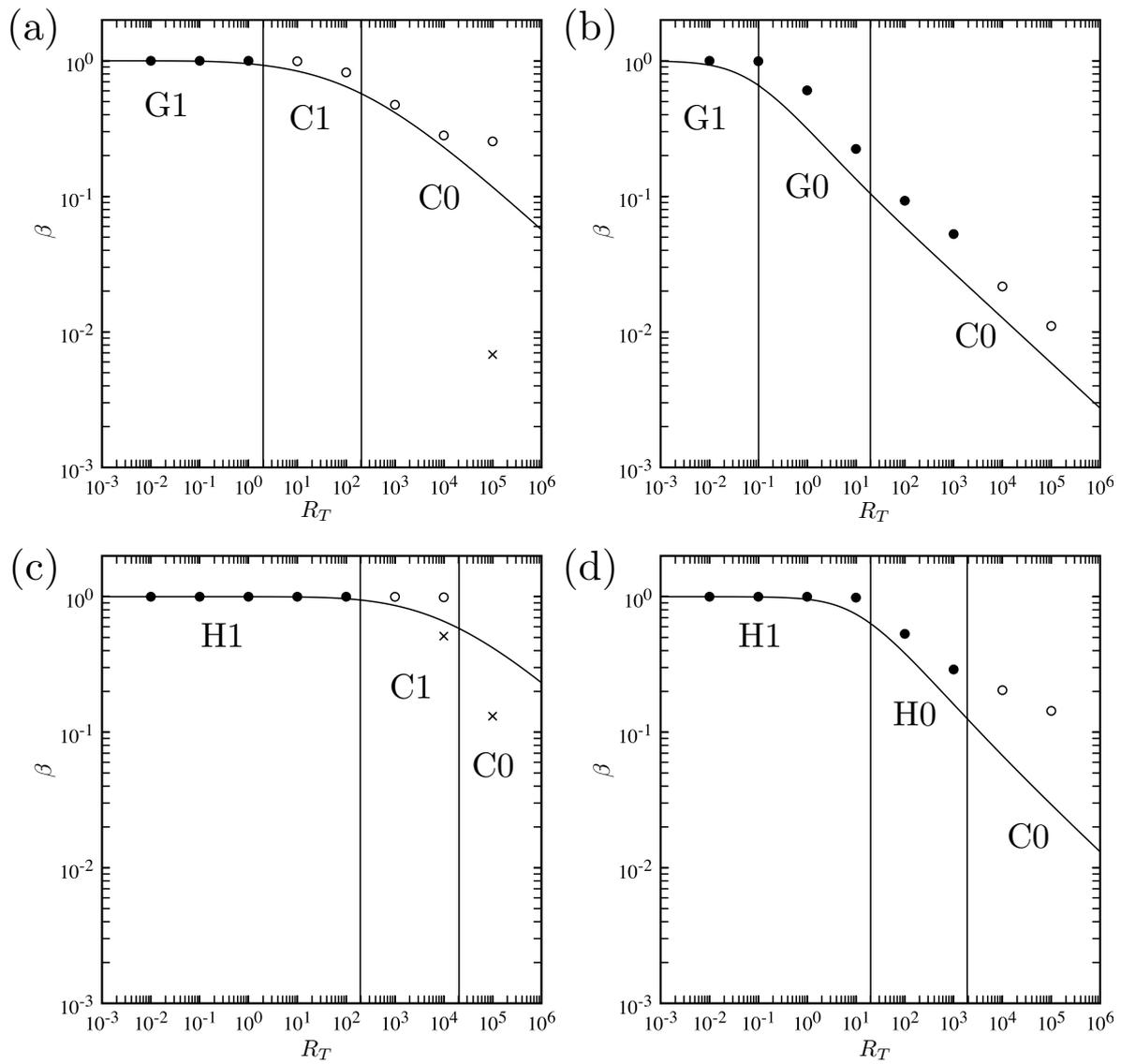


図 3.9 図 3.7 と同じ . ただし β_n について . 実線は β_t を表す .

3.3.5 鉛直エクマン数依存性

理論モデルの式 (3.34) と (3.35) は, S と β は A, B, R_T にのみ, 陽に依存することを表している. 一方, 式 (3.33a) と (3.33b) は, R_{vB} と R_{vT} は A, B, R_T に加え, 鉛直エクマン数 E_V にも, 陽に依存することを表している. この E_V に対する依存性の違いを確かめるために, 表 3.2 (d') に示されている外部条件での数値解を求め, (d) の解と比較する. (d') は, A と B は (d) と同じだが, E_V が (d) の 10 倍になっている.

表 3.3 は (d') の数値解^{*16}から計算される無次元量 $S_n, R_{vBn}, R_{vTn}, \beta_n$ それぞれを, (d) の数値解から計算される無次元量で割った値 (d'/d) を示している. S_n と β_n の (d'/d) の値は 1 に非常に近い. 一方, R_{vBn} と R_{vTn} の (d'/d) の値はおよそ 10 である. これらは, 理論モデルと整合的な結果である. R_{vBn} の (d'/d) は 10 よりも少し小さい. これは E_V が大きくなると, 大気下端の境界層が厚くなり, 赤道向きの風速が最大となる高度が上がるからである. 実際, (d) $E_V = 10^{-3}$ では $z = z_1$ の層で赤道向きの風速が最大になるのに対して, (d') $E_V = 10^{-2}$ では 1 つ上の層 $z = z_2$ で最大になっている (図 3.10).

表 3.3 (d') の数値解から計算される無次元量 $S_n, R_{vBn}, R_{vTn}, \beta_n$ の, (d) の数値解から計算される無次元量に対する割合 (d'/d). ここで, (d') も (d) も $A = \pi^2 \tau \Omega E_V = \pi^2 \times 10^{-1}$, $B = 20\pi^2 E_H E_V = 2\pi^2 \times 10^0$ だが, (d') は $E_V = 10^{-2}$ なのに対して, (d) は $E_V = 10^{-3}$ である.

R_T	(d'/d)			
	S_n	R_{vBn}	R_{vTn}	β_n
10^{-2}	0.98	7.36	9.86	1.00
10^{-1}	0.98	7.32	9.86	1.00
10^0	0.98	7.36	9.86	1.00
10^1	0.98	7.41	9.89	1.00
10^2	0.98	7.18	10.24	1.13
10^3	0.98	7.27	9.30	1.14
10^4	1.01	7.57	9.41	1.14
10^5	0.97	7.56	9.40	0.97

*16 数値解は, pp. 190, 191 の図 B.37, B.38 に示されている.

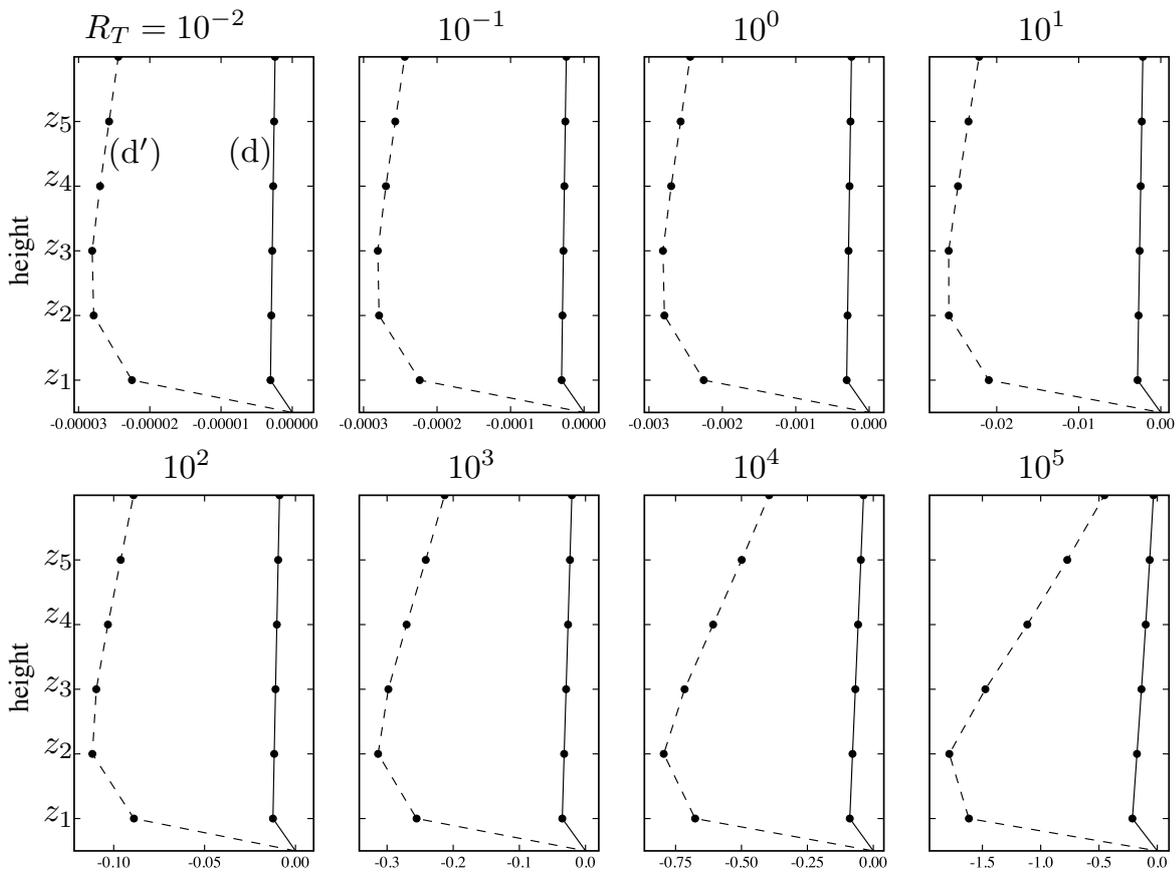


図 3.10 (d) $E_V = 10^{-3}$ (実線) と (d') $E_V = 10^{-2}$ (破線) の赤道から極まで平均した無次元南北風速 $\sum_{j=1}^J v(\phi_j, z_k) \cos \phi_j \Delta \phi_j / (a\Omega)$ の地表付近の分布．横軸が風速，縦軸が高度．丸印は，数値モデル内で値が計算されている高度を表す．

3.4 考察

本節ではまず，3.1節で理論モデル(式 3.33)を構築するために導入した仮定の妥当性を，数値解を用いて検証する．次に，数値解にみられた，上下非対称な形，傾いた形，三角に近い形の子午面循環(図 3.4)に関して考察する．その後，解が定常状態ではなく統計的平衡状態に達した場合について，非定常性の原因を考察する．そして，Matsuda (1980)のスーパーローテーション強度の見積もりと，本研究の見積もりを比較する．

3.4.1 理論モデルを構築するために導入した仮定

3.1節では，次の仮定を導入して理論モデルを構築してきた．

- 定常状態：

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

- 三角関数で書かれる以下の物理量の空間依存性
 - 相対角運動量の赤道から極までの積分量：

$$M_0(z) \approx \frac{Ua}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \right]$$

- 大気上端の東西風：

$$u(\phi, H) \approx \frac{3U}{2} \cos \phi$$

- 地表付近の南北風：

$$v(\phi, h) \approx -V_B \sin 2\phi$$

- 大気上端の南北風：

$$v(\phi, H) \approx V_T \sin 2\phi$$

- 鉛直平均温位：

$$\bar{\theta}(\phi) \approx \Theta_0 - \Delta\theta \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right)$$

3.3節の時間発展計算では，数値解が定常状態ではなく統計的平衡状態に達する場合もあった[たとえば，(a) $10^1 \leq R_T \leq 10^4$]．これらの数値解は，上の定常状態の仮定を満たしていない．しかし，数値解から求めたスーパーローテーション強度の相対誤差 e_r (式 3.44) は，定常解と統計的平衡状態にある解の時間平均場で，大きな違いはなかった．また，統計的平衡状態に達したあとの，スーパーローテーション強度の変動幅は3%未満であった．これらのことは，少なくとも3.3節で計算した範囲では，解が非定常であること

のスーパーローテーション強度への影響は、小さいことを意味している。なお、解を非定常にする原因については 3.4.3 節で考察する。

次に、数値解の空間依存性の「仮定された関数への近さ」を評価するために、以下で定義される「近さ」の指標を計算する。

$$E[M_0(z)] \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{\{\hat{M}_0(z_k) - [1 - \cos(\pi z_k/H)]/2\}^2}{K}} \quad (3.47a)$$

$$E[u(\phi, H)] \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{[\hat{u}(\phi_j, z_K) - \cos \phi_j]^2}{J}} \quad (3.47b)$$

$$E[v(\phi, h)] \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{[\hat{v}(\phi_j, z_1) + \sin 2\phi_j]^2}{J}} \quad (3.47c)$$

$$E[v(\phi, H)] \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{[\hat{v}(\phi_j, z_K) - \sin 2\phi_j]^2}{J}} \quad (3.47d)$$

$$E[\bar{\theta}] \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{\{[\bar{\theta}(\phi_1) - \bar{\theta}(\phi_j)]/[\bar{\theta}(\phi_1) - \bar{\theta}(\phi_J)] - \sin^2 \phi_j\}^2}{J}} \quad (3.47e)$$

ここで、ハット ($\hat{\cdot}$) は、総和の範囲内で、絶対値の最大の値が、1 になるように正規化された量であることを意味している。これらの指標は、数値解の空間依存性が、仮定された関数とまったく同じであればゼロをとり、異なっているほど 1 に近い値をとる。たとえば、ある物理量 $f(\phi)$ が $f(\phi) = \cos \phi$ の形をしていると仮定されているときに、その物理量の数値解 $f_n(\phi)$ の空間依存性が $f_n(\phi) = \sin \phi$ ならば、 $E[f(\phi)] = 0.6$ である。

表 3.4 は、3.3 節の数値実験の範囲の深いジェットの解から計算された、上記の指標の最大値と中央値を示している。 $E[v(\phi, H)]$ を除けば、最大値は 0.19 より小さく、中央値は 0.07 より小さい。これは、数値解の $M_0(z)$ 、 $u(\phi, H)$ 、 $v(\phi, h)$ 、 $\bar{\theta}(\phi)$ の空間依存性が、仮定された関数に近いことを示している。つまり、これらの物理量に対しておいた仮定が妥当であることを表している。

一方、 $E[v(\phi, H)]$ は、子午面流線関数が上下対称な構造のときには、小さな値だが、三角に変形した構造のときに大きな値をとっている。たとえば、(a) $R_T = 10^{-2}$ の数値解は $E[v(\phi, H)] = 0.0025$ (図 3.11 上) だが、(a) $R_T = 10^4$ では $E[v(\phi, H)] = 0.68$ (図 3.11 下) である。大気上端の南北風の緯度依存性が $\sin 2\phi$ からずれば、式 (3.13) 左辺の係数 $8/15$ の値が変化する。すると、式 (3.33a) の係数も変化するため、 S の理論的見積もりがよくても、 R_{vT} の見積もりが悪くなる。これは R_T が大きいときに R_{vTn} と R_{vTt} との差が大きいこと (図 3.8) と整合的である。 $v(\phi, H)$ の緯度依存性の大きなずれをもたらす、子午面循環の構造の変化に関しては次小節で詳しく考察する。

表 3.4 3.3 節の数値実験の範囲の深いジェットの解から計算された、近さの指標 (3.47) の最大値と中央値。

	最大値	中央値
$E[M_0(z)]$	0.149	0.048
$E[u(\phi, H)]$	0.003	0.001
$E[v(\phi, h)]$	0.187	0.065
$E[v(\phi, H)]$	0.689	0.211
$E[\bar{\theta}(\phi)]$	0.049	0.009

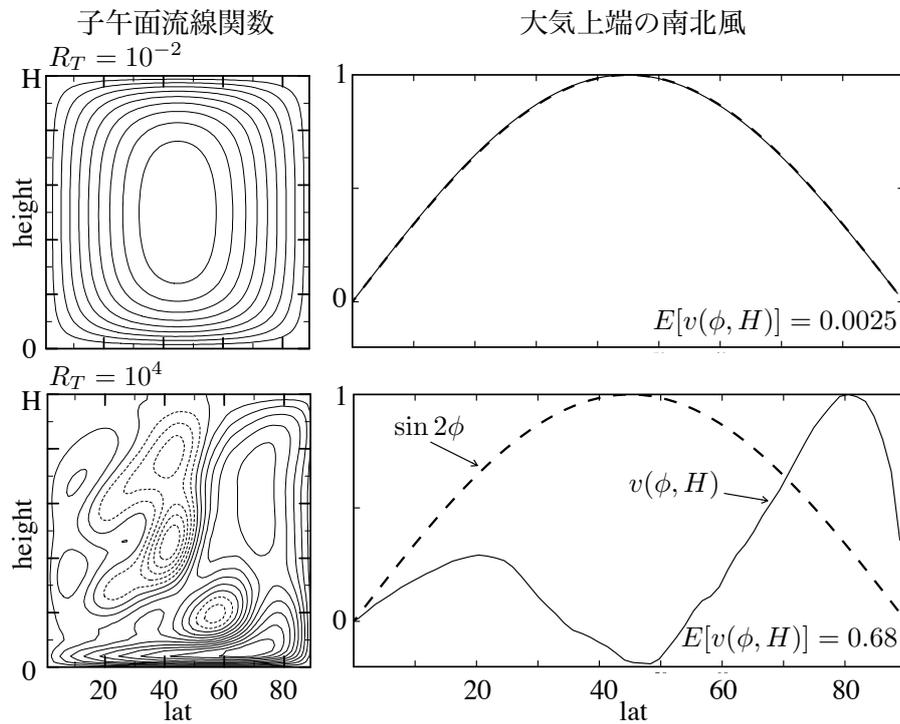


図 3.11 無次元子午面流線関数 (左) と最大値が 1 になるように正規化された大気上端の南北風 (右, 実線). 外部パラメータ条件は $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$ で $R_T = 10^{-2}$ (上) と $R_T = 10^4$ (下) である. 左図の破線は $\sin 2\phi$ の曲線を表す.

3.4.2 子午面循環の構造の変化

3.3.2 節で述べたように, $z = H/2$ に対して上下対称な流線関数の子午面循環 (以後, 上下対称な循環 と呼ぶ) は, R_T が大きくなるにつれて徐々にその構造が変化し, 三角に近い形 (以後, 三角型循環 と呼ぶ) になる (図 3.4). 本小節では, このような子午面循環の構造の変化を, 以下で述べる上下非対称化と傾斜の 2 つに分けて議論する.

上下非対称化

図 3.4 の (a) $R_T = 10$ や (c) $R_T = 10^2$ の子午面流線関数の等値線間隔は, 上層で粗く下層で密なため, 上下に非対称である. 以後, このような子午面循環を 上下非対称な循環 と呼ぶ. S が大きいときに子午面循環が上下非対称な循環になることは, 理論モデルの式 (3.33a), (3.33b) と整合的である. つまり,

$$R_{vB} = \pi^2 E_V S \quad (\text{再掲 3.33a})$$

$$R_{vT} = \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right) \quad (\text{再掲 3.33b})$$

なので, つねに $R_{vB} \geq R_{vT}$ が成り立つ. $S \ll 1$ ならば $R_{vB} \approx R_{vT}$ だが, $S \gtrsim 1$ ならば R_{vB} と R_{vT} の差が顕著になる. 条件 $S \gtrsim 1$ は式 (3.33a) を利用して書き換えれば,

$$R_{vB} \gtrsim \pi^2 E_V \quad (3.48)$$

となる. このとき, 下層の赤道向きの風は, 上層の極向きの風よりも強い ($R_{vB} > R_{vT}$). 連続の式 (2.1e) より, 大気柱に流出入する質量が一定になる必要があるので, 強い赤道向きの風が吹く下層は薄く, 弱い極向きの風が吹く上層は厚くなる (図 3.12 左). この変形過程を子午面循環の上下非対称化と呼ぶことにする.

傾斜

図 3.4 (b) $R_T = 10^{-1}$ の子午面流線関数の等値線間隔は, 赤道下層と極上層で密になっており, 循環の構造が斜めに傾いている. 以後, このような子午面循環を 傾いた循環 と呼ぶ. 傾いた循環になる理由は, 温位 θ の空間分布と, 放射対流平衡温位 θ_e の空間分布から理解できる. 現実的な状況である $0 < \beta < 1$ のとき, 大気は低緯度で暖かく, 高緯度で冷たい. ゆえに, 同じ緯度でも, 赤道から極に向かって吹く上層の風は暖かく, 極から赤道に向かって吹く下層の風は冷たいはずである. この鉛直温位差が顕著になるのは, 子午面循環の循環時間がニュートン加熱・冷却の緩和時間よりも短いとき, すなわち,

$$R_{vB} > (\tau\Omega)^{-1} \quad (3.49)$$

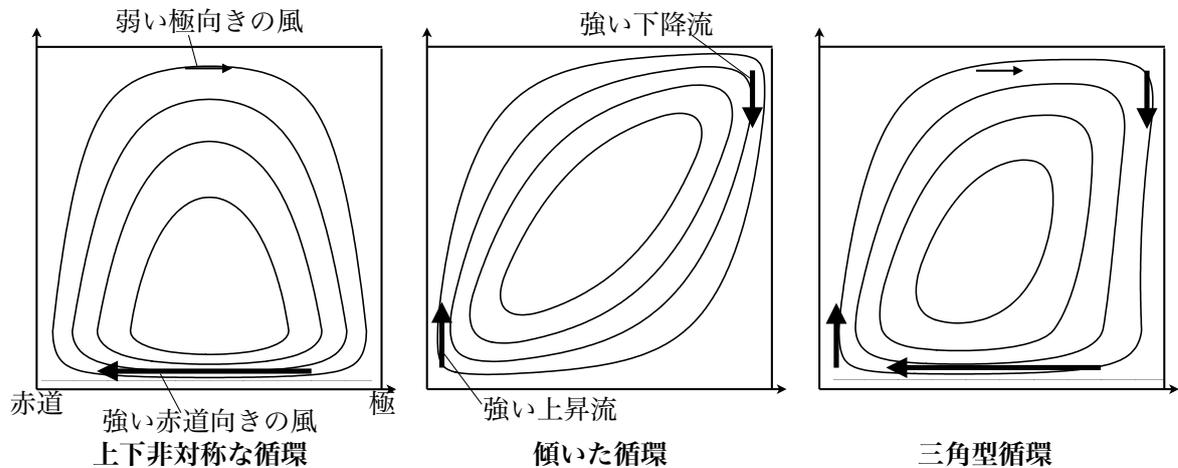


図 3.12 上下非対称な循環 (左), 傾いた循環 (中), 三角型循環 (右) の模式図. 三角型循環の流線関数は, 上下非対称な循環と傾いた循環の流線関数を平均して求めている.

のときである. なぜならば, ニュートン加熱・冷却の基準となる θ_e が,

$$\theta_e \equiv \Theta_0 \left[1 - \Delta_H \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (\text{再掲 2.3})$$

と, 静的に中立 ($\partial\theta_e/\partial z = 0$) な状態で与えられているからである. さらに, ニュートン加熱・冷却項 $[-(\theta - \theta_e)/\tau]$ は, 赤道下層に強い加熱を, 極上層に強い冷却を与える. 定常状態を仮定した熱力学方程式 (2.1d) において, これらの強い加熱と冷却とつり合うためには, それぞれ強い上昇流と下降流 (にともなう熱移流) が必要となる. このようにして, 赤道下層では強い上昇流が, 極上層では強い下降流が生じることで, 子午面循環が斜めに傾く (図 3.12 中). この変形過程を子午面循環の傾斜と呼ぶことにする. このような循環の傾斜は, 二重円筒型の回転水槽中で水平加熱差によって駆動される定常自転軸対称流の数値実験 (Sugata and Yoden, 1992) でも示されている.

上述の上下非対称化と傾斜の 2 つの変形過程が重なると, 子午面循環の構造は三角型になる. 図 3.12 は模式的な, 上下非対称な循環 (左) と傾いた循環 (中) の流線関数と, その両者を平均して得られる流線関数 (右) を示している.

もっとも, 上下非対称化と傾斜は非線形過程である移流を含んでいるので, 単純に, 線形重ね合わせを考えてよいという保証はない. しかし, 深いジェットの解が得られた数値解における子午面循環の形の R_T 依存性は, 上の説明と定性的に一致している (図 3.4). たとえば, (a) の場合, R_T の増加にともない子午面循環は次のように変化している.

- (1) 上下対称な循環 ($R_T \leq 10^{-1}$)
- (2) 上下非対称な循環 ($R_T = 10^0$)
- (3) 三角型循環 ($R_T \geq 10^1$)

これは、(a) のときは $\pi^2 E_V = \pi^2 \times 10^{-3} < (\tau\Omega)^{-1} = 10^{-1}$ なので、 R_{vB} が上下非対称化の条件 (3.48) を先に満たすことと整合的である。一方、(b) の場合、 R_T の増加にともない子午面循環は次のように変化している。

- (1) 上下対称な循環 ($R_T = 10^{-2}$)
- (2) 傾いた循環 ($R_T = 10^{-1}$)
- (3) 三角型循環 ($R_T \geq 10^0$)

これも、(b) では $\pi^2 E_V = \pi^2 \times 10^{-3} > (\tau\Omega)^{-1} = 10^{-3}$ であり、 R_{vB} が傾斜の条件 (3.49) を先に満たすことと整合的である。

3.4.3 静的不安定

これまで議論してきた三角型循環は、低中緯度の上空を静的不安定にしうる。これは、三角型循環では、赤道で暖められた大気が、低い高度で中緯度に流れ込むため、低中緯度上空で $\partial\theta/\partial z < 0$ になりうるからである。

一例として、(a) $R_T = 10^1$ の $t = 20000$ 地球日での瞬間場の、子午面流線関数と静的不安定な領域を図 3.13 (左) に示す。低中緯度の上空で静的不安定となっており、鉛直対流が生じている。大気は鉛直対流で混合されることで静的に中立な状態になるが、子午面循環の基本場が三角型循環であるため、絶えず低中緯度の上空を不安定化させている (図 3.13 右)。そのため、鉛直対流が生じ続ける。

前小節で議論したように R_T が大きい場合に、子午面循環の構造は三角型になりやすい。そのため、三角型循環による低中緯度の上空の静的不安定化が原因で定常解が得られなかったとする説明は、 R_T が大きい場合に定常解が得られなかった 3.3 節の数値実験の結果と整合的である。

3.4.4 Matsuda (1980) との比較

Matsuda (1980) は自転軸対称なブシネスク流体プリミティブ方程式系の 2 層モデルの、速度場と温度場を少数の基本モードに展開して、モード間の相互作用を陽に非線形項として表現したモード方程式系を作り、解析することで、東西風速 U のパラメータ依存性などを求めている (参照：1.3 節)。本節では、松田が示した、

- 水平拡散が無限大の場合の U 、すなわち式 (1.1) の解
- 水平拡散が有限の場合の U 、すなわち式 (1.4) の解

から求められるスーパーローテーション強度 ($S = U/a\Omega$) と、本研究の、

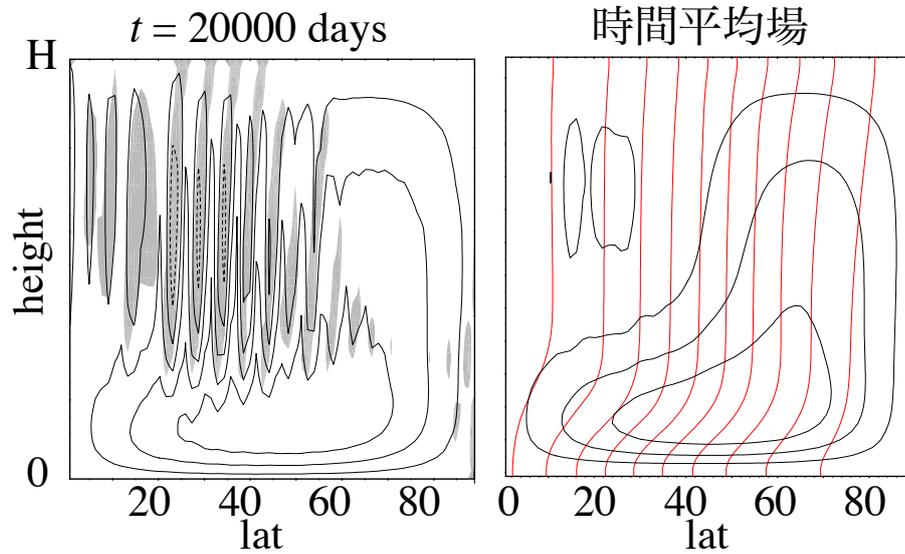


図 3.13 $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, $R_T = 10^1$ の (左) $t = 20000$ 地球日の瞬間場の、無次元子午面流線関数 $\Psi(\phi, z)/(aH\Omega)$ (等値線, 間隔は 4.28×10^{-3}) と静的不安定 ($\partial\theta/\partial z < 0$) な領域 (陰影部), (右) 時間平均場の無次元子午面流線関数 (黒, 等値線間隔は 1.05×10^{-3}) と無次元温度 θ/Θ_0 (赤, 等値線間隔は 0.01) .

- 理論的見積もり, すなわち 5 次方程式 (3.34) の解 S_t
- 3.3 節で数値解から求めた S_n

を比較する .

まず, 式 (1.1) を, 本研究 (第 2 章以降) で用いている記号で書き直す . 表 3.5 は, 1.3 節の記号と第 2 章以降の記号の対応を示している . この表にしたがい, 水平拡散が無限大

表 3.5 1.3 節の記号と第 2 章以降の記号の対応関係 .

	1.3 節	第 2 章以降
惑星半径	R	a
鉛直拡散係数	ν	ν_V
熱膨張係数	α	$1/\Theta_0$
ニュートン加熱・冷却の緩和時定数	$1/c$	τ
外部加熱の南北温度差	$ Q_2^0 $	$\Theta_0\Delta_H/\tau$

の場合の，式 (1.1) を書き直すと以下ようになる．

$$\left(\frac{U}{a}\right)^2 + 2\Omega\left(\frac{U}{a}\right) + \Lambda_1\left(\frac{U}{a}\right) + \Lambda_2\left(\frac{U}{a}\right) = \tilde{Q} \quad (3.50a)$$

$$\Lambda_1 = \frac{5}{2} \frac{\nu_V^2}{H^4 \Omega}, \quad \Lambda_2 = \frac{5}{2} \frac{g\Gamma\nu_V}{\Theta_0 \tau a^2 \Omega}, \quad \tilde{Q} = \frac{3}{2} \frac{gH\Delta_H}{a^2} \quad (3.50b)$$

ただし，本研究では，基本場は静的に中立 ($\partial\theta_e/\partial z = 0$) なので， $\Gamma = 0$ である．式 (3.50) を Ω^2 で割り，無次元数を用いて表すと次のようになる．

$$S^2 + 2S + \frac{5}{2} E_V^2 S = \frac{3}{2} R_T \quad (3.51)$$

この方程式の正の解を S_{MI} で表せば，2 次方程式の解の公式より，

$$S_{\text{MI}} = \frac{-(4 + 5E_V^2) + \sqrt{(4 + 5E_V^2)^2 + 24R_T}}{4} \quad (3.52)$$

となる．また，式 (1.3) より R_T と G_r の間には以下の関係が成り立っている．

$$R_T = \frac{\tau\Omega}{E_V^3} G_r \quad (3.53)$$

同様にして，水平拡散が有限の場合の，式 (1.4) を書き直し，無次元化すると次のようになる．

$$S^2 + 2S + \frac{3}{2} E_H E_V \sigma + \frac{24}{7} S \left(\frac{T_{3u}^0}{a^2 \Omega}\right) + 12 \left(\frac{\bar{T}_3^0}{a^2 \Omega}\right) \left(\frac{T_3^{0'}}{a^2 \Omega}\right) = \frac{3}{2} R_T \quad (3.54a)$$

ただし，

$$T_{3u}^0 = \bar{T}_3^0 + \frac{T_3^{0'}}{2} \quad (3.54b)$$

$$S = \frac{\frac{3}{5}\sigma - \frac{96}{7}\sigma^3}{\frac{E_V}{E_H} + \frac{108}{35}\sigma^2 + \frac{432}{35}\sigma^3} \quad (3.54c)$$

$$\frac{\bar{T}_3^0}{a^2 \Omega} = \frac{\frac{32}{5} \frac{E_V^2}{E_H^2} \sigma + \frac{6}{5} \sigma^2 + \frac{24}{5} \sigma^3}{\frac{E_V}{E_H} + \frac{108}{35} \sigma^2 + \frac{432}{35} \sigma^3} \quad (3.54d)$$

$$\frac{T_3^{0'}}{a^2 \Omega} = \frac{\frac{16}{5} \frac{E_V}{E_H} \sigma + \frac{12}{5} \sigma^2 + \frac{96}{7} \sigma^3}{\frac{E_V}{E_H} + \frac{108}{35} \sigma^2 + \frac{432}{35} \sigma^3} \quad (3.54e)$$

である．本研究では下端粘着条件を用いているので，式 (1.4f) は，

$$\gamma = 2 \frac{H}{T_{3l}^0} \left. \frac{\partial T_3^0}{\partial z} \right|_{\text{下端境界}} = 2 \frac{H}{T_{3l}^0} \frac{T_{3l}^0 - (-T_{3l}^0)}{H/2} = 8$$

とした．方程式 (3.54) を満たす解を S_{MF} で表す．^{*17}

図 3.14 は外部条件が (a)–(d) の場合について， S_{MI} (赤破線)， S_{MF} (赤実線)， S_t (黒実線)，および S_n (○, △, ×) の R_T 依存性を示している．ただし，対数軸を用いているため， $S_{MF} < 0$ の場合は描かれていない．力学的平衡状態が G1, C1 のときには， S_t は S_{MI} あるいは S_{MF} とよく一致している．しかし，G0, C0 のときには一致していない．これは，G1, C1 のときには $\Delta\theta \approx \theta_0 \Delta_H$ であり，松田の研究 (S_{MI} , S_{MF}) で仮定されていたように，子午面循環による温度場の変化は無視できる 状態だが，G0, C0 のときには $\Delta\theta \ll \theta_0 \Delta_H$ であり，子午面循環による温度場の変化は無視できない 状態だからである．H0, H1 のときも，松田の研究 (S_{MI} , S_{MF}) は S_t からずれている．これは，本研究では南北風速場の水平拡散も東西風速場のそれと同様に仮定したが，松田の研究 (S_{MI} , S_{MF}) では，東西風速場のみに作用する水平拡散が仮定されているからである．また，松田は，水平拡散が有限の大きさの場合 (S_{MF} , 赤実線) は，差動回転モードの効果で，スーパーローテーション強度はある値よりは大きくなると予測した．しかし，数値解 S_n は， S_{MF} が示す最大値を超える値をとっている．このことは，差動回転モードによるギアラシメカニズムの阻害効果が，松田が低自由度系で考察したとおりには，大自由度系では，働かないことを示している．

^{*17} 方程式 (3.54) は子午面循環の強度を表す内部パラメータ σ に値を与えることで，この方程式を満たす S_{MF} (解) と R_T の組み合わせが 1 つ求められる．広く網羅的に σ の値を与えることで，方程式 (3.54) を満たす解 S_{MF} の R_T 依存性を求めることができる．

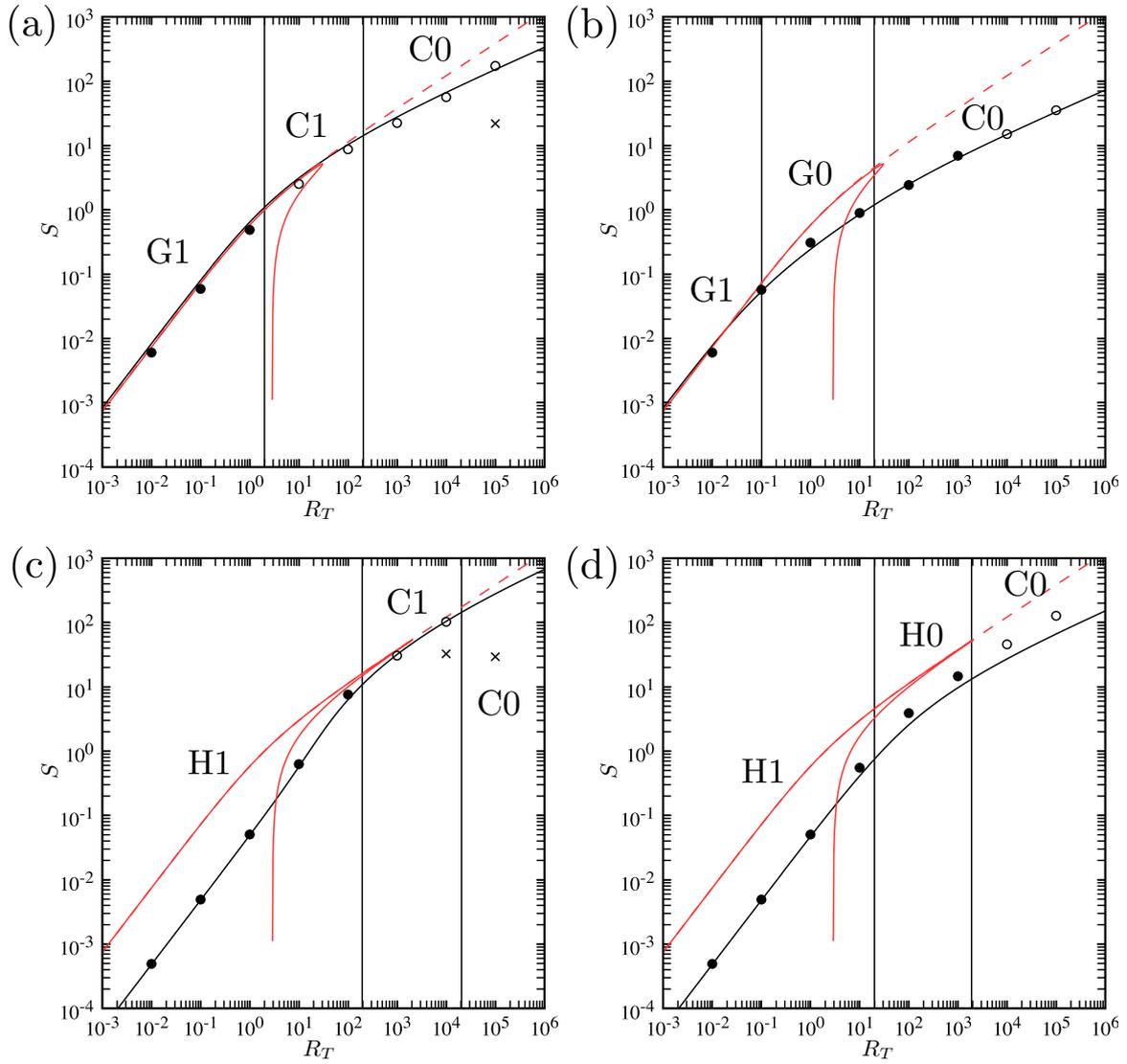


図 3.14 図 3.7 と同じ . ただし , 赤破線は S_{MI} , 赤実線は S_{MF} を表す .

3.5 まとめ

本章では、基礎方程式系 (2.1)–(2.6) をもとに、理論モデルを構築し、スーパーローテーション強度の見積もりを与えた。そして、数値実験により、この理論的見積もりの妥当性を確かめた。

理論モデルは、惑星大気大循環を特徴づける4つの無次元量—スーパーローテーション強度 (S)、地表付近の南北風速を代表的風速としたロスビー数 (R_{vB})、大気上端の南北風速を代表的風速としたロスビー数 (R_{vT})、鉛直平均温位場の極・赤道間温位差の放射対流平衡場のそれに対する割合 (β)—を未知数とする、連立4元代数方程式 (3.33) で記述される。この連立4元代数方程式は、無限自由度の偏微分方程式系である基礎方程式系に、定常状態と5つの物理量—相対角運動量の緯度積分量、大気上端の東西風、地表付近の南北風、大気上端の南北風、鉛直平均温位—の空間依存性を仮定することで、導かれた。

連立4元代数方程式 (3.33) から、 R_{vB} 、 R_{vT} 、 β を消去することで、 S の5次方程式 (3.34) が得られ、その正の解 S_t を、スーパーローテーション強度の理論的見積もりとした。また、5次方程式 (3.34) から、 S_t は、自転角速度 (Ω)、ニュートン加熱・冷却の緩和時定数 (τ)、水平エクマン数 (E_H)、鉛直エクマン数 (E_V) から構成される2つの外部無次元パラメータ $A = \pi^2 \tau \Omega E_V$ 、 $B = 20\pi^2 E_H E_V$ と外部熱ロスビー数 R_T の、3つの外部パラメータにのみ陽に依存することが明らかになった。

次に、5次方程式 (3.34) を3次方程式 (3.38) に近似することで、 S_t の近似解が代数的に求められることを示した (図 3.1)。さらに、 A 、 B 、 AB と1の大小関係が顕著な場合について、 S_t のより簡単な近似式を求めた (表 3.1, 図 3.2)。また、解の典型的な力学的平衡状態は、旋衡風平衡 [C]、地衡風平衡 [G]、水平拡散平衡 [H]、それぞれに対して、子午面循環による熱の移流が無視できる状態 [1] と無視できない状態 [0] があり、計6種類であることを示した (表 3.1, 図 3.2)。

理論モデルによるスーパーローテーション強度の見積もりの妥当性を確かめるために、基礎方程式系 (2.1)–(2.6) を十分な解像度で離散化した数値モデルで、時間発展計算を行うことで、定常状態、あるいは統計的平衡状態の数値解を得た (図 3.3–3.6)。そして、数値解から計算されるスーパーローテーション強度 S_n と理論的見積もり S_t を比較した (図 3.7)。解が深いジェットをもつ場合には、両者の相対誤差 $e_r = (S_t - S_n)/S_n$ は50%未満であり、 S_t は S_n を非常によく見積もっている。

数値解の子午面循環の構造は、 R_T が大きくなるにつれて、上下対称な形から、三角型に変化している (図 3.4)。これは、子午面循環の上下非対称化と傾斜の重ね合わせで説明できる。つまり、 R_T の増加にともない、 R_{vB} が大きくなり、 $R_{vB} \gtrsim \pi^2 E_V$ を満たせば、上層の極向きの風は弱く・厚くなり、下層の赤道向きの風は強く・薄くなり、子午面循環

は上下非対称化する (図 3.12 左) . 一方, $R_{vB} > (\tau\Omega)^{-1}$ を満たせば, 赤道下層と極上層でそれぞれ, 強い上昇流と下降流が生じるために, 子午面循環は傾斜する (図 3.12 中) . そして, この 2 つの変形過程の重ね合わせで子午面循環の構造が三角型になる (図 3.12 右) . さらに, 三角型循環は, 低中緯度上空を静的不安定にするため, 解が非定常になったと考えられる (図 3.13) .

最後に, 本章のスーパーローテーション強度の理論的見積もり S_t , 数値解 S_n , 松田の研究 (Matsuda, 1980, 参照: 1.3 節) の水平拡散を無限大としたときの見積もり S_{MI} , 水平拡散を有限としたときの見積もり S_{MF} を比較した (3.14) . その結果, S_t は S_{MI} や S_{MF} よりも, 広いパラメータ範囲で数値解 S_n のよい見積もりであることが示された . また, 差動回転モードによるギアラシメカニズムの阻害効果は, 大自由度系である本研究の数値モデルでは, 松田が低自由度系であるモード方程式系で考察したとおりには, 働かないことが示された .

3.6 補遺

3.6.1 5次方程式 (3.34) に正の解は1つだけ存在することの証明

5次方程式 (3.34) の左辺は、以下のように展開できる (読みやすさのため、 S を x に置き換える) .

$$\begin{aligned} \text{式 (3.34) 左辺} &= \left[x^2 + 2x + Bx \left(\frac{2+x}{1+x} \right) \right] \left[\frac{A}{2} x \left(\frac{2+x}{1+x} \right) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} [x^3 + (B+3)x^2 + 2(1+B)x] \left[\frac{A}{2} x^2 + (A+1)x + 1 \right] \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} [C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + (C_4 + B + 1)x^2 + 2(B+1)x] \end{aligned}$$

ここで、 C_1, C_2, C_3, C_4 はすべて正定数である。関数 $f(x)$ を、

$$f(x) \equiv [C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + (C_4 + B + 1)x^2 + 2(B+1)x] - 2R_T(1+x)^2$$

と定義すれば、方程式 $f(x) = 0$ の解が、5次方程式 (3.34) の解と等しくなる。また、 $f(x)$ の導関数と2次導関数は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 5C_1 x^4 + 4C_2 x^3 + 3C_3 x^2 + 2(C_4 + B + 1 - 2R_T)x + 2(B + 1 - 2R_T) \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= 20C_1 x^3 + 12C_2 x^2 + 6C_3 x + 2(C_4 + B + 1 - 2R_T) \end{aligned}$$

以下の3つの場合に分けて、5次方程式 (3.34) に正の解は1つだけ存在することを示す。[記号 (a)–(c) は、図 3.15 のそれと対応している。3.2節から 3.5節で用いている記号とは無関係である。]

(a) $(B + 1 - 2R_T) \geq 0$ の場合

$x > 0$ の範囲で $df/dx > 0$ なので、 $f(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する (図 3.15a) . さらに $f(0) = -2R_T < 0$ かつ $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ なので、 $f(x_S) = 0$ を満たす $x_S > 0$ が1つだけ存在する。

(b) $-C_4 \leq (B + 1 - 2R_T) < 0$ の場合

$df/dx|_{x=0} < 0$, かつ $x > 0$ の範囲で df/dx が単調増加なので、 $df/dx|_{x=x_0} = 0$ を満たす $x_0 > 0$ が1つだけ存在する。関数 $f(x)$ は、 $x = x_0$ のときに極小となり、 $x > x_0$ の範囲で単調に増加する (図 3.15b) . さらに $f(0) = -2R_T < 0$ かつ $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ なので、 $f(x_S) = 0$ を満たす $x_S > x_0 > 0$ が1つだけ存在する。

(c) $(B + 1 - 2R_T) < -C_4$ の場合

$df^2/dx^2|_{x=0} < 0$,かつ $x > 0$ の範囲で df^2/dx^2 は単調増加なので $df^2/dx^2|_{x=x_1} = 0$ を満たす $x_1 > 0$ が 1 つだけ存在する . すなわち , 導関数 df/dx が $x = x_1$ のときに極小となり , $x > x_1$ の範囲で単調に増加する . ゆえに , この場合も $df/dx|_{x=x_0} = 0$ を満たす $x_0 > 0$ が 1 つだけ存在する . よって , 関数 $f(x)$ は , $x = x_0$ のときに極小となり , $x > x_0$ の範囲で単調に増加する (図 3.15c) . さらに $f(0) = -2R_T < 0$ かつ $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ なので , $f(x_S) = 0$ を満たす $x_S > x_0 > 0$ が 1 つだけ存在する .

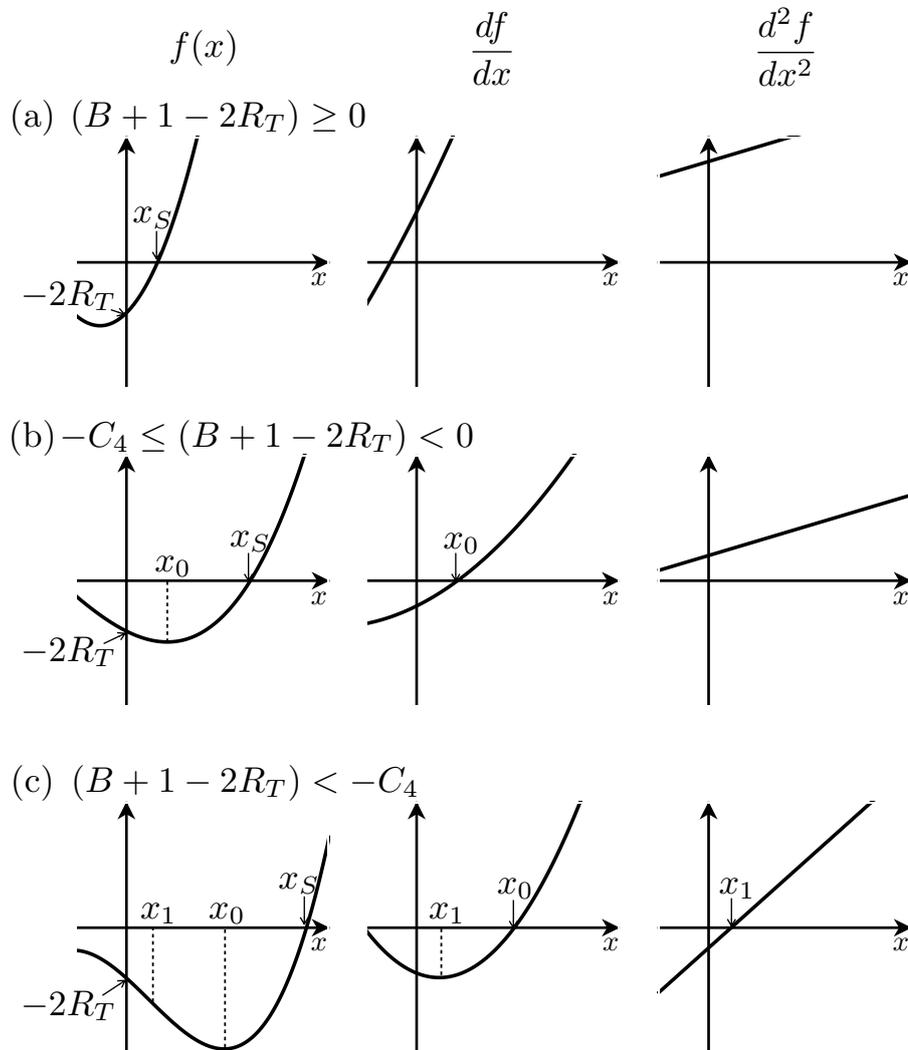


図 3.15 (a) $(B+1-2R_T) \geq 0$,(b) $-C_4 \leq (B+1-2R_T) < 0$,(c) $(B+1-2R_T) < -C_4$,各場合の $f(x)$ (左) , df/dx (中) , d^2f/dx^2 (右) の x 依存性 . x_S , x_0 , x_1 はそれぞれ , $f(x_S) = 0$, $df/dx|_{x=x_0} = 0$, $d^2f/dx^2|_{x=x_1} = 0$ を満たす .

3.6.2 式(3.40)の導出

3次方程式，

$$\frac{AC}{2}S^3 + \left(1 + AC + \frac{ABC^2}{2}\right)S^2 + (2 + BC)S \approx 2R_T \quad (\text{再掲 3.38})$$

の左辺第1項 (S^3 の項) が右辺 ($2R_T$) とほぼつり合うと仮定した場合，

$$S \approx S_3 = \left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}}$$

である．このとき，左辺第2，3項は $2R_T$ よりも小さくならないので，

$$(1 + AC + 0.5ABC^2) \left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{2}{3}} \ll 2R_T \quad \text{かつ} \quad (2 + BC) \left(\frac{4R_T}{AC}\right)^{\frac{1}{3}} \ll 2R_T \quad (3.55)$$

が満たされなければならない．不等式(3.55)を R_T について解けば，

$$\frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2} \ll R_T \quad \text{かつ} \quad \sqrt{\frac{(2 + BC)^3}{2AC}} \ll R_T$$

である．ただし，任意の $A > 0$ ， $B > 0$ ， $1 < C < 2$ に対して，

$$\sqrt{\frac{(2 + BC)^3}{2AC}} < \frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2}$$

が成り立つので， $S \approx S_3$ が成り立つための条件は，

$$\frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2} = R_{T2} \ll R_T \quad (3.56)$$

となる．

3次方程式(3.38)の左辺第2項 (S^2 の項) が右辺 ($2R_T$) とほぼつり合うと仮定した場合について，同様の操作を行うと，

$$S \approx S_2 = \sqrt{\frac{2R_T}{1 + AC + 0.5ABC^2}}$$

が成り立つための条件，

$$\frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)} = R_{T1} \ll R_T \ll \frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2} = R_{T2} \quad (3.57)$$

が得られる．

そして、式 (3.38) の左辺第 3 項 (S^1 の項) が右辺 ($2R_T$) とほぼつり合うと仮定した場合についても同様の操作を行う。

$$S \approx S_1 = \frac{2R_T}{2 + BC}$$

が成り立つためには R_T が、

$$\sqrt{\frac{(2 + BC)^3}{2AC}} \gg R_T \quad \text{かつ} \quad \frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)} \gg R_T$$

を満たす必要がある。ただし、任意の $A > 0$, $B > 0$, $1 < C < 2$ に対して、

$$\sqrt{\frac{(2 + BC)^3}{2AC}} > \frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)}$$

が成り立つので、 $S \approx S_1$ が成り立つための条件は、

$$\frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)} = R_{T1} \gg R_T \quad (3.58)$$

となる。以上、 $S \approx S_3$, S_2 , S_1 が成り立つための条件 (3.56)–(3.58) をまとめると、次のようになる。

$$S_t \approx \begin{cases} S_1 & (R_T \ll R_{T1}) \\ S_2 & (R_{T1} \ll R_T \ll R_{T2}) \\ S_3 & (R_{T2} \ll R_T) \end{cases} \quad (\text{再掲 3.40a})$$

$$R_{T1} \equiv \frac{(2 + BC)^2}{2(1 + AC + 0.5ABC^2)}, \quad R_{T2} \equiv \frac{2(1 + AC + 0.5ABC^2)^3}{A^2C^2} \quad (\text{再掲 3.40b})$$

第 4 章

力学的平衡状態にもとづく解の分類とそのパラメータ依存性

本章では、基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の解を力学的平衡状態にもとづいて分類し、そのパラメータ依存性を理論的および数値的に調べる。3.2.3 節では、南北方向の力のつり合い 3 種—旋衡風平衡 [C]，地衡風平衡 [G]，水平拡散平衡 [H]—と子午面循環による熱の移流が無視できるか [1]，無視できないか [0] によって計 6 種類の典型的な力学的平衡状態を示した。ここで「典型的」と記したのは、前章では二重不等号 (\ll など) で限定された場合について、C1 から H0 までの力学的平衡状態を求めていたからである。本章では、この二重不等号を一重不等号に置き換え、限定されていた範囲を拡大して、解を力学的平衡状態にもとづいて定義される 6 種類の 解型 に分類する。さらに、前章の理論的見積もりがギーラシメカニズムの前提条件 (3.29) を破る範囲を考えることで、理論モデルの有効範囲を見積もる。有効範囲外では、ギーラシメカニズムが働かないため、解は前章の (a) $R_T = 10^5$ の数値解で得られたような強い子午面循環と弱く浅いジェットの解になると予想される。本章では、このようなギーラシメカニズムが働いていない解も D 型解として分類に加え、計 7 種類とする。そして、それぞれの解型の境界を理論モデルから求める。その後、広いパラメータ範囲で数値解を計算し、解型の分布 (パラメータ依存性) を確かめる。

以下、4.1 節で解型を定義し、4.2 節で解型のパラメータ依存性を図示する。4.3 節では解型のパラメータ依存性を数値実験で確かめる。

4.1 解型の定義

本節ではまず、3.2.3 節の議論をもとに、C1, C0, G1, G0, H1, H0 の解型を定義する。その後、ギーラシメカニズムの前提条件 (3.29) をもとに、解が D 型になると予想される

場合の条件を求める．

4.1.1 C1, C0, G1, G0, H1, H0 型解

まずは，3.2.3 節で議論した南北運動方程式 (3.41) を再掲する．

$$\underbrace{S^2}_{\text{メトリック項}} + \underbrace{2S}_{\text{コリオリ項}} + \underbrace{BCS}_{\text{水平拡散項}} \approx \underbrace{2R_T\beta}_{\text{気圧傾度力項}} \quad (\text{再掲 3.41})$$

左辺 3 項のなかで，最大となる項によって，解型 CY, GY, HY ($Y = 1, 0$) を以下のよ
うに定義する．ただし，簡単のため $C = 1$ とする．

$$\begin{aligned} S > 2, S > B &\Rightarrow \text{メトリック項が最大} \quad \dots \quad \text{CY} \\ S \leq 2, B \leq 2 &\Rightarrow \text{コリオリ項が最大} \quad \dots \quad \text{GY} \\ B \geq S, B > 2 &\Rightarrow \text{水平拡散項が最大} \quad \dots \quad \text{HY} \end{aligned} \quad (4.1)$$

そして， $\beta = 0.5$ を境界として，解型 X1, X0 ($X = C, G, H$) を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \beta > 0.5 &\Rightarrow \text{熱の移流効果が小さい} \quad \dots \quad \text{X1} \\ \beta \leq 0.5 &\Rightarrow \text{熱の移流効果が大きい} \quad \dots \quad \text{X0} \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1.2 D 型解

前章では Gierasch (1975) や Matsuda (1980) が主張した，ギーラシメカニズムでスー
パーローテーションが維持されるために必要な，水平拡散の緩和時間が，子午面循環の循
環時間よりも十分に短く，かつ鉛直拡散の緩和時間よりも十分に短い，という条件，すな
わち，

$$E_H \gg R_{vB} \quad \text{かつ} \quad E_H \gg E_V \quad (\text{再掲 3.29})$$

が満たされている前提で，理論的見積もりを求めてきた．ところが，前章の理論モデル
では，外部パラメータ A, B を固定したとき， R_T が大きくなれば， S も大きくなる．そし
て，式 (3.33a) が示すように， S が大きくなれば，地表付近の南北風を代表的風速とした
ロスビー数 R_{vB} も大きくなる．すなわち， R_T がある値より大きければ，子午面循環の循
環時間が水平拡散の緩和時間よりも短くなり，上の条件の $E_H \gg R_{vB}$ が満たされなくな
る．つまり，理論モデルで見積もられた R_{vB} が，

$$R_{vB} > E_H \quad (4.3)$$

を満たす場合には，前章の理論モデルは機能しなくなり，(a) $R_T = 10^5$ の浅いジェット
の解のような，東西風が弱く子午面循環が強い解になると期待される．本章では以降，大
気全体が剛体回転に近く，深いジェットをもつ解 (すなわち，ギーラシメカニズムが働い
ている解) 以外の解を，すべて D 型解と呼ぶ．

表 4.1 本研究と Matsuda (1980) の解型の対応関係 .

本研究	Matsuda (1980)
C1	金星型温度風バランス (V)
C0	-
G1	地球型温度風バランス (E)
G0	-
H1	-
H0	-
D	直接循環バランス (D)

4.1.3 Matsuda (1980) との対応

基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の解の分類と、そのパラメータ依存性は松田 (Matsuda, 1980) によって研究されている。松田は、基礎方程式系の従属変数を少数の基本モードに展開して構築したモード方程式系を解析することで、解を、金星型温度風バランス (V)、地球型温度風バランス (E)、直接循環バランス (D) の 3 種類に分類した。^{*1}

本章で定義した解型と、Matsuda (1980) の解型との対応を、表 4.1 に示す。松田は、子午面循環による熱の南北移流と南北風にかかる水平拡散項を無視していたため、本研究の C0、G0、H1、H0 型に対応する解型は与えていない。

4.2 解型のパラメータ依存性

解型のパラメータ依存性を調べるには、横軸と縦軸にそれぞれ外部パラメータをとった、解型の地図 (レジームダイアグラム と呼ばれる) を描くのが有効である。このために、解型の境界を表す式を求める。S に関する 5 次方程式 (3.34) を R_T について解けば、

$$R_T(S, A, B) = \frac{1}{2} \left[S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right] \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right] \quad (4.4)$$

であり、 R_T を S, A, B の関数として書ける。この式に解型の境界を表す S の値を代入し、 B の値を固定することで、レジームダイアグラムの R_T - A 断面が描ける。同様に、 A を固定すれば、レジームダイアグラムの R_T - B 断面を描くことができる。

^{*1} 松田はさらに、V 型解と D 型解が同じ外部条件のもとで、ともに安定に存在できるパラメータ範囲があることを示している (参照：1.3.3 節)。

4.2.1 CY, GY, HY 型解の境界

解型 CY, GY, HY は式 (4.1) に示されているように, $S, B, 2$ の大小関係で定義される. ゆえに, これらの境界は, 以下のように書ける.

CY, GY, HY 型解の境界

CY と GY の境界:

$$R_T(2, A, B) = \frac{4}{9}(4A + 3)(B + 3) \quad \text{ただし } B \leq 2 \quad (4.5)$$

CY と HY の境界:

$$R_T(B, A, B) = \frac{B}{2} \left[B + 2B + B \left(\frac{2+B}{1+B} \right) \right] \left[\frac{AB}{2} \left(\frac{2+B}{1+B} \right) + 1 \right] \\ \text{ただし } B > 2 \quad (4.6)$$

GY と HY の境界:

$$B = 2 \quad \text{ただし } R_T < R_T(2, A, 2) = 20(4A + 3)/9 \quad (4.7)$$

4.2.2 X1 と X0 型解の境界

解型 X1 と X0 は式 (4.2) に示されているように, β と 0.5 の大小関係で定義されるため, $\beta = 0.5$ が X1 と X0 の境界を表す式となる. いま, β は式 (3.35) で S と A の関数として表される.

$$\beta = \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{再掲 3.35})$$

この式に, $\beta = 0.5$ を代入すれば, 次の S に関する 2 次方程式が得られる.

$$AS^2 + 2(A-1)S - 2 = 0 \quad (4.8)$$

その解は,

$$S = \frac{1}{A} - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{A^2} + 1} \quad (4.9)$$

である. いま, $A > 0$ なので, 2 次方程式 (4.8) の 2 つ解は, それぞれ正と負の実数解である. 3.1.5 節で議論したように, 本研究では $S > 0$ の解を考えているので, 式 (4.9) の正の解が X1 と X0 の境界を表す S の値 S_{10} となる.

$$S_{10} \equiv \frac{1}{A} - 1 + \sqrt{\frac{1}{A^2} + 1} \quad (4.10)$$

以上から, X1 と X0 の境界は, 次式で表される.

X1 と X0 の境界

$$R_T(S_{10}, A, B) = \frac{2}{A^2} \left(AB + 1 + \sqrt{1 + A^2} \right) \quad (4.11)$$

4.2.3 D 型解の境界

解が D 型になると期待されるのは、理論的見積もりが不等式 (4.3) を満たすときである。よって、D 型解と他の型の解の境界は、

$$R_{vB} = E_H \quad (4.12)$$

で表される。これは、式 (3.33a) を利用すれば、D 型解の境界を表す S の値 S_D が得られる。

$$S_D \equiv \frac{E_H}{\pi^2 E_V} = \frac{B}{20\pi^4 E_V^2} \quad (4.13)$$

これより、D 型解と他の型の解の境界は次式で表される。

D と他の解型の境界

$$R_T(S_D, A, B) = \frac{1}{2} \left[S_D^2 + 2S_D + BS \left(\frac{2 + S_D}{1 + S_D} \right) \right] \left[\frac{AS_D}{2} \left(\frac{2 + S_D}{1 + S_D} \right) + 1 \right] \quad (4.14)$$

なお、式 (4.14) は、第 3 章の理論モデルの適用限界を表しているとも言える。

4.2.4 レジームダイアグラム

解型の境界を表す式 (4.5)–(4.7), (4.11), (4.14) から、レジームダイアグラムを描くことができる。図 4.1 (a) は $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, $E_V = 10^{-3}$ のときの、レジームダイアグラムの R_T - A 断面を示している。 $B \leq 2$ であるため、HY 型の解は存在しない。一方、図 4.1 (b) は $B = 2\pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ のときの、レジームダイアグラムの R_T - A 断面を示している。 $B > 2$ であるため、GY 型の解は存在しない。また E_H が大きいため、レジームダイアグラムを描いた範囲には D 型解はなく、より R_T が大きく、 A が小さい領域に位置している。

図 4.2 (a) は $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $E_V = 10^{-3}$ の、(b) は $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ のときの、レジームダイアグラムの R_T - B 断面をそれぞれ示している。 B ($\propto E_H$) が小さくなるにつれて、D 型解の領域が大きくなっている。また、旋衡風平衡の解 (CY 型) が実現するのは、比較的狭い B の範囲である。

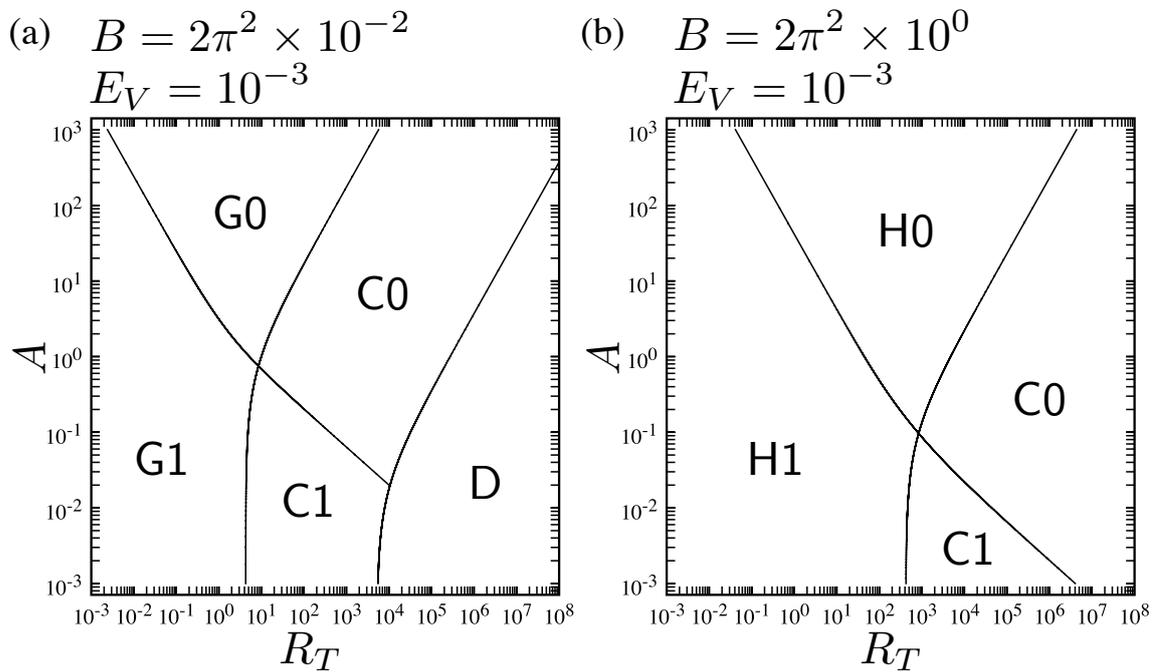


図 4.1 理論モデルから求めたレジームダイアグラムの R_T - A 断面 . ただし , (a) $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, $E_V = 10^{-3}$, (b) $B = 2\pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ である .

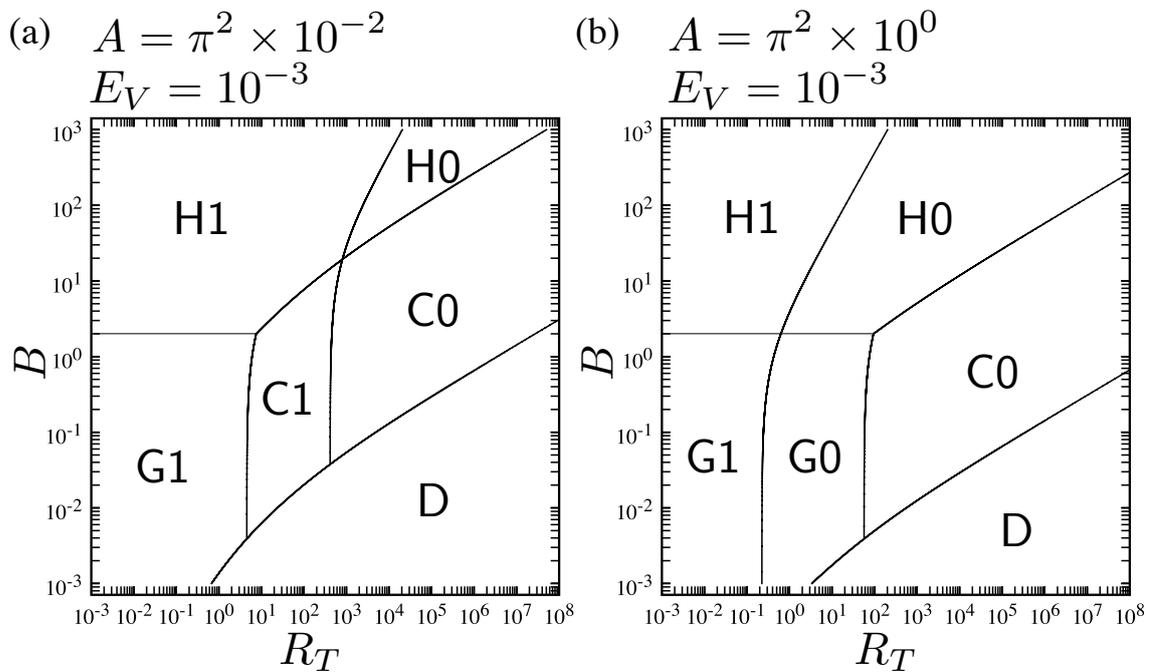


図 4.2 理論モデルから求めたレジームダイアグラムの R_T - B 断面 . ただし , (a) $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $E_V = 10^{-3}$, (b) $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ である .

4.3 数値実験

本節では、前節で理論モデルから求めたレジームダイアグラム (図 4.1, 4.2; 以後、理論レジームダイアグラムと呼ぶ) の妥当性を調べるために、数値実験を行う。外部パラメータ A, B, R_T の様々な組合せに対して、基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の解の安定平衡状態を数値的に求めて、解型を調べ、図 4.1, 4.2 と比較する。

4.3.1 実験設定

数値計算手法および実験設定は 3.3.1 節と同じである。ただし、表 4.2 の A, B, E_V の組合せに対して $R_T = 10^n$ ($n = -2, -1, \dots, 7$) の場合の、定常解または統計的平衡状態にある解の時間平均場を求める。^{*2} 本章では $E_V = 10^{-3}$ で固定する。また、等温位静止大気を初期条件とした時間発展計算で D 型解が得られた場合は、1桁小さい R_T の非 D 型の解を初期値とした時間発展計算を行う。なお、表 4.2 の組合せは、図 4.1, 4.2 のレジームダイアグラムを 1桁間隔でおおよそ覆いつくしている。

4.3.2 数値解の解型分布

図 4.3 は $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$ で $A = \pi^2 \times 10^m$ ($m = -3, -2, -1, 0, 1$) の場合 (図 4.1a に対応) の S_n (上段), R_{vBn}, R_{vTn} (中段), β_n (下段) の R_T 依存性を示している。記号の使い方は図 3.7–3.9 と同様である。ただし、水平破線は CY 型と GY 型の境界値 $S = 2$ (上段), D 型になると期待される領域の境界値 $R_{vB} = E_H$ (中段), X1 型と X0 型の境界値 $\beta = 0.5$ (下段) を示している。 $A = \pi^2 \times 10^{-3}$ の $R_T \geq 10^5$ および $A = \pi^2 \times 10^{-2}$ の $R_T = 10^7$ の場合は数値モデルの解像度不足が原因で数値解が得られなかった。

同様に、図 4.4–4.6 はそれぞれ、表 4.2 で示されている A, B の場合の無次元量を示している。ただし、 $B > 2$ の場合、上段の水平波線は $S = B$ を表す。なお、無次元量の欠損は、その外部条件では数値モデルの解像度が不足していたため、適切な数値解が得られなかったことを示している。

4.1.1 節で導入した定義をもとに、図 4.3–4.6 の S_n, β_n の値から数値解の解型のうち C1, C0, G1, G0, H1, H0 の判定を行う。一方、大気全体が剛体回転的ではない、または深いジェットがない解を D 型解と判定する。このようにして得られる数値解の解型の分布を、図 4.7, 4.8 に示す。ここで、塗りつぶし記号は定常解を、白抜き記号は非定常解

^{*2} 本研究で行った時間発展計算で得られた定常解や統計的平衡状態にある解の時間平均場 (無次元の東西風, 午面流線関数, 温位) はすべて付録 B に図集として集録されている。

を示しており，2つの記号の重なりは，多重安定平衡状態として得られた2つの解型を示している．実線は，理論レジームダイアグラムを表している．

表 4.2 数値実験で用いた $A, B, E_V, \tau\Omega, E_H$ の値．ただし， $A = \pi^2\tau\Omega E_V$ ， $B = 20\pi^2 E_H E_V$ である．(a)–(d) は，値の組合せが 3.3 節の数値実験と同じであることを示している．灰色で表示した欄は，値の組合せが表内で重複していることを表す．対応する図はそれぞれ，そのパラメータ範囲のレジームダイアグラム，数値解の無次元量，数値解の解型のパラメータ依存性を表す図である．

対応する図	A	B	E_V	$\tau\Omega$	E_H
図 4.1a, 4.3, 4.7a	$\pi^2 \times 10^1$	$2\pi^2 \times 10^{-2}$	10^{-3}	10^4	1
	(b) $\pi^2 \times 10^0$			10^3	
	$\pi^2 \times 10^{-1}$			10^2	
	(a) $\pi^2 \times 10^{-2}$			10	
	$\pi^2 \times 10^{-3}$			1	
図 4.1b, 4.4, 4.7b	$\pi^2 \times 10^1$	$2\pi^2 \times 10^0$	10^{-3}	10^4	10^2
	$\pi^2 \times 10^0$			10^3	
	(d) $\pi^2 \times 10^{-1}$			10^2	
	$\pi^2 \times 10^{-2}$			10	
	(c) $\pi^2 \times 10^{-3}$			1	
図 4.2a, 4.5, 4.8a	$\pi^2 \times 10^{-2}$	$2\pi^2 \times 10^0$	10	10^2	
		$2\pi^2 \times 10^{-1}$		10	
		$2\pi^2 \times 10^{-2}$		1	
		$2\pi^2 \times 10^{-3}$		10^{-1}	
図 4.2b, 4.6, 4.8b	$\pi^2 \times 10^0$	$2\pi^2 \times 10^0$	10^3	10^2	
		$2\pi^2 \times 10^{-1}$		10	
		$2\pi^2 \times 10^{-2}$		1	
		$2\pi^2 \times 10^{-3}$		10^{-1}	

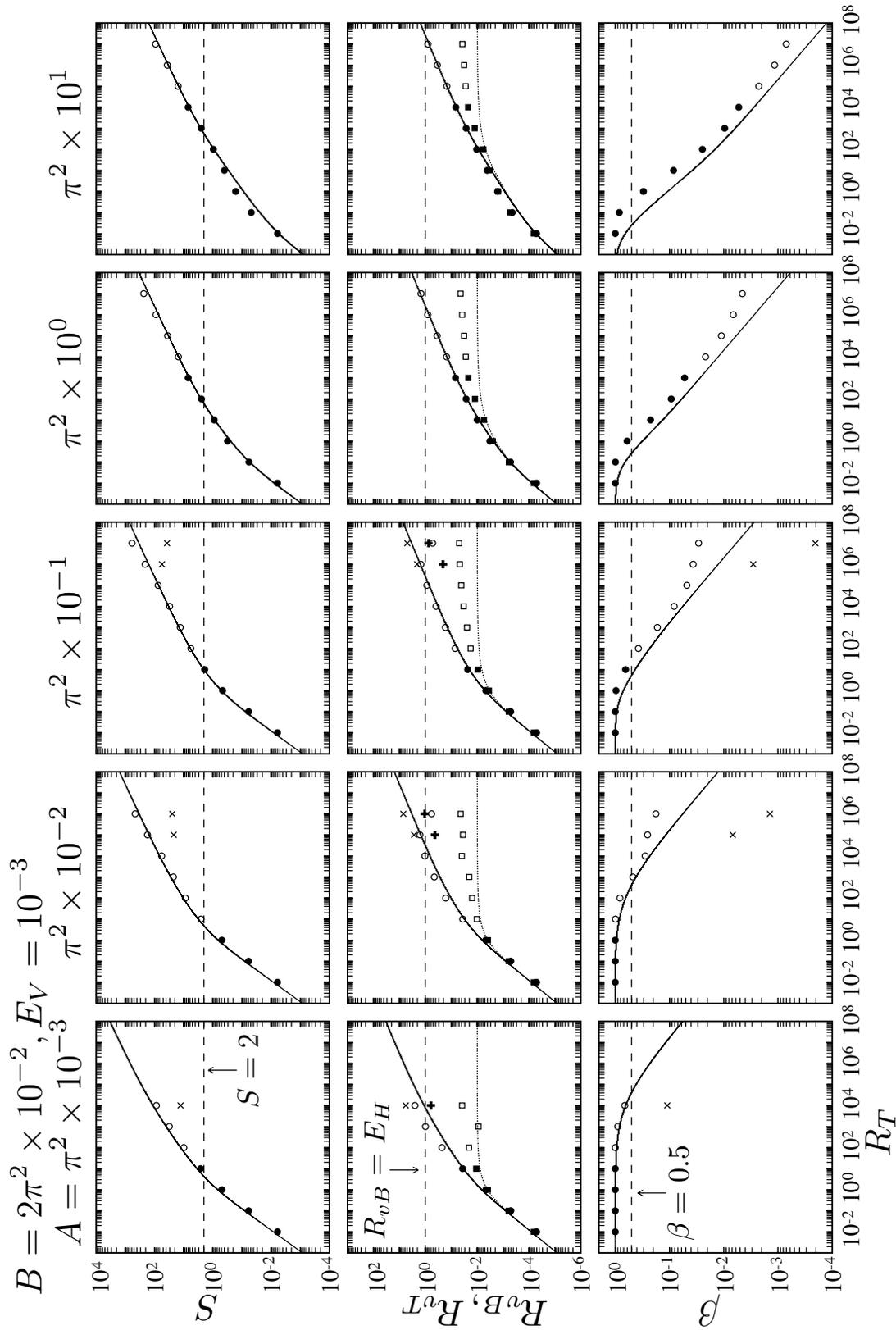


図 4.3 $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}, A = \pi^2 \times 10^m$ ($m = -3, -2, -1, 0, 1$) の場合 (図 4.1a に対応) の S_n (上段), R_{vBn}, R_{vTn} (中段), β_n (下段) の R_T 依存性. 記号の使い方は図 3.7-3.9 と同様である. ただし, 水平破線は $S = 2$ (上段), $R_{vB} = E_H$ (中段), $\beta = 0.5$ (下段) を示している.

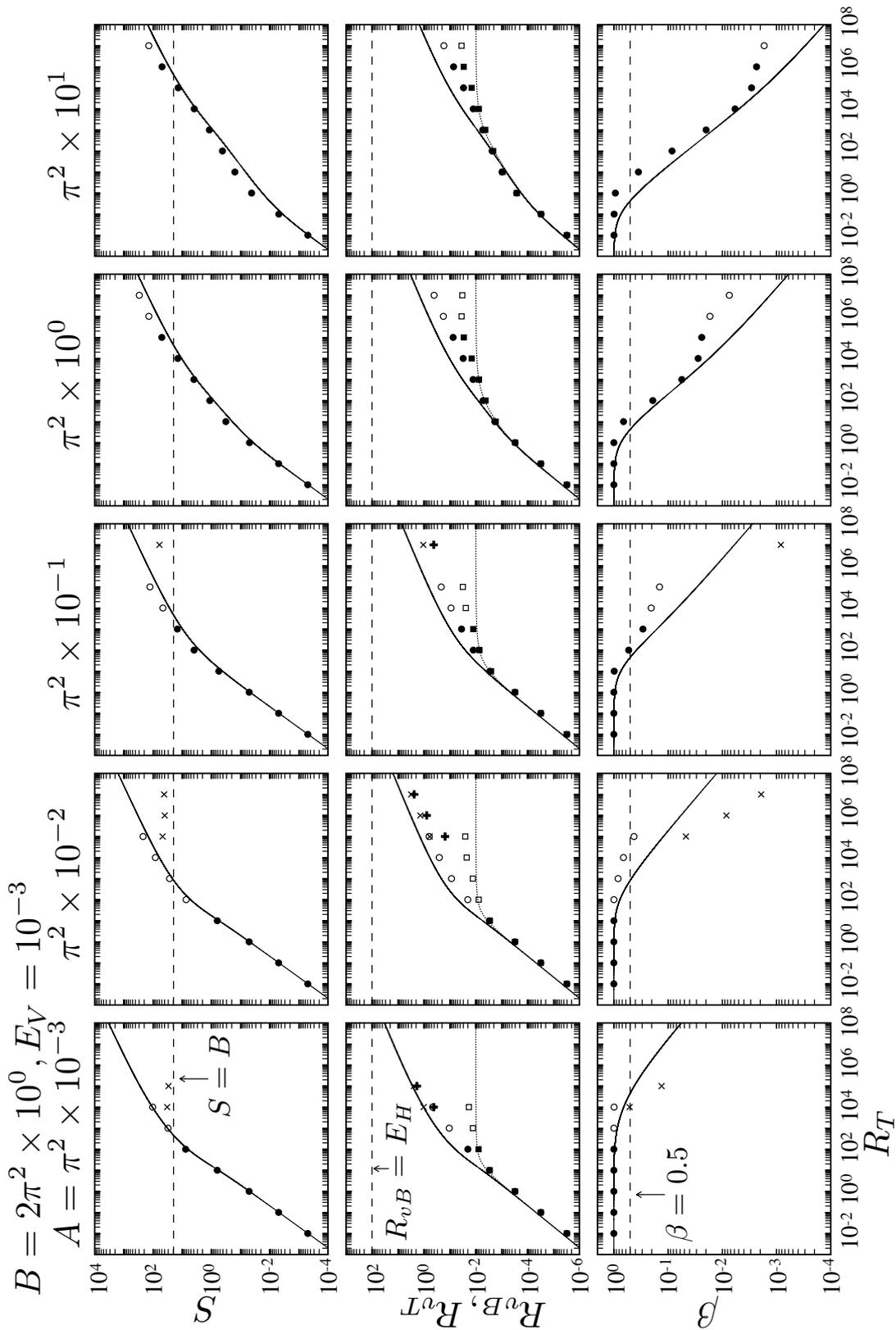


図 4.4 図 4.3 と同じ . ただし , $B = 2\pi^2$, $E_V = 10^{-3}$, $A = \pi^2 \times 10^m$ ($m = -3, -2, -1, 0, 1$) の場合 (図 4.1b に対応) . 上段の水平波線 $S = B$ を示している .

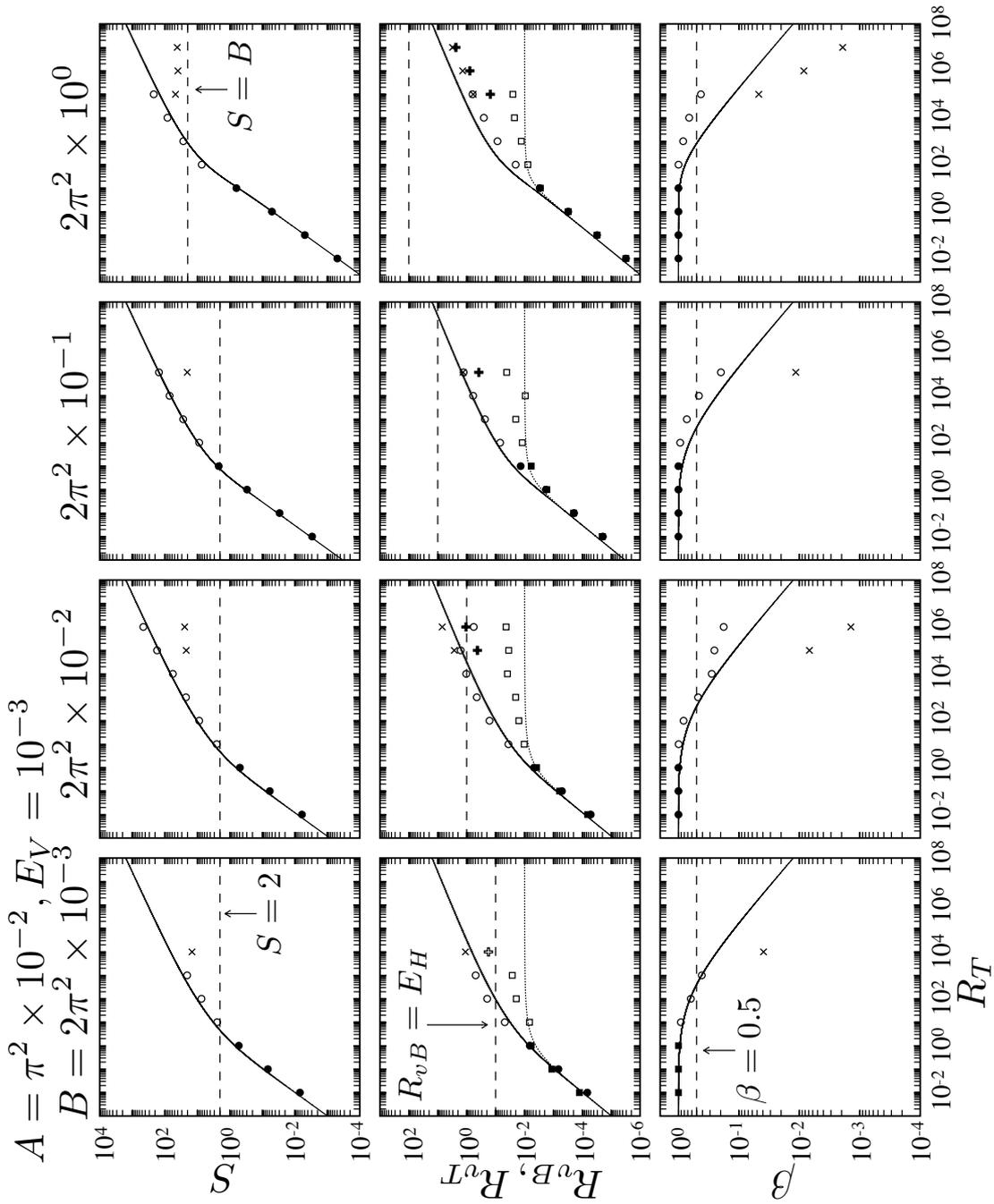


図 4.5 図 4.3 と同じ。ただし、 $A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}, B = 2\pi^2 \times 10^m (m = -3, -2, -1, 0)$ の場合 (図 4.2a に対応)。上段右端の水平波線 $S = B$ を示している。

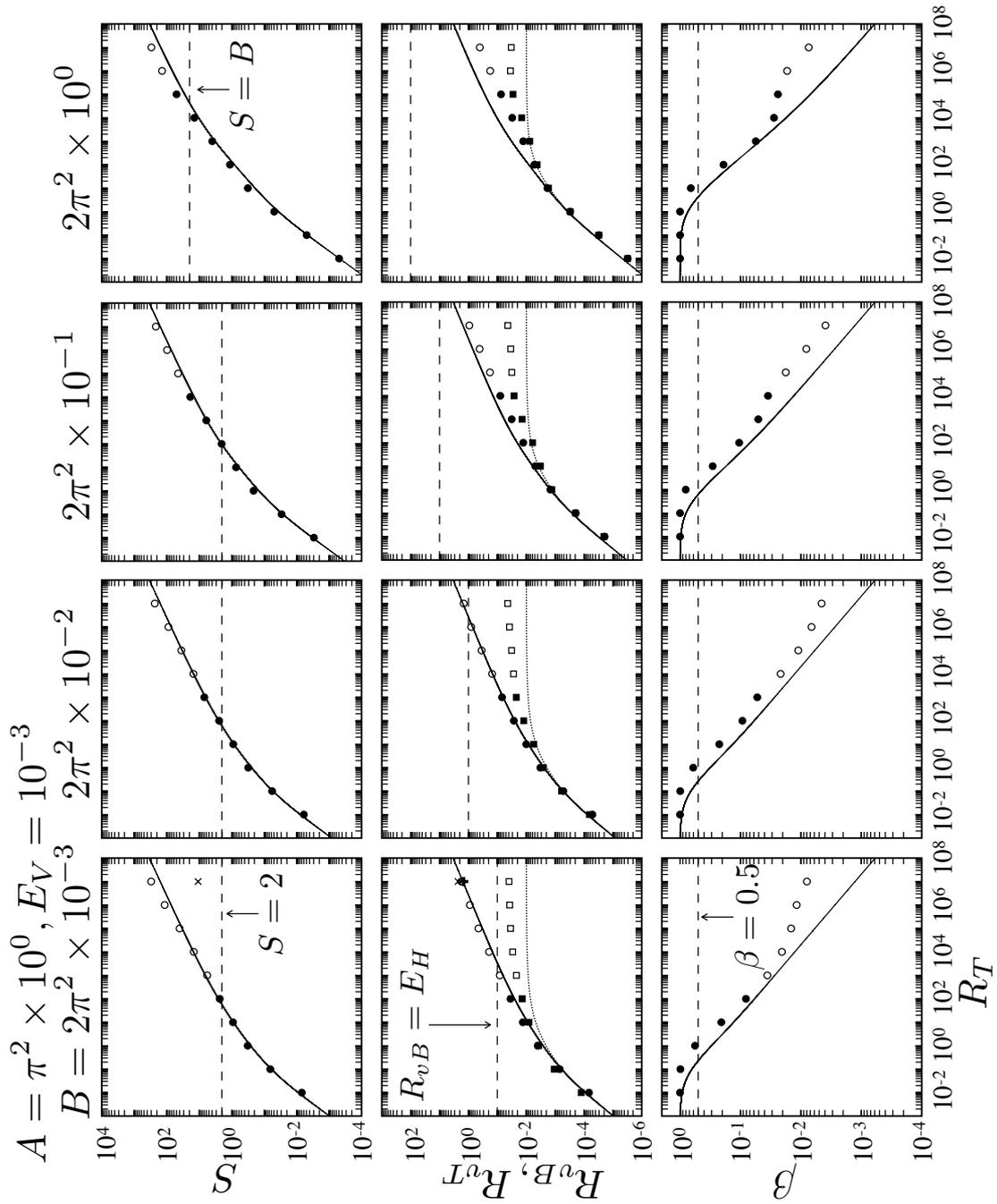


図 4.6 図 4.3 と同じ . ただし , $A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}, B = 2\pi^2 \times 10^m (m = -3, -2, -1, 0)$ の場合 (図 4.2b に対応) .
 上段右端の水平波線 $S = B$ を示している .

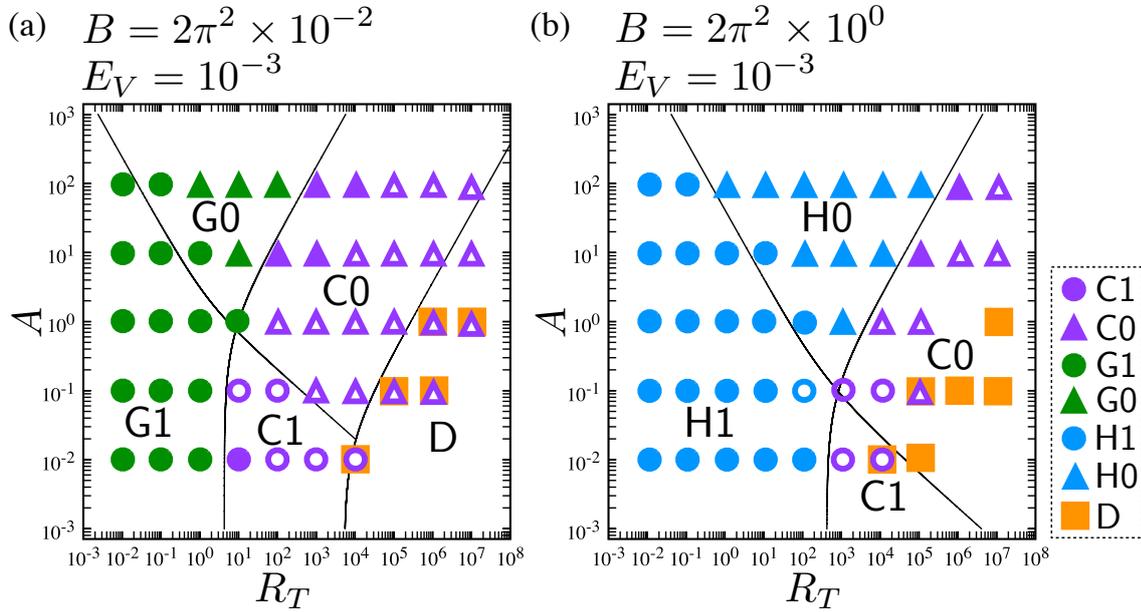


図 4.7 数値解の解型の R_T (横軸) と A (縦軸) に対する依存性．塗りつぶし記号は定常解，白抜き記号は非定常解を表す．2 つの記号の重なりは，多重安定平衡状態が得られたことを表す．実線は，理論レジームダイアグラムを表す．

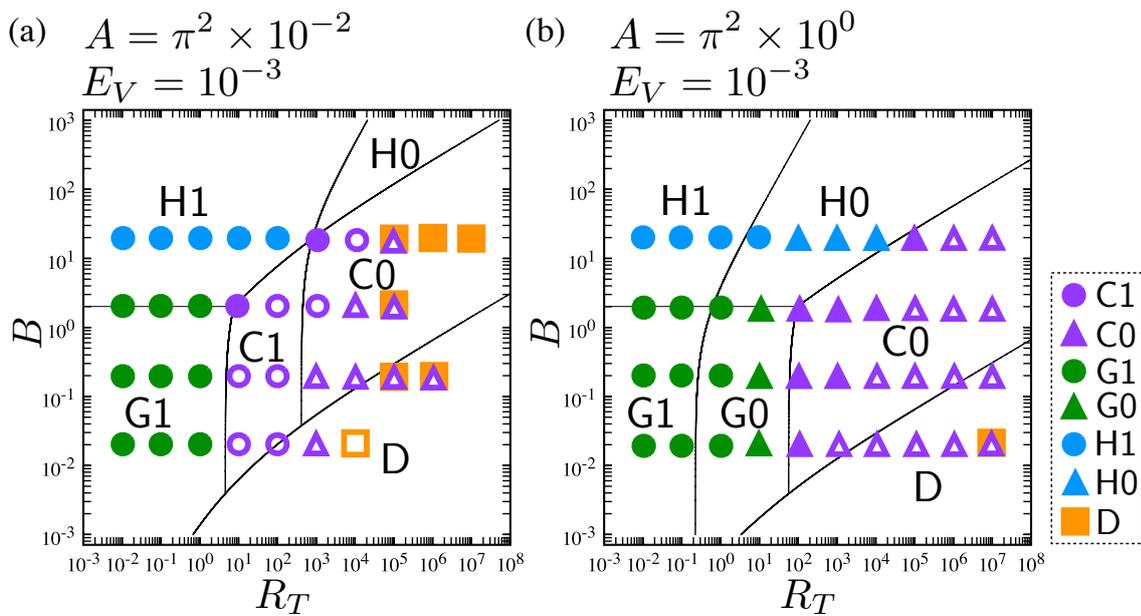


図 4.8 図 4.7 と同じ．ただし， R_T (横軸) と B (縦軸) に対する依存性．

数値解の GY (緑) と CY (紫), HY (青) と CY (紫) の境界は理論 (実線) とよく一致している。これは, スーパーローテーション強度の理論的見積もり S_t と数値解から計算される S_n の差が, 非常に小さいからである。一方, 数値解の X1 (丸) の分布範囲は理論よりも広く, X0 (三角) 側にはみ出している。これには, D 型解以外では $\beta_n > \beta_t$ であり, β の理論的見積もりが過小評価になっていることが影響している。 $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$ (図 4.7a) の場合, D 型解は理論レジームダイアグラムとほぼ同じ位置に分布している。ただし, D 型解と同時に C1 または C0 型解が多重安定平衡状態として得られている。しかし, $B = 2\pi^2 \times 10^0$ (図 4.7b) の場合, R_T が大きく, A が小さい領域では, R_{vB} が不等式 (4.3) を満たしていないにも関わらず, D 型解になっている。 $A = \pi^2 \times 10^{-2}$ の断面 (図 4.8a) でも, D 型解の分布に関して同様の特徴がある。すなわち, $B < 1$ の範囲では, 理論レジームダイアグラムにおよそ一致するように D 型解が分布しているのに対して, $B \geq 1$ の範囲では, 理論モデルは C0 型を予測しているが, 数値解は D 型解である。一方, $A = \pi^2 \times 10^0$ (図 4.8b) の $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ では, D 型解になると予測されている領域深くでも, 数値解は C0 型である。

4.4 考察

本節では, まず, 多重安定平衡状態について考察し, その後, 数値解の解型の分布が理論レジームダイアグラムと大きく異なっている場合について考察する。

4.4.1 多重安定平衡状態

本研究の数値実験で多重安定平衡状態が得られたパラメータ領域は, 理論レジームダイアグラムの CY 型解と D 型解の境界付近の, D 型解よりの領域である (図 4.7a)。そして, 多重安定平衡状態が得られた場合, 静止大気を初期条件としたときには D 型解が, 強い東西風シアをもつ大気 (パラメータ領域近傍の CY 型解) を初期条件としたときには CY 型解が得られた。ここで, 本研究では子午面循環の無次元循環時間として R_{vB}^{-1} を使用してきたことに注意したい。 R_{vB}^{-1} は地表付近の南北風をもとに見積もられる無次元循環時間である。式 (3.33a), (3.33b) より, $S \gg 1$ のときには $R_{vB}^{-1} \ll R_{vT}^{-1}$ になる。このとき, 上空の無次元循環時間 R_{vT}^{-1} は, R_{vB}^{-1} よりも長いので, ギーラシメカニズムが働く可能性がある。つまり, 強い東西風シアをもつ大気を初期条件とすれば, はじめから $R_{vB}^{-1} \ll R_{vT}^{-1}$ が満たされ, ギーラシメカニズムにより CY 型解が維持されうる。しかし, $R_{vB}^{-1} \ll R_{vT}^{-1}$ になるのは, 上空に十分な強さの東西風が吹いている場合に限られる。静止大気から時間発展計算する場合には, はじめに, $R_{vT}^{-1} \approx R_{vB}^{-1} \ll E_H^{-1}$ が成り立ち, そのまま, ギーラシメカニズムが働けずに, 上空に強い東西風を形成できず, D 型解になる。

以上の考察から，理論レジームダイアグラムで D 型解の領域では，同時に CY 型の解が多重安定平衡状態として存在することが期待される．ところが，レジームダイアグラムの D 型の領域のすべての数値解で多重安定平衡状態が得られているわけではない．これらの場合は，初期条件をより工夫することで，別の安定平衡状態が得られるかもしれないし，あるいは，安定平衡状態が 1 つだけなのかもしれない．

4.4.2 理論レジームダイアグラムと異なる場合

$A = \pi^2 \times 10^0$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ で R_T が大きい場合には， $R_{vB} > E_H$ にも関わらず，D 型解ではなく，C0 型解が得られた (図 4.8b)．前小節の考察から，このパラメータ領域でも多重安定平衡状態の存在が期待される．ところが，静止大気を初期条件とした時間発展計算で，D 型解ではなく，C0 型解が得られている．もちろん，初期条件を工夫すれば D 型解が得られるかもしれない．しかし，この実験結果は，放射緩和時間が長い (A が大きい) 場合には， E_H がある程度小さくても C0 型解が得られやすい，あるいは D 型にはならないということを示している．これは，現実大気におけるギーラシメカニズムの可能性を考えるうえでは，有利な結果である．なぜならば，金星やタイタンの大気は，放射緩和時間が長いので，自転軸対称モデルにおける水平拡散，すなわち非軸対称擾乱による運動量の赤道向き輸送量が少なくても，ギーラシメカニズムでスーパーローテーションが生成・維持される可能性を示す結果だからである．

次に， $A < 1$, $B > 1$ で R_T が大きい場合 (図 4.7b) について考察する．この場合， $R_{vB} < E_H$ であるため，ギーラシメカニズムが働き，深いジェットをもつスーパーローテーションの解が得られると期待されたが，D 型解が得られた．実は，この D 型解では，水平拡散が弱すぎるわけではない．図 4.9 は $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^0$, $R_T = 10^7$ の数値解 (D 型) の $z = H/2$ における相対角運動量 $M_r = ua \cos \phi$ の分布を示している (実線)．このときの $M_r(\phi, H/2)$ は，絶対角運動量 $M = (u + a\Omega \cos \phi)a \cos \phi$ をゼロにする M_r の分布 $-a^2\Omega \cos^2 \phi$ (破線) に近い．東西風が強い上空を除いて，他の高度でも M_r の分布は同様であった．つまり，強い水平拡散により，大気の大部分で $M \approx 0$ が維持されている．このとき，子午面循環による角運動量の移流がほとんどゼロになるので，ギーラシメカニズムが働かなかったのであろう．

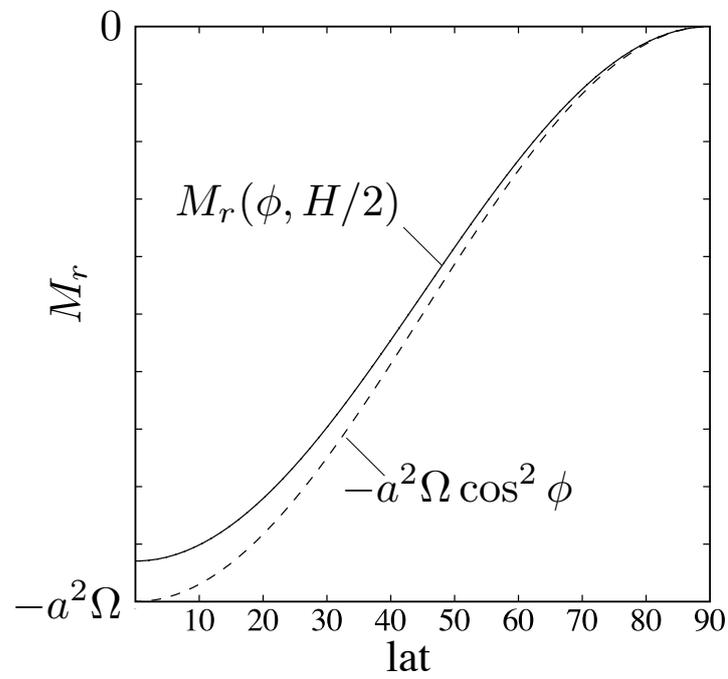


図 4.9 $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^0$, $R_T = 10^7$ の数値解 (D 型) の $z = H/2$ における相対角運動量 $M_r = ua \cos \phi$ の分布 (実線) . 破線は $M_r = -a^2 \Omega \cos^2 \phi$ を表す .

4.5 まとめ

本章では、3.2.3節で導入した6種類の力学的平衡状態をもとに、解型としてC1, C0, G1, G0, H1, H0を定義し、これにギーラシメカニズムが働かない直接循環の解型Dを加えて、基礎方程式系(2.1)–(2.6)の解を分類した。そして、数値実験で求めた解型の分布が、理論モデルを用いて描いた解型のレジームダイアグラムと、おおよそ一致することを確かめた。

D型解は、理論モデル(式3.33)から見積もられる子午面循環の無次元循環時間 R_{vB}^{-1} が、水平拡散の無次元緩和時間 E_H^{-1} よりも短い場合の解型として定義した。言い換えれば、D型解の境界は、本研究の理論モデルの適用限界を表している。なぜなら、 $R_{vB}^{-1} < E_H^{-1}$ であれば、水平拡散の強さが不十分なため、ギーラシメカニズムが働かなくなり、理論モデルを構築する際に仮定した、大気上端の東西風の空間依存性 $u(\phi, H) \approx \frac{3U}{2} \cos \phi$ が妥当でなくなるからだ。

5次方程式(3.34)を R_T について解いた式(4.4)を利用することで、解型の境界を表す式(4.5)–(4.7), (4.11), (4.14)を求めた。図4.1, 4.2は、これらの式をもとに描かれた、理論レジームダイアグラムを示している。

広いパラメータ範囲で、数値モデルによる時間発展計算を行い、平衡状態の数値解を得た。それぞれの数値解から、無次元量 $S_n, R_{vBn}, R_{vTn}, \beta_n$ を計算し(図4.3–4.6)、解型を判定した。数値解の解型の分布は、理論レジームダイアグラムとおおよそ一致した(図4.7, 4.8)。

数値実験では、D型解が予想されたパラメータ範囲でも、東西風シアをもつ初期値から計算される安定平衡状態、あるいは静止大気から計算される安定平衡状態として、C1, C0型の(強いスーパーローテーションの)解が得られた。これは、実際の惑星大気において、非軸対称擾乱による運動量の赤道向き輸送量が少なくても、ギーラシメカニズムによってスーパーローテーションが維持される可能性を示す結果である。

第 5 章

解の水平エクマン数依存性

4.1.2 節と 4.2.3 節では，第 3 章で構築した理論モデルの適用限界を考察することで，D 型解の存在範囲を見積もった．ところが，4.3 節の数値実験では， $A = \pi^2 \times 10^0$ ， $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ で R_T が大きい場合には，水平エクマン数 E_H が R_{vB} より小さくても，C0 型の解，すなわちギーラシメカニズムでスーパーローテーションが維持されている解が得られた．本章では，さらに E_H が小さい場合の，解の E_H 依存性を調べる．

なお，本章の内容は Yamamoto et al. (2009) が基礎となっているが，本学位論文のなかでの一貫性を保つために，数値実験の設定を若干変更して，再計算を行っている．本章の実験結果と Yamamoto et al. (2009) の実験結果の差異については，5.4.2 節で考察する．

5.1 ハドレー循環のヘルド・ハウモデルとの関係

実は，基礎方程式系 (2.1)–(2.6) は，地球型ハドレー循環の理論モデルを提案した Held and Hou (1980) が基礎とした方程式系と，ほぼ同じである（この理論モデルはヘルド・ハウモデルと呼ばれている）．表 5.1 は，前章までの本研究と Held and Hou (1980) の相違点を示している．相違点 (1) に関して，Hou (1984) が，ヘルド・ハウモデルを $R_T \gg 1$ の範囲に拡張している．また，Williams (2003) は，Held and Hou (1980) の結果の，相違点 (2) と (3) に対する依存性を調べ，ヘルド・ハウモデルの要点であるハドレー循環の幅や大気上端の東西風速分布に，大きな違いがあらわれないことを示している．

表 5.1 と上記の先行研究の結果をもとに考えると， E_H をより小さくしていけば，基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の解は，次節で述べるヘルド・ハウモデルの理論解に近づくはずである．また，ヘルド・ハウモデルでは $E_H = 0$ であることから，水平拡散の緩和時間が，子午面循環の循環時間よりも十分に長いとき，すなわち，

$$E_H^{-1} \gg R_{vB}^{-1} \quad (5.1)$$

表 5.1 本研究 (前章まで) と Held and Hou (1980) との相違点 .

	本研究 (前章まで)	Held and Hou (1980)
(1) R_T の大きさ	$10^{-2} \leq R_T \leq 10^7$	$0.06 \leq R_T \leq 0.24$
(2) 運動量の下端境界条件	粘着条件	風速に比例する摩擦条件
(3) 放射対流平衡場の安定度	中立	安定
(4) E_H の大きさ	$10^{-1} \leq E_H \leq 10^2$	$E_H = 0$

が満たされるときに、解はヘルド・ハウモデルの理論解とほぼ等しくなると予想される .

5.2 Held and Hou (1980) の理論モデルと数値解

次節以降で数値解を記述し、考察するのに必要となるため、本節では、Held and Hou (1980) の理論モデル (ヘルド・ハウモデル) と数値解を簡単に紹介する .

5.2.1 理論モデル

Held and Hou (1980) は上述の基礎方程式系において、鉛直拡散係数の極限 $\nu_V \rightarrow 0$ を考え、以下の仮定をおくことで、ハドレー循環の幅 ϕ_H を理論的に求めた .

仮定 1 : 子午面循環

ハドレー循環は赤道から緯度 ϕ_H まで広がり、それより極側に子午面循環はない .

仮定 2 : 温位場

ハドレー循環の内側では、地表付近で $u \approx 0$ 、大気上端で $u = u_M$ (参照 : 仮定 3) の東西風と温度風平衡*1にある温位場で、ハドレー循環の外側では放射対流平衡温位場 θ_e になる .

仮定 3 : 大気上端の東西風速分布

ハドレー循環の内側では、赤道上空で $u = 0$ だった空気塊が絶対角運動量 $M = (u + a\Omega \cos \phi)a \cos \phi$ を保存しながら、極向きに移流されたときの風速分布 u_M であり、ハドレー循環の外側では、地表付近で $u \approx 0$ として、 θ_e と温度風平衡にあ

*1 メトリック項とコリオリ項をともに含む温度風平衡 .

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2u\Omega \sin \phi \right) = -\frac{g}{a\Theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$$

る風速分布 u_E である .

$$u(\phi, H) = u_{\text{HH}} \equiv \begin{cases} u_M = a\Omega \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} & (0 \leq \phi < \phi_H) \\ u_E = a\Omega \left[\left(1 + \frac{2R_T z}{H}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cos \phi & (\phi_H \leq \phi \leq \pi/2) \end{cases} \quad (5.2)$$

これらの仮定をもとに, Held and Hou (1980) はハドレー循環内のエネルギー収支のつり合いと $\phi = \phi_H$ での温位の連続性を考えることで, ϕ_H の R_T 依存性が,

$$\phi_H = \left(\frac{5}{3} R_T \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

で書かれることを示した . その後, Hou (1984) がヘルド・ハウモデルを $R_T \gg 1$ の場合にも拡張し, ϕ_H の R_T 依存性は,

$$\sin \phi_H = \begin{cases} \left(\frac{5}{3} R_T \right)^{\frac{1}{2}} & (R_T \ll 1) \\ 1 - \frac{3}{8R_T} & (R_T \gg 1) \end{cases} \quad (5.4)$$

であることを示した .

5.2.2 数値解

Held and Hou (1980) は, 基礎方程式系を十分な解像度で離散化した数値モデルで時間発展計算を行い, 定常状態の数値解は, 鉛直拡散係数が小さくなるにつれて, 上述の理論解に近づくことを示した . 図 5.1 は, その数値解の子午面流線関数と東西風速の分布を示している . 鉛直拡散係数が小さくなるほど, ハドレー循環の幅が狭まり, 理論解 $\phi_H = 25^\circ$ ($R_T = 0.12$ としている) に近づいている . 図 5.2 は, 数値解の大気上端での東西風速分布を示している . こちらも, 数値解は, 鉛直拡散係数が小さくなるにつれて, 上述の理論解 (実線) に近づいている .

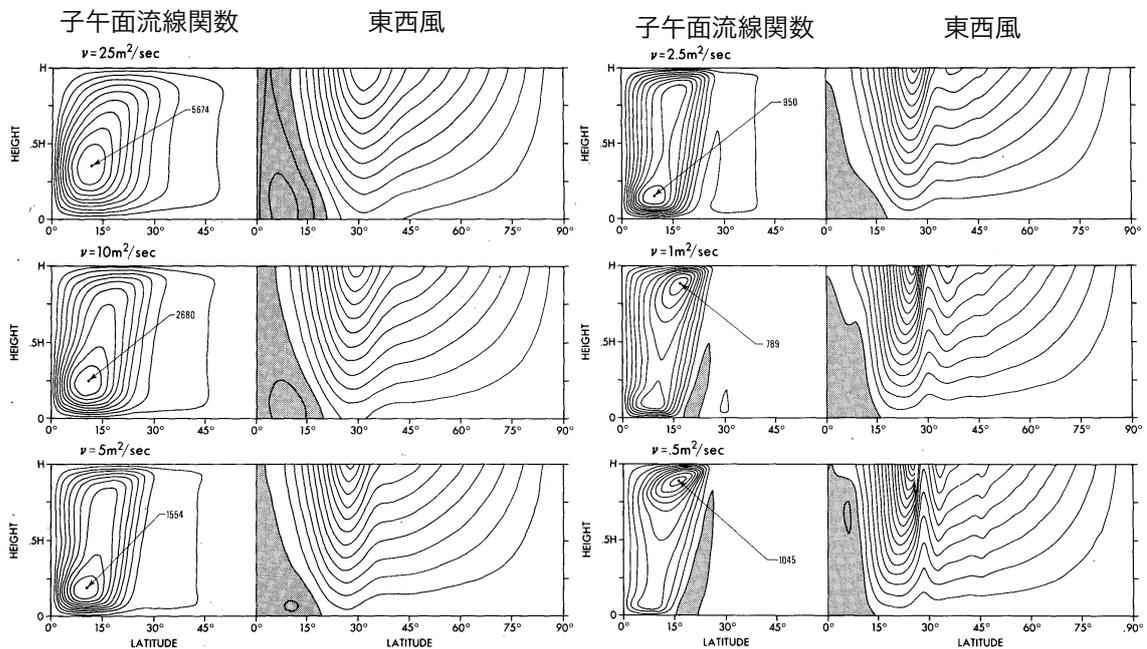


図 5.1 定常状態の数値解の子午面流線関数と東西風速分布．鉛直拡散係数の値は ν で示されている．子午面流線関数の等値線間隔は，それぞれの最大値の 10 分の 1 である．東西風速分布の等値線間隔は 5 m/s である．陰影は負の領域を表す．(Held and Hou, 1980, Fig. 4)

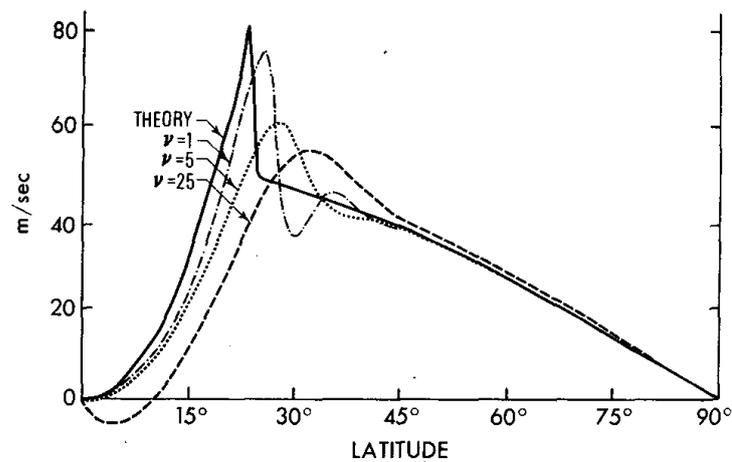


図 5.2 大気上端の東西風速分布．実線は理論解を表し，その他の線は数値解を表している．鉛直拡散係数の値は ν で示されている．(Held and Hou, 1980, Fig. 5)

表 5.2 数値実験で用いた $A, B, E_V, \tau\Omega, E_H$ の値 . ただし, $A = \pi^2\tau\Omega E_V$, $B = 20\pi^2 E_H E_V$ である . 灰色で表示した組合せは 4.3 節の実験と重複している .

A	B	E_V	$\tau\Omega$	E_H
$\pi^2 \times 10^0$	$2\pi^2 \times 10^{-3}$	10^{-3}	10^3	10^{-1}
	$2\pi^2 \times 10^{-4}$			10^{-2}
	$2\pi^2 \times 10^{-5}$			10^{-3}
	$2\pi^2 \times 10^{-6}$			10^{-4}
	$2\pi^2 \times 10^{-7}$			10^{-5}
	$2\pi^2 \times 10^{-8}$			10^{-6}

5.3 数値実験

5.1 節で述べたように, 基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の解は, E_H を小さくしていけば, ヘルド・ハウモデルの解に近づくことが予想される . そこで, 数値実験を行い, E_H を小さくしたときの, 解の変わり方を調べる .

5.3.1 実験設定

数値計算手法および実験設定は 3.3.1 節と同じである . ただし, 外部パラメータ $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ ($\tau\Omega = 10^3$) は固定したまま, $B = 2\pi^2 \times 10^l$ ($l = -4, -5, \dots, -8$) [$E_H = 10^m$ ($m = -2, -3, \dots, -6$)] に対して, $R_T = 10^n$ ($n = -2, -1, \dots, 7$) の場合の定常解または統計的平衡状態にある解の時間平均場を求める (表 5.2) .

5.3.2 数値解

上の外部パラメータ条件での数値解に加えて, 4.3 節で計算した $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ で $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ の解も並べて記述する .

無次元東西風

図 5.3 は無次元東西風速 $u(\phi, z)/(a\Omega)$ の分布を示している . 数値解を示すパネルの欠落は, 当該外部条件では解像度不足が原因で数値解が得られなかったことを表している . 等値線間隔は, それぞれの最大値 (パネル上部の値) の 10 分の 1 である . また, 各パネルの右上の S は定常状態の解であることを, SS は統計的平衡状態の時間平均場であることを示している . ここで, 上空のジェットに注目する . $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ の $R_T \leq 10^6$

と $B = 2\pi^2 \times 10^{-4}$ の $R_T \leq 10^3$ の解には、赤道上空を中心とした深いジェットがある。それ以外の解には、赤道以外の緯度（主に中高緯度）に中心をもつジェットがある。これは、 B ($\propto E_H$) が小さくなるにしたがって、水平拡散が弱まり、剛体回転に近い東西風速場を形成できなくなっていく様子を表している。 $B = 2\pi^2 \times 10^{-4}$ の $R_T = 10^2$ や 10^3 の解は、大気下層ではジェットの軸が中緯度に移っている。これは、子午面循環は、下層の方が強く、水平拡散の効果を上回り、ジェットの中心を赤道に維持できなくなっている様子を示している。 B が小さくなるにつれて、赤道上空の東西風は弱まっていき、 $B \leq 2\pi^2 \times 10^{-7}$ では、赤道上空で $u \lesssim 0$ になっており、ハイドの定理 (Hide, 1969, 参照: 5.6 節) を満たしている。このとき、上空の東西風速は u_{HH} に近い分布をしている (図 5.6, 後述)。

無次元子午面流線関数

図 5.4 は無次元子午面流線関数 $\Psi(\phi, z)/(aH\Omega)$ を示している。 $v = -\partial\Psi/\partial z$, $w = (a \cos \phi)^{-1} \partial(\Psi \cos \phi)/\partial \phi$ であり、等値線間隔はそれぞれの最大値 (各パネル上部に表示) の 10 分の 1 である。図 3.4b (p. 52) に示されている $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$ の場合の子午面流線関数に比べて、図 5.4 の $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ や 10^{-4} の子午面流線関数は大きく変形している。 $R_T \geq 10^3$ では、子午面循環がより下層に集中しており、 $10^{-1} \leq R_T \leq 10^2$ では、子午面循環の傾きが顕著になっている。そして、 $R_T = 10^{-2}$ では、循環中心の緯度が赤道側に寄っている。これは、 B が小さくなるにつれて、解がヘルド・ハウモデルの解に近づき、ハドレー循環の幅も ϕ_H に近づいていることに対応する。実際、 $B = 2\pi^2 \times 10^{-8}$, $R_T = 10^{-2}$ の循環幅 (ここではジェットの中心緯度をハドレー循環の幅とする) は約 10° であり、式 (5.4) から求められる $\phi = 7.4^\circ$ に近い。また、 $B = 2\pi^2 \times 10^{-4}$ の $R_T = 10^5$ の解や $B = 2\pi^2 \times 10^{-5}$ の $R_T \geq 10^2$ の解などは大気上層に強い循環がある。これは、Held and Hou (1980) の数値解 (図 5.1) の鉛直拡散係数が $0.5 \text{ m}^2/\text{s}$ の解と同じ特徴である。また、 $B \leq 2\pi^2 \times 10^{-6}$, $R_T \geq 10^0$ の場合、ハドレー循環の極側では多数の対流が存在している。Held and Hou (1980) の数値解 (図 5.1) にこのような対流はないが、これは彼らの実験では放射対流平衡温位場が安定成層であったため、対流が抑制されていたからである。

無次元温位

図 5.5 は無次元温位 $\theta(\phi, z)/\Theta_0$ を示している。等値線間隔は、0.01 である。温位は、東西風や子午面循環よりも B に対する依存性が小さい。これは、子午面循環が変形しても、熱の輸送効果はあまり変化しないことを示している。

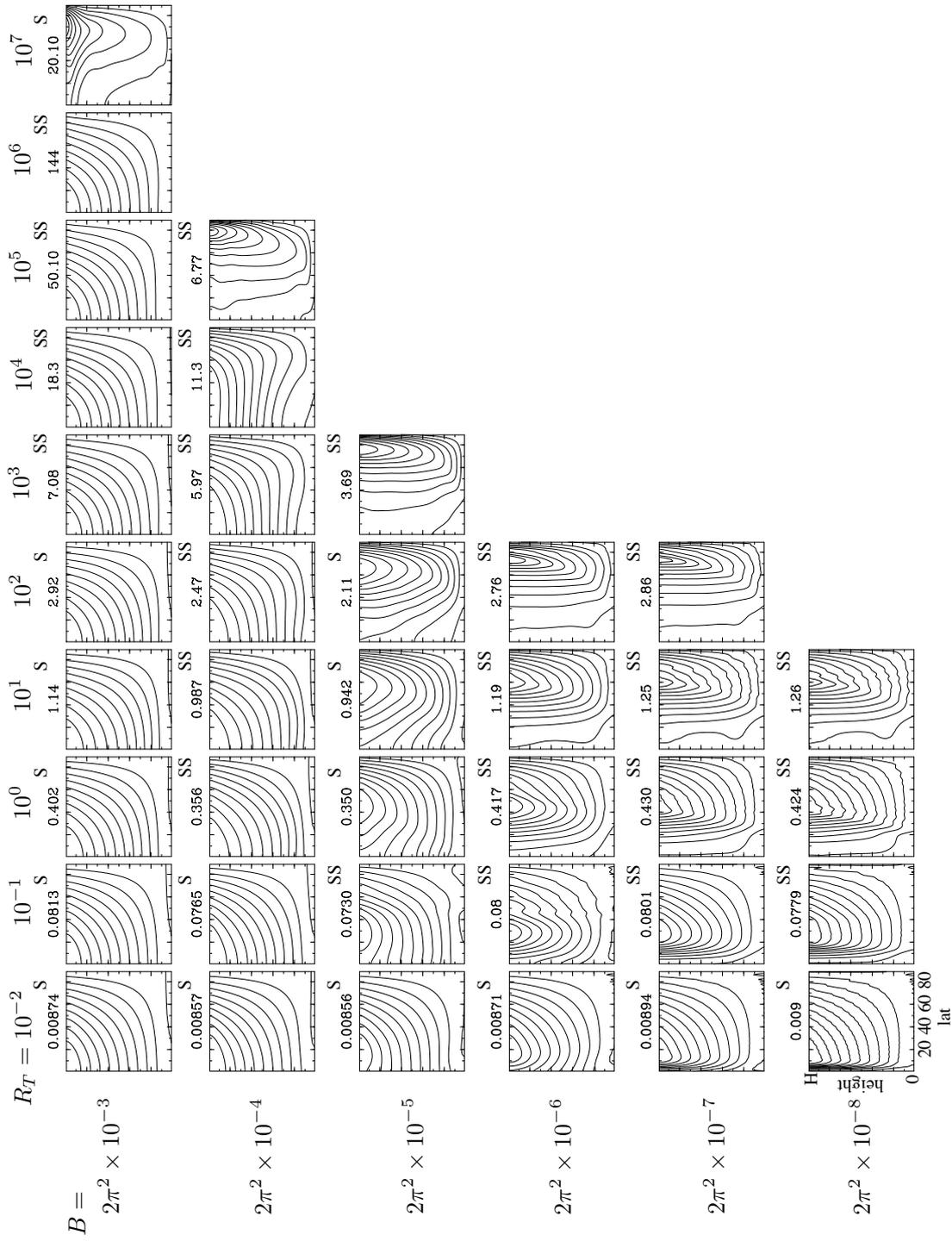


図 5.3 図 3.3 と同じ . ただし , $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ の場合 .

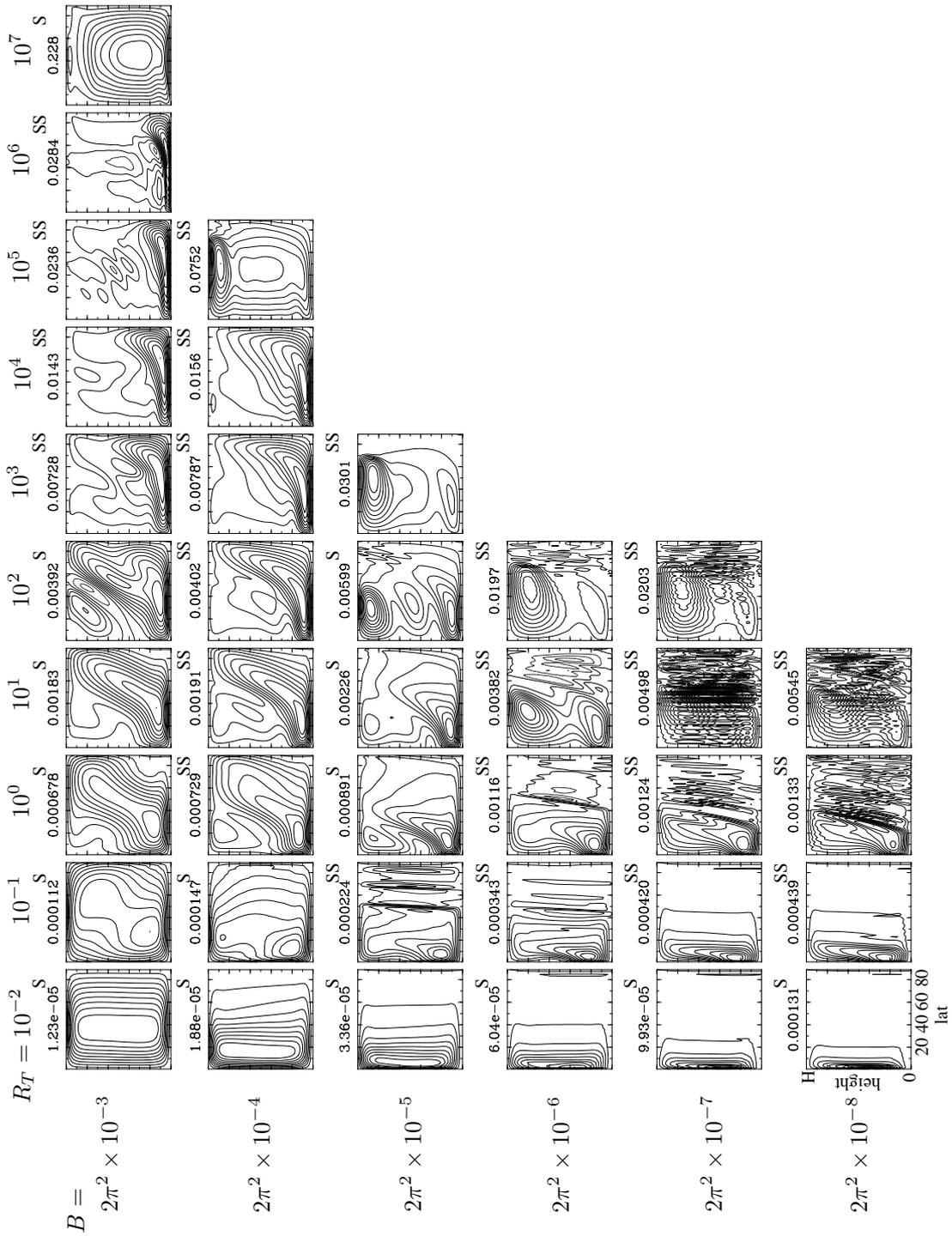


図 5.4 図 3.4 と同じ . ただし , $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ の場合 .

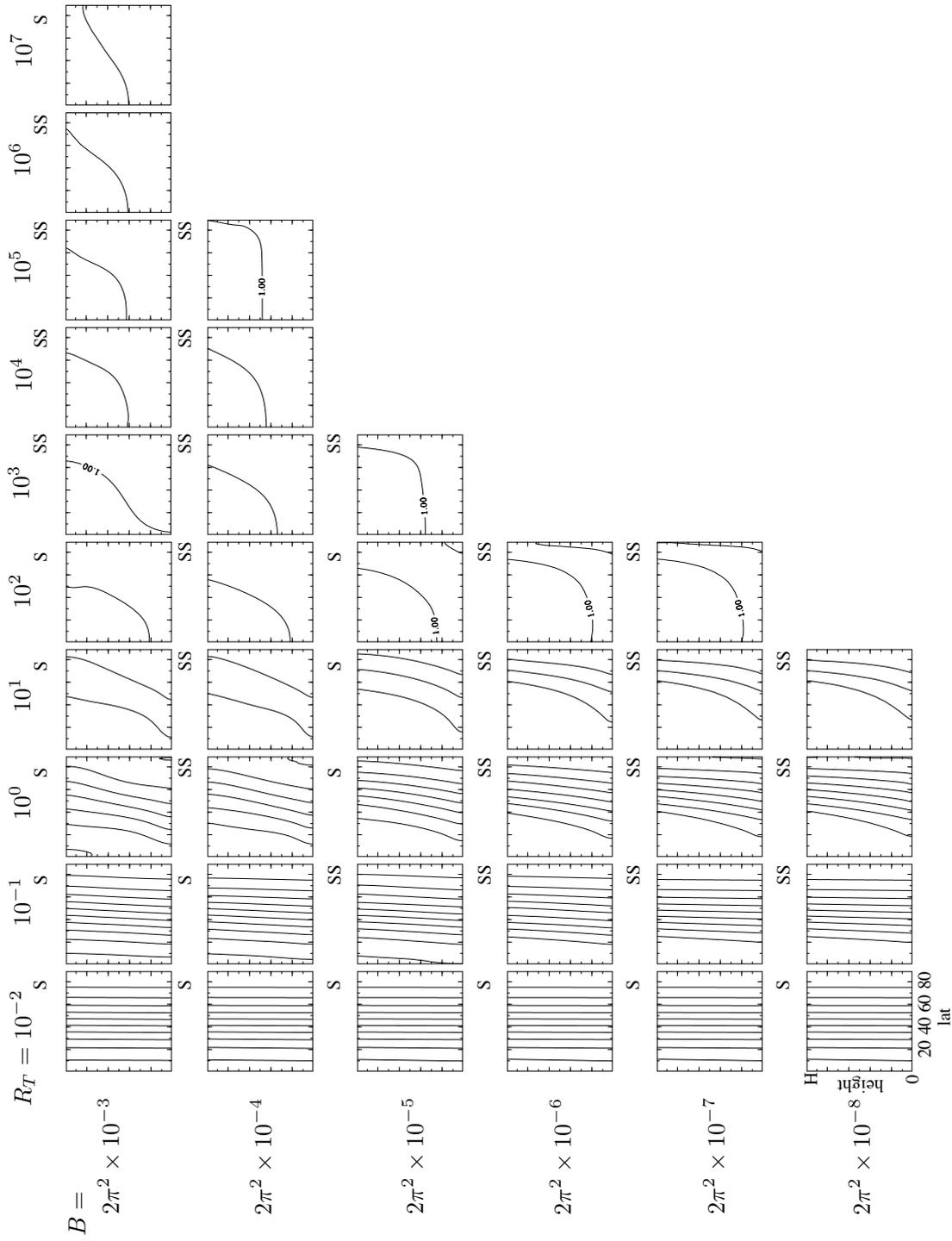


図 5.5 図 3.5 と同じ . ただし , $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ の場合 .

5.4 考察

まず、数値解の剛体回転解からヘルド・ハウモデルの解への変化について考察する。その後、Yamamoto et al. (2009) の実験結果を引用しながら、本章の実験結果との差異を考察する。

5.4.1 ヘルド・ハウモデル解への変わり方

前節の数値実験により、解は E_H が小さくなるにつれて、剛体回転に近い解から、徐々に(連続的に)ヘルド・ハウモデルの解に変化することが示された。ここで、大気上端の東西風速分布に着目して、ギーラシメカニズムが働いている剛体回転に近い解からヘルド・ハウモデル解への変化を考察する。図 5.6 は、 $R_T \leq 10^2$ のときの $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ から 10^{-8} までの、数値解の大気上端の東西風速分布(実線)と、ヘルド・ハウモデルの理論解 u_{HH} (破線)を示している。東西風は $B (\propto E_H)$ が大きいときは、剛体回転に近い分布をしており、 B が小さくなるにつれて、 u_{HH} に近づいている。また、 R_T が小さいほど、赤道上で $u \approx 0$ である最大の B が小さくなっている。

ここで、数値解を大気上端の東西風速分布により以下の3つに分類する。

- 赤道ジェット解：ジェット中心が赤道にある剛体回転に近い解
- 中緯度ジェット解：ジェット中心が赤道から離れているが、 $u \approx u_{HH}$ の解
- ヘルド・ハウモデル解： $u \approx u_{HH}$ である解

図 5.7 は、上記の分類の B と R_T に対する依存性を示している。実線は、式 (4.14) の D 型解の境界線を表している。ヘルド・ハウモデル解は、D 型解の境界線から B が 1 桁以上小さい領域に分布している。すなわち、水平拡散の緩和時間が、子午面循環の循環時間よりも十分に長く、水平拡散項が無視できる場合—不等式 (5.1) を満たす場合—toヘルド・ハウモデル解が得られている。これは、5.1 節での予想と一致する。

一方、赤道ジェット解 (\approx 剛体回転解) と中緯度ジェット解の境界は、 $R_T \leq 10^2$ の場合、 $2\pi^2 \times 10^{-5} < B < 2\pi^2 \times 10^{-4}$ の範囲に集中しており、D 型解の境界の振る舞いとは、定性的にも一致していない。水平拡散を小さくしていくと子午面循環の幅が $\phi_H(R_T)$ に近づくので、その R_T 依存性が影響している可能性がある。

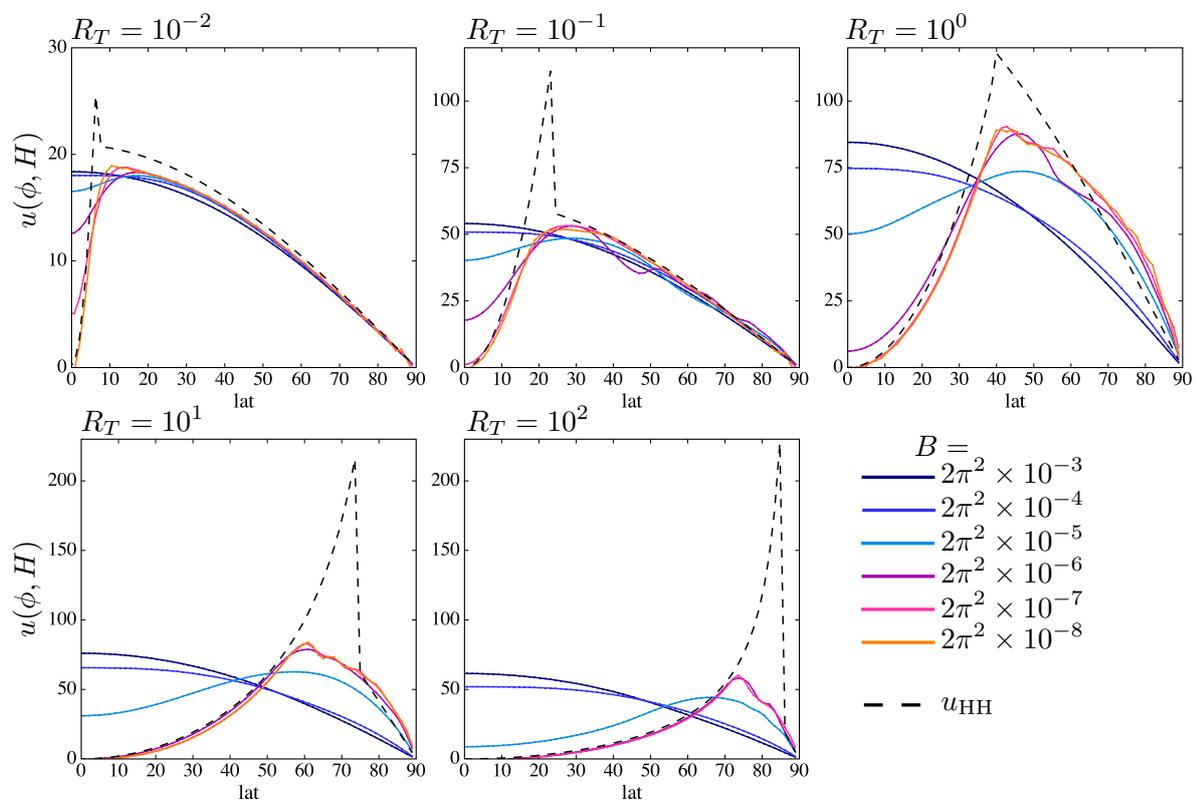


図 5.6 大気上端の東西風速分布 . $A = \pi^2 \times 10^0$, $E_V = 10^{-3}$. 破線はヘルド・ハウモデルの理論解 u_{HH} を表す .

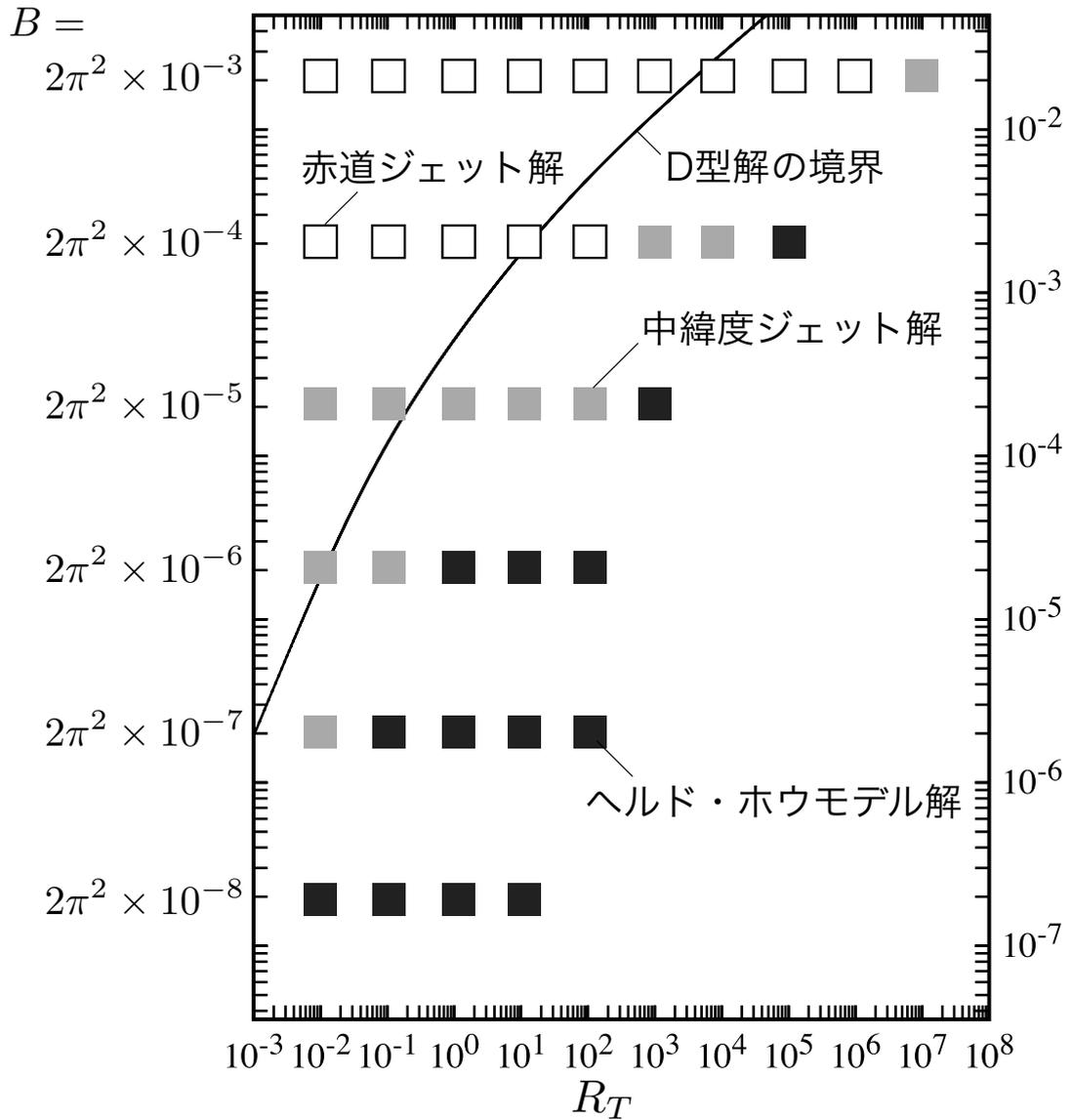


図 5.7 大気上端の東西風速分布で分類した解の R_T (横軸) と $B = 20\pi^2 E_H E_V$ (縦軸) に対する依存性．ただし， $E_V = 10^{-3}$ で固定している．四角記号は，白が赤道ジェット解，灰色が中緯度ジェット解，黒がヘルド・ハウモデル解を表す．曲線は式 (4.14) の D 型解の境界線を表す．

5.4.2 Yamamoto et al. (2009) との差異

5.3 節の数値実験では，第 3 章や第 4 章での数値実験を起点として， E_H が小さい場合を調べた．一方，Yamamoto et al. (2009) は，Held and Hou (1980) の数値実験を起点として， E_H を大きくした場合を調べている．そのため，Yamamoto et al. (2009) では，表 5.1 の (2) と (3)，および外部パラメータの値を Held and Hou (1980) に合わせて，数値実験を実施している．表 5.3 は，本研究と Yamamoto et al. (2009) の固定パラメータの値の違いを示している．なお，Yamamoto et al. (2009) は E_V に対する依存性も調べている．

図 5.8, 5.9 はそれぞれ，Yamamoto et al. (2009) の数値解の，東西風速分布と子午面流線関数を示している． $R_T = 1.2 \times 10^{-1}$ のときの， E_V と E_H に対する依存性が示されている． $E_V = 2.1 \times 10^{-4}$ ， $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$ (左下) の解は，Held and Hou (1980) の数値解 (図 5.1 左中) がほぼ再現されている． E_H が大きくなるにしたがって，東西風は剛体回転の分布に近づき，子午面循環は極まで広がっている．これは，5.3.2 節の実験結果 (図 5.3, 5.4) と同じ特徴である．また， $E_V = 2.1 \times 10^{-3}$ (中段) の $E_H = 3.3 \times 10^{-3}$ ($B = 1.4\pi^2 \times 10^{-5}$) (中) と $E_H = 3.3 \times 10^{-1}$ ($B = 1.4\pi^2 \times 10^{-3}$) (右) はそれぞれ，図 5.3, 5.4 の $R_T = 10^{-1}$ の $B = 2\pi^2 \times 10^{-5}$ と $B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$ と外部パラメータの値が近い．さらに， $E_H = 3.3 \times 10^{-10}$ (左) は，水平拡散が無視できるほど小さいという意味で，図 5.3, 5.4 の $R_T = 10^{-1}$ の $B = 2\pi^2 \times 10^{-8}$ と対応する．両実験の，それぞれ 3 つ

表 5.3 本研究 5.3 節と Yamamoto et al. (2009) の固定パラメータの値の違い．ただし， Δ_V は放射対流平衡温位場の鉛直温位差の Θ_0 に対する割合を表す．

	本章	Yamamoto et al. (2009)
E_V	10^{-3}	2.1×10^n ($n = -4, -3, -2$)
$\tau\Omega$	10^3	126
Δ_H	0.1	0.33
Δ_V	0	0.125
a (m)	6.05×10^6	6.4×10^6
H (m)	5×10^4	8×10^3
g (m/s ²)	8.84	9.8
Θ_0 (K)	500	250

の解を比べると，東西風に関しては，強さ^{*2}やジェット中心の位置がそれぞれ，ほぼ同じである．これは，下端境界条件や Δ_V の違いが，東西風速場にほとんど影響しないことを示している．一方，子午面循環に関しては，水平拡散が大きいときには，両実験結果に差がある．Yamamoto et al. (2009) の子午面循環 (図 5.9) は，あまり変形していないのに対して，5.3.2 節の子午面循環 (図 5.4) は，傾斜している．これは，3.4.2 節で考察したように，本研究の放射対流平衡温位場が静的に中立だからである．水平拡散が無視できるほど小さい場合には，両実験の結果に大きな差はない．これは，ヘルド・ハウモデルは下端境界条件や Δ_V に対して鈍感なことを示した，Williams (2003) と整合的な結果である．

^{*2} 図 5.8 は次元付き東西風速で描かれていることに注意．いま， $a\Omega = 467 \text{ m/s}$ なので，ジェット中心の風速，約 40 m/s を無次元風速で表せば，約 0.085 になり，図 5.3 で示されている値とほぼ一致する．

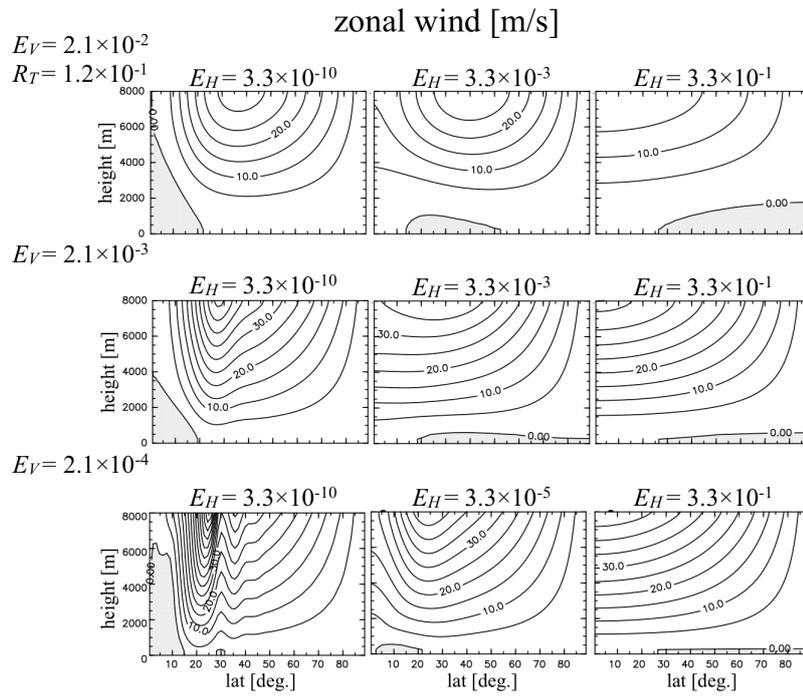


図 5.8 定常状態の東西風速分布．等値線間隔は 5 m/s．陰影は負の領域を表す．
(Yamamoto et al., 2009, Fig. 2; 一部修正)

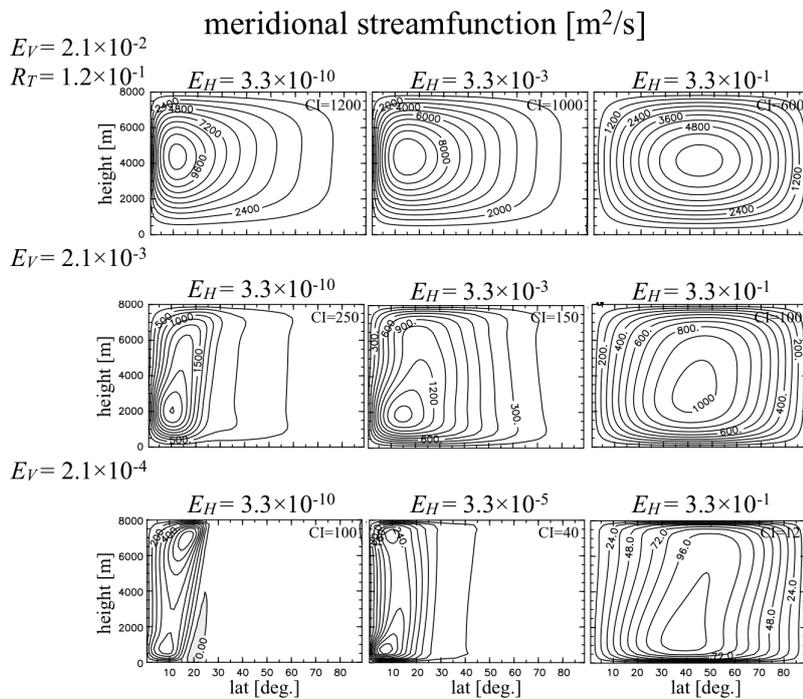


図 5.9 定常状態の子午面流線関数．等値線間隔は各パネルの右上に示されている．
(Yamamoto et al., 2009, Fig. 3; 一部修正)

5.5 まとめ

本章では、基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の解の、 E_H に対する依存性を広い範囲で調べた。その結果、ギーラシメカニズムに必要な強い水平拡散を弱めていくと、剛体回転に近い赤道ジェット解から、中緯度にジェットをもつ解、そして、地球型ハドレー循環のヘルド・ハウモデルの解に近づいていくことが明らかになった (図 5.3–5.6)。

中緯度ジェット解とヘルド・ハウモデル解の境界は、4.2.3 節で求めた、D 型解の境界より、 E_H が 1 桁小さかった (図 5.7)。これは、ヘルド・ハウモデルの解になるのは、水平拡散の緩和時間が、子午面循環の循環時間よりも十分に長い必要があるという条件 (5.1) と整合的な結果である。一方で、赤道ジェット解と中緯度ジェット解の境界は、 $2\pi^2 \times 10^{-5} < B < 2\pi^2 \times 10^{-4}$ の範囲に集中している。これには、 E_H が小さい場合には、ハドレー循環の幅が R_T に依存することが、影響している可能性がある。

5.3.2 節の実験結果と、Yamamoto et al. (2009) の実験結果を比較することで、運動量の下端境界条件と放射対流平衡温位場の安定度の違い [表 5.1 の (2) と (3)] は、東西風速分布にはあまり影響しないことが確認された。一方、本研究の数値解にみられた子午面循環の傾斜は、3.4.2 節で考察したように、放射対流平衡温位場を静的に中立にしたことで、生じていることが確かめられた。

5.6 補遺—ハイドの定理

Hide (1969) は定常な自転軸対称循環においては、角運動量 $M = (u + a\Omega \cos \phi)a \cos \phi$ は、その最大生成源である赤道の地表面においてのみ、最大値をとれることを示した。これは、ハイドの定理として知られている。

定常で自転軸対称な大気の角運動量方程式は以下のように書かれる。

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}M) = \nu_V \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \quad (5.5)$$

ただし、 $\mathbf{v} = (v, w)$ 。この方程式は、移流項 (左辺) と拡散項 (右辺) からなる移流拡散方程式である。このように、移流と拡散だけで輸送される量は、その最大生成源—いまの場合、赤道の地表面—においてのみ最大値をとることが許される。

直観的説明

類推として、煙突から出る煙を考えると分かりやすい。煙は風に移流されたり、分子運動によって拡散したりするが、煙が最も濃いのは、その生成源である煙突口に限られるのと同じである。

数学的説明

いま、 M が領域の内部に極大をもっていると仮定すると、その極大の周囲には閉じた等 M 線が存在する。式 (5.5) を、この等 M 線 (閉曲線) 内で面積積分することを考える。すると左辺は、ガウスの発散定理を用いて、

$$\begin{aligned} \iint \operatorname{div}(\mathbf{v}M) dS &= \oint M \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl \\ &= M \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl \\ &= M \iint \operatorname{div}(\mathbf{v}) dS = 0 \end{aligned}$$

となる。なぜなら、等 M 線上の積分なので M は周回積分の外に出せ、連続の式から $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ だからである。一方、等 M 線の内部の方が M が大きいとしているので、この等 M 線に囲まれたあらゆる地点で $\partial^2 M / \partial z^2 \leq 0$ (z - M 平面のグラフに描けば上に凸) である。ゆえに式 (5.5) の右辺は負の値になる。よって M は領域の内部に極大をもたない。上端からの角運動量の流出入はないので、同様の理由で M は上端に最大値をもつこともできない。一方、下端では地表面から応力を受ける。地表で西風のときは、地面に角運動量が流出するので、 M が最大値をとることはできない。東風のときは、地面から角運動量の供給を受けるので、 M は最大となることができる。よって、 M の最大値は ($M_M = a^2\Omega$) であり、赤道上空で西風 ($M > M_M$) を維持することは出来ない。

第6章

議論

これまでの章では、理想化された大気の基本方程式系をもとに、ギラシメカニズムで生成・維持されるスーパーローテーションについて理論的・数値的に研究してきた。本章ではまず、惑星大気の理想化に用いた近似や仮定について議論する。次に、本研究の理論的・数値的結果の金星やタイタンの大気への応用について議論する。最後に、惑星大気大循環論における本研究の位置づけについて述べる。

6.1 惑星大気の理想化に用いた近似や仮定

本研究で用いた大気の基本方程式系 (p. 30, 式 2.1–2.6) は、以下の近似や仮定で理想化されている。

- プリミティブ運動方程式
- ブシネスク近似
- 乾燥大気
- 地形なし
- 赤道対称なニュートン加熱・冷却
- 自転軸対称仮定
- 運動量の強い水平拡散

本節は、これらの近似や仮定の金星やタイタンの大気における妥当性を議論する。

6.1.1 プリミティブ運動方程式

プリミティブ運動方程式の近似、すなわち、静力学平衡近似、浅い大気の近似、伝統的な近似は、惑星半径と大気の厚さの比や運動のスケールの点から、金星やタイタンの大気

においてもスーパーローテーションを考察するうえでは十分によい近似だと思われる。ただし、1.2.4節 (p. 19) でも述べたように、実際のスーパーローテーションの生成・維持に重要な大気現象が特定されていないので、この近似のために、未知の重要な大気現象が取り除かれている可能性を完全に排除することはできない。

6.1.2 ブシネスク近似

本研究では、地表面から高度 50–100km (金星やタイタンでスーパーローテーションしている高度) までの大気を想定しながら、ブシネスク近似を用いてきた。通常、ブシネスク近似は、運動の鉛直スケールが小さく、大気の密度変化が小さい場合に用いられ、密度が何桁も変化する大気の基本方程式には、妥当ではない。しかし、着目しているスーパーローテーションのメカニズムにおいて、大気の密度変化が重要でないならば、本研究で得られた知見は、金星やタイタンのスーパーローテーションの理解に役立つはずである。何より、ブシネスク近似で大気の運動方程式を単純化したからこそ、理論モデルを構築することができたのである。また、上空への運動量供給という点では、大気の密度変化が許されていれば上空ほど密度が小さくなるので、スーパーローテーションの生成・維持には有利に働くとも考えられる。

6.1.3 乾燥大気

金星は全球が硫酸エアロゾルの雲で覆われており、タイタンではメタンの雨が降っている。このような凝結物質が、放射過程あるいは相変化を通して温度場に影響を与えることは十分に考えられる。しかし、凝結物質の輸送や物理過程を考慮しようとする、基礎方程式系が極めて複雑になる。そのため、本研究では乾燥大気を仮定している。惑星大気の凝結物質の性質については、まだ分かっていないことも多く、これらの物質がスーパーローテーションにどのような影響を与えるのかを予想するのも困難である。

6.1.4 地形なし

金星の地表面は、地球と比べると起伏の変化に乏しく、大規模な山脈が少ない (図 6.1)。よって、金星大気の循環が地形から受ける影響は小さいと予想される。また、タイタンでも大規模な山脈は見つかっておらず、地形が大気循環に与える影響は小さいと考えられる。

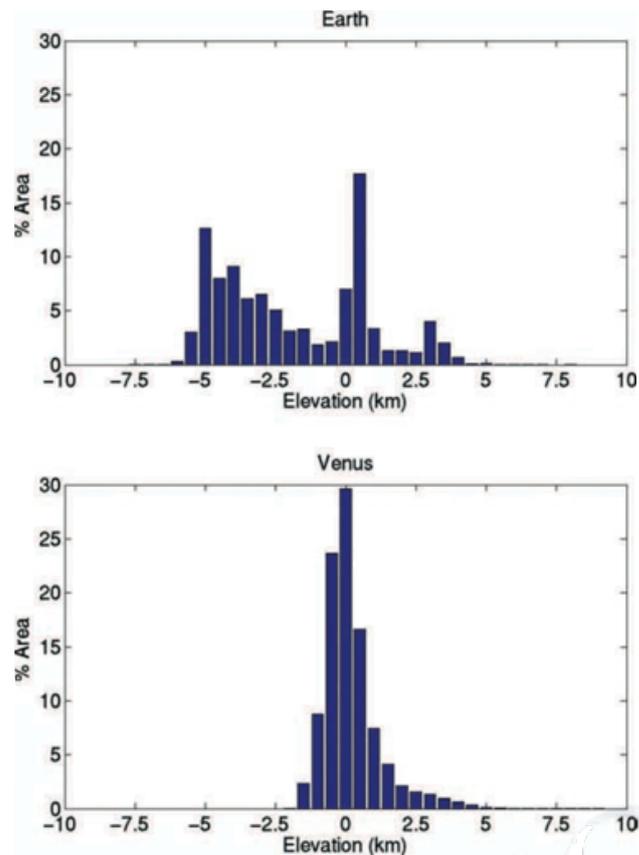


図 6.1 地球 (上) と金星 (下) の標高の頻度分布 . (Smrekar and Stofan, 2007)

6.1.5 赤道対称なニュートン加熱・冷却

ニュートン加熱・冷却は、大気の光学的厚さが十分に薄いときに妥当な、放射による加熱・冷却の近似であり (Satoh, 2004, 14.3.3 節), 大気が光学的に厚い金星やタイタンで用いるのは本来、正しくない。それでも、ニュートン加熱・冷却を用いると、放射過程の扱いが非常に簡単になるため、大気大循環の理論的研究においては、有用な方法である。一方で、金星やタイタンの大気スーパーローテーションの現実的な再現のためには、より高度な放射コードを用いる必要があると考えられている (たとえば Lebonnois et al., 2010)。

赤道対称性に関しては、金星の赤道傾斜角は約 2.6° と非常に小さいので、赤道対称な放射加熱を仮定しても問題ない。一方、タイタンの場合、赤道面は太陽を周回する土星の公転面に対して約 28° 傾いている。さらに、タイタン自身が土星の周りを公転しており、土星の影に隠れたり、土星からの照り返しを受けたりして、太陽放射の分布は複雑に変化する。タイタンにおける赤道対称な放射加熱の妥当性は、いずれ慎重に検討する必要がある。

るだろう。

また、本研究ではニュートン加熱・冷却の緩和定数 (τ) を高度に依らず一定値としている。少しでも現実大気に近づけるならば、ニュートン加熱・冷却を用いたとしても、 τ は大気の密度に応じて変化させるべき量である。しかし本研究は、理論的に考察しやすいように、式の簡単さを優先し、高度に依らず一定値とした。 τ の高度依存性の有無が、本研究の結果にどのように影響するかについても、いずれ調べる必要があるだろう。

6.1.6 自転軸対称仮定

金星やタイタンは自転が遅いために夜面と昼面の放射加熱差が大きく、自転軸対称仮定は不相当だと思われるかもしれない。しかし、実際には大気の放射緩和時間が非常に長いことと、高速東西風が吹いていることによって、雲層以下では夜面と昼面の温度差はほとんどないと考えられている。つまり、放射加熱で夜昼間の温度差が大きくなる前に、高速東西風が夜昼間の温度差をならしてしまふのである。図 6.2 は金星大気の温度の鉛直分布の観測値を示している。少なくとも日の出直後 (地方時 6:20AM など) と太陽が真上にあるとき (地方時 11:16AM など) で大きな温度差は観測されていない。

なお、自転軸対称を仮定したものの、本研究では次小節で議論する水平渦拡散を導入している。この水平渦拡散は、本来の3次元大気の運動の1つとして期待される非軸対称擾乱による運動量輸送の東西平均効果を表している。そのため、本研究の自転軸対称仮定は、大気の運動が完全に自転軸対称であると仮定したわけではないので、準自転軸対称とも言うべきものである。

6.1.7 運動量の強い水平渦拡散

上述のように本研究では、3次元大気の運動の1つとして期待される非軸対称擾乱による運動量輸送の東西平均効果を、水平渦拡散の形で取り入れている。水平渦拡散は分子拡散と同様に定式化されており、東西風速場を剛体回転に近づけるように作用する (多くの場合、赤道向きに角運動量を輸送する)。また、本研究では、運動量のみを輸送する非軸対称擾乱を想定し、熱の水平拡散は導入していない^{*1}。このような水平拡散は、ギーラシメカニズムの最大の仮定である。そのため、水平拡散の役割を果たしうる非軸対称擾乱に関する研究が行われてきた。1.2.3 節の最後の段落 (p. 19) の繰り返しになるが、Rossow and Williams (1979) は低速回転している球面上の2次元乱流の性質を調べ、順圧不安定が角運動量を赤道向きに輸送することを示している。Iga and Matsuda (2005)

^{*1} もし、熱も運動量と同様に水平に強く拡散させたなら、南北温度差がほとんどない状態になり、子午面循環が駆動されず、ギーラシメカニズムも働かなくなる。

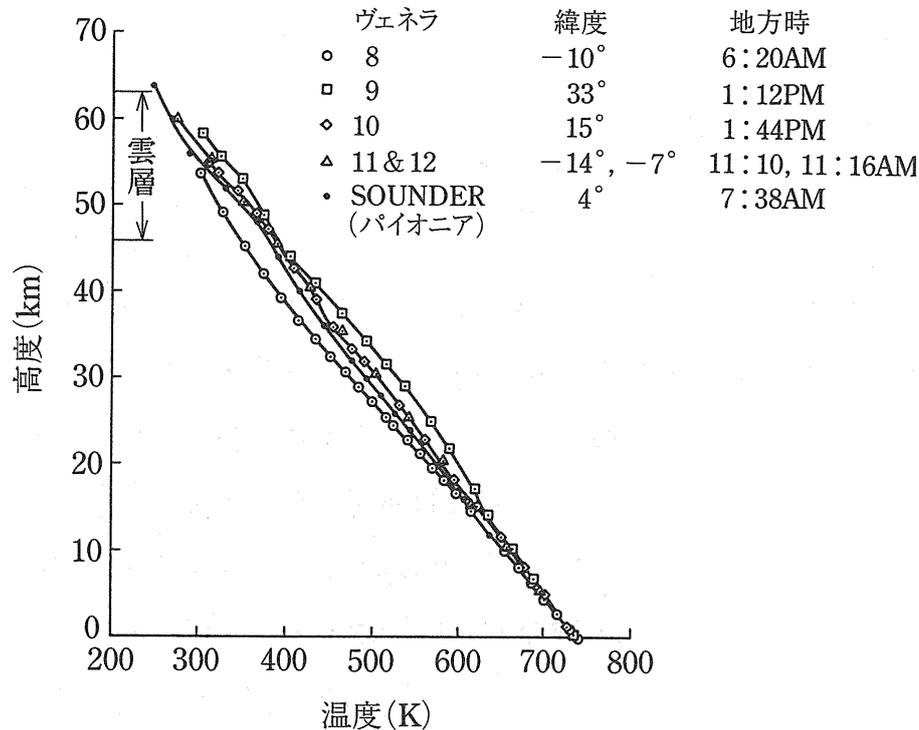


図 6.2 金星大気の温度の鉛直分布．ヴェネラ 8 号から 12 号とパイオニア・ヴィーナスによる観測．(Seiff, 1983; 松田, 2000)

は球面上の浅水モデルを用いて，金星大気雲層で観測されている速度場のシア不安定を調べ，ほとんどすべての成長モードで角運動量輸送が赤道向きであることを示し，Luz and Hourdin (2003) は浅水モデルを用いて，タイタン大気における順圧波動が，角運動量を赤道向きに輸送していることを示している．さらに，金星用に調整された GCM を用いた数値実験 (Yamamoto and Takahashi, 2003; Lee et al., 2007) でも，順圧不安定が角運動量を赤道向きに輸送している．

なお，上記の非軸対称擾乱による角運動量の赤道向き輸送を水平拡散の形で導入する場合でも，水平拡散係数 (ν_H) が一定値でよいという保証はない．しかしながら本研究では，ニュートン加熱・冷却の緩和時定数と同様に，式の簡単さを優先し， ν_H は場所や流れ場に依らず一定値とした．

6.2 理論的・数値的結果の金星やタイタンへの応用

本研究の理論モデルや数値解は上述の近似や仮定で理想化された大気の振る舞いを表しているため，金星やタイタンにおける観測結果との単純な比較で，安易に理論モデルの優劣を決めるべきではない．本来は，本研究の結果と様々な複雑さの大気モデルの振る舞

いを階層的に比較していくことで，本研究が金星やタイタンにおけるスーパーローテーションの本質を切り出しているのかを調べる必要がある．

以上のことに留意したうえで本節では，将来の階層的研究の一助となるように，本研究で得た理論的・数値的結果の金星やタイタンの大気への応用について議論する．

6.2.1 スーパーローテーション強度と力学的平衡状態の見積もり

金星大気における外部無次元パラメータの値を $R_T = 10^4$, $\tau\Omega = 10^{-1}-10^1$, $E_H = 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ だとすれば , $A = 10^{-3}-10^{-1}$, $B = 10^{-1}$ であり , スーパーローテーション強度の理論的見積もりは $S_t \approx 60-140$ になる .^{*2} タイタン大気の場合も同様に , パラメータの値を $R_T = 10^2$, $\tau\Omega = 10^3-10^4$, $E_H = 10^0$, $E_V = 10^{-3}$ だとすれば , $A = 10^1-10^2$, $B = 10^{-1}$ であり , $S_t \approx 0.9-2.5$ になる . これらの見積もりは , 観測されているスーパーローテーションの強度—金星大気は約 55 倍 , タイタン大気は約 9 倍—をそれほど外してはいない . また , 上の S_t の範囲のなかで , より観測値に近いものについて力学的平衡状態を見積もると , 金星大気は C1 , タイタン大気は C0 となる . つまり , 金星 , タイタンともに旋衡風平衡が卓越しているが , 子午面循環による熱の移流は , 金星よりもタイタンにおいて重要な役割を果たしている可能性が高いと言える .

6.2.2 数値解の水平エクマン数依存性と金星大気の東西風速分布の変動

本研究の数値解の大気上端での東西風速分布の E_H 依存性 (図 5.6) と , 観測されている金星大気の昼面平均東西風速分布 (p. 12 , 図 1.3) を比較する . 図 1.3 が示すように , 金星大気の平均東西風速分布 (雲追跡法による見積もり) は観測された時期によって , 剛体回転に近い分布 (1979 年) であつたり , 中緯度にジェットがある分布 (1982 年など) であつたりと変動している . この東西風速分布の変動は , 数値解 (図 5.6) の $B (\propto E_H)$ に対する依存性によく似ている . たとえば , $R_T = 10^1$ の $B = 2\pi^2 \times 10^{-5}$ の分布は中緯度にジェットがありながら , 赤道上空にもある程度の風速を維持している . つまり , この実験結果は , 金星大気雲層の東西風速分布の変動が , 水平拡散の強さ—実際には , 非軸対称擾乱による運動量の赤道向きの輸送量—の変動によるものである可能性を示している .

6.2.3 多重安定平衡状態

本研究の数値実験では , 2 つの異なる安定平衡状態の解が , 同一の外部条件下で得られる場合があつた (たとえば , $A = \pi^2 \times 10^{-2}$, $B = 2\pi^2 \times 10^{-2}$, $R_T = 10^5$ の場合) . 解の 1

^{*2} 高度依存性を考慮して , τ の値に幅をもたせている (Sánchez-Lavega, 2010, Table 4.3) . E_H と E_V の大きさはギーラシメカニズムが働くことを期待した上での推量である .

つは、剛体回転に近いスーパーローテーションの解であり、もう1つは、直接循環の解であった。このような多重安定平衡状態が金星大気大循環にも存在する可能性を、Matsuda (1980, 1982) は少数の基本モードからなるモード方程式系で、Kido and Wakata (2008, 2009) は GCM を用いた数値実験で示している。本研究の自転軸対称 2 次元のブシネスク流体プリミティブ方程式系の自由度は、Matsuda (1980, 1982) のモード方程式系より大きく、Kido and Wakata (2008, 2009) が計算した 3 次元大気方程式系より小さい。系の自由度の階層性の観点から、本研究の系で多重安定平衡状態が得られたことによって、Matsuda (1980, 1982) と Kido and Wakata (2008, 2009) の主張が補強されたと言える。

6.3 惑星大気大循環論における位置づけ

惑星気象学のなかでも、大気大循環に関する理論を惑星大気大循環論と呼ぶ。本研究では、惑星大気大循環論のなかでも、金星やタイタンといった地表面があり自転の遅い天体の大気大循環—スーパーローテーション—の力学について、ギーラシメカニズムを基礎にして調べてきた。

本研究では、自転効果の目安となる外部熱ロスビー数 (R_T) に対する、スーパーローテーション強度や力学的平衡状態の依存性を予測する理論モデルを構築してきた。また、数値解の R_T に対する依存性を 10^{-2} から 10^7 までの非常に広い範囲で調べてきた。このように、特定のパラメータに対する依存性を広範囲で調べることは、地球流体力学的に重要であり、そこから得られる知見は、惑星大気大循環論を考えるうえでも重要になる。ただし、自転軸対称と強い水平拡散を仮定した本研究の結果は、地球や木星の大気など、 $R_T \ll 1$ となる場合は通用しないことに注意する必要がある。なぜなら、 $R_T \ll 1$ ならば順圧不安定よりも傾圧不安定が発達するため、角運動量は赤道向きに輸送されないと考えられるからである。また、傾圧不安定が発達した緯度帯では、非軸対称な運動が子午面循環の形成に重要な役割を果たすため、大気大循環は自転軸対称な力学では説明できなくなる。なお、このときの低緯度帯のハドレー循環は、水平拡散を含まない自転軸対称な枠組み (Held and Hou, 1980) で説明される。

最後に、本研究の結果は、熱潮汐波メカニズム—スーパーローテーションのメカニズムとして現在でも有力なもう1つの仮説 (参照：1.2.2 節)—を否定するものではないことに注意したい。なぜなら、本研究で用いたような自転軸対称な大気では、もともと熱潮汐波は励起されないからである。スーパーローテーションのメカニズム論争に決着をつけるためには、惑星大気の詳細な観測とともに、両メカニズムがともに働きうる枠組みでの数値実験や理論的考察が必要である。

第 7 章

本研究のまとめ

本研究では，惑星大気大循環の 1 形態である，自転を追い越す向きの惑星規模の高速東西風「スーパーローテーション」の力学を，理想化された自転軸対称な大気の基本方程式系をもとに，理論的・数値的に研究した．基本方程式系として，自転軸対称なブシネスク流体のプリミティブ方程式系を用いた．放射による加熱・冷却は赤道対称なニュートン加熱・冷却で与え，非軸対称な擾乱による運動量輸送の東西平均効果は強い水平渦拡散として与えた．このような系では，子午面循環と水平拡散が角運動量を赤道上空に供給するため，スーパーローテーションが生成・維持される．この機構は，ギーラシメカニズム (Gierasch, 1975) と呼ばれている．第 3 章では，スーパーローテーションの強度を，理論モデルを構築することで見積もり，その妥当性を数値実験で確かめた．第 4 章では，理論モデルをもとに解の力学的平衡状態を調べて，そのパラメータ依存性を表すレジームダイアグラムを描き，再び数値実験で，その妥当性を確認した．ギーラシメカニズムが働くためには強い水平拡散が必要だが，第 5 章では，水平拡散を弱めた場合の解について調べた．第 6 章では，本研究で用いた近似や仮定と，本研究の理論的・数値的結果と現実の惑星大気との対応について議論した．

理論モデル

上述の基本方程式系 (p. 30, 式 2.1–2.6) に対して，定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) と下記の 5 つの物理量の空間依存性を仮定することで，惑星大気大循環と特徴づける 4 つの無次元量に関する理論モデルを構築した．5 つの物理量と仮定した空間依存性は，

- 相対角運動量の赤道から極までの積分量： $M_0(z) \approx \frac{Ua}{2} [1 - \cos(\frac{\pi z}{H})]$
- 大気上端の東西風： $u(\phi, H) \approx \frac{3U}{2} \cos \phi$
- 地表付近の南北風： $v(\phi, h) \approx -V_B \sin 2\phi$

- 大気上端の南北風： $v(\phi, H) \approx V_T \sin 2\phi$
- 鉛直平均温位： $\bar{\theta}(\phi) \approx \Theta_0 - \Delta\Theta (\sin^2 \phi - \frac{1}{3})$

であり，惑星大気大循環を特徴づける4つの無次元量は，

- スーパーローテーション強度： $S = \frac{U}{a\Omega}$
- 地表付近の南北風速を代表的風速としたロスビー数： $R_{vB} = \frac{V_B}{a\Omega}$
- 大気上端の南北風速を代表的風速としたロスビー数： $R_{vT} = \frac{V_T}{a\Omega}$
- 鉛直平均した極・赤道間温位差の放射対流平衡場のそれに対する割合： $\beta = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0\Delta}$

である．理論モデルは，上の4つの無次元量を未知数とする，以下の連立4元代数方程式として表される．

理論モデル：連立4元代数方程式

$$R_{vB} = \pi^2 E_V S \quad (\text{再掲 3.33a})$$

$$R_{vT} = \pi^2 E_V \left(\frac{S}{1+S} \right) \quad (\text{再掲 3.33b})$$

$$\frac{R_{vT} + R_{vB}}{2} = \frac{1}{\tau\Omega} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (\text{再掲 3.33c})$$

$$S^2 + 2S = 2\beta R_T - 20E_H(R_{vT} + R_{vB}) \quad (\text{再掲 3.33d})$$

ただし， $E_V = \nu_V/(H^2\Omega)$ は鉛直エクマン数， $E_H = \nu_H/(a^2\Omega)$ は水平エクマン数， $R_T = gH\Delta_H/(a^2\Omega^2)$ は外部熱ロスビー数である．

スーパーローテーション強度

連立方程式 (3.33) から S 以外を消去することで，次の S に関する5次方程式を得た．

S の5次方程式

$$\left[S^2 + 2S + BS \left(\frac{2+S}{1+S} \right) \right] \left[\frac{AS}{2} \left(\frac{2+S}{1+S} \right) + 1 \right] = 2R_T \quad (\text{再掲 3.34})$$

ただし， $A = \pi^2\tau\Omega E_V = \pi^2\tau(H^2/\nu_V)^{-1}$ は鉛直拡散の緩和時間 (H^2/ν_V) に対するニュートン加熱・冷却の緩和時間 (τ) の割合に比例する外部パラメータであり， $B = 20\pi^2 E_H E_V = 5[2\pi\Omega^{-1}\sqrt{(a^2/\nu_H)^{-1}(H^2/\nu_V)^{-1}}]^2$ は水平拡散と鉛直拡散の緩和時間の幾何平均 $[\sqrt{(a^2/\nu_H)(H^2/\nu_V)}]$ に対する自転周期 ($2\pi\Omega^{-1}$) の割合の2乗に比例する外部パラメータである．5次方程式 (3.34) の唯一の正の解 S_t が，スーパーローテーション強度の理論的見積もりを与える．また，式 (3.34) は， S_t が3つの外部パラメータ A ， B ， R_T にのみ陽に依存することを示している．

5 次方程式 (3.34) は $\left(\frac{2+S}{1+S}\right) = C$ (定数) とおくことで, 3 次方程式 (3.38) に近似され, 解を, カルダノ公式を用いて代数的に求めることが可能になる.

$$\frac{AC}{2}S^3 + \left(1 + AC + \frac{ABC^2}{2}\right)S^2 + (2 + BC)S \approx 2R_T \quad (\text{再掲 3.38})$$

この解析解は, S_t のよい近似である (p. 42, 図 3.1). さらに,

$$B \ll 1, \begin{cases} A \ll 1 & \cdots & \text{(a)} \\ A \gg 1 & \cdots & \text{(b)} \end{cases}, \quad B \gg 1, \begin{cases} AB \ll 1 & \cdots & \text{(c)} \\ AB \gg 1 & \cdots & \text{(d)} \end{cases}$$

の 4 つの場合には, S_t のより簡単な近似式が与えられる (p. 44, 表 3.1; p. 45, 図 3.2).

理論の見積もり S_t の妥当性を確認するために, 数値実験を行った. 基礎方程式系 (2.1)–(2.6) を十分な解像度で離散化した数値モデルで, 等温位静止大気を初期値として, 解が定常状態あるいは統計的平衡状態になるまで時間発展計算を行った. 表 3.2 (p. 48) の (a)–(d) の外部パラメータの組合せに対して, $R_T = 10^n$ ($n = -2, -1, \dots, 5$) の場合の数値解を得た (pp. 51–53, 図 3.3–3.5). 東西風速分布は, ほとんどの場合, 全層で剛体回転に近い分布をしており, 赤道上空に深いジェットをもつ. ただし, (a) $R_T = 10^5$ と (c) $R_T \geq 10^4$ の場合は, 上層に比較的弱く, 浅いジェットをもつ (図 3.3). 子午面循環の構造は R_T が小さいときは, $\phi = \pi/4$, $z = H/2$ を中心とする大きな直接循環であるが, R_T が大きくなるにしたがい, 徐々に変形し, 三角型に変化している (図 3.4). また, R_T が大きくなるにしたがい, 子午面循環も強くなり, 応じて南北温位差が小さくなっている (図 3.5).

数値解からスーパーローテーション強度 S_n を計算し, S_t と比較した (p. 58, 図 3.7). 相対誤差 $e_r = (S_t - S_n)/S_n$ は深いジェットの解では 50% 未満であり, これは, S_n が外部パラメータによって 5 桁程変化していることに比べて極めて小さく, スーパーローテーション強度が, 上述の理論モデルによって, 非常によく見積もられていることを示している. その他の無次元量 R_{vB} , R_{vT} , β に関しても, 数値解から計算されたこれらの値は, 理論モデル (式 3.33) によって, よく見積もられている (pp. 60, 61, 図 3.8, 3.9).

子午面循環は, R_T が大きくなるにしたがい, 強くなると同時に, 三角型循環に変化しているが, これは, 子午面循環の上下非対称化と傾斜の 2 つ変形過程の重ね合わせで説明できる (p. 68, 図 3.12). 上下非対称化は, $S \gg 1$ のときに $R_{vB} \gg R_{vT}$ (式 3.33a, 3.33b) になることに起因している. つまり, 子午面循環の上層の極向きの流れは遅く, 下層の赤道向きの流れは速くなり, 質量を保存するために上層が厚く, 下層が薄くなることで, 上下に非対称化する. 傾斜は, 暖かい大気が流入する極上層と冷たい大気が流入する赤道下層で, それぞれニュートン冷却と加熱が強くなり, 応じて下降流と上昇流が強くなることで生じる. また, 三角型循環は赤道下層で暖められた大気を低い高度で中緯度へ運ぶため, 低中緯度の上空は静的不安定になる (p. 70, 図 3.13). その結果, 鉛直対流が生

じるので、解は非定常になったと考えられる。

解の分類とレジームダイアグラム

解の力学的平衡状態は、 S の 3 次方程式 (3.38) を南北運動方程式の形に書き直した次式から理解できる。

$$\underbrace{S^2}_{\text{メトリック項}} + \underbrace{2S}_{\text{コリオリ項}} + \underbrace{BCS}_{\text{水平拡散項}} \approx \underbrace{2R_T\beta}_{\text{気圧傾度力項}} \quad (\text{再掲 3.41})$$

つまり、典型的な南北方向の力のつり合いは、旋衡風平衡 [C]、地衡風平衡 [G]、水平拡散平衡 [H] の 3 種である。さらに、子午面循環による熱の移流が無視できるか否か— $\beta \approx 1$ の状態 [1] か $\beta \ll 1$ の状態 [0] か—によって状態を 2 つに分けられる。結果、典型的な力学的平衡状態は、C1, C0, G1, G0, H1, H0 の計 6 種類になる (p. 44, 表 3.1; p. 45, 図 3.2)。

第 4 章では、これらの力学的平衡状態をもとに解を以下の基準で分類し、解型として定義した。

$$\begin{cases} S > 2, S > B & \Rightarrow \text{メトリック項が最大} & \dots & CY \\ S \leq 2, B \leq 2 & \Rightarrow \text{コリオリ項が最大} & \dots & GY \\ B \geq S, B > 2 & \Rightarrow \text{水平拡散項が最大} & \dots & HY \\ \beta > 0.5 & \Rightarrow \text{熱の移流効果が小さい} & \dots & X1 \\ \beta \leq 0.5 & \Rightarrow \text{熱の移流効果が大きい} & \dots & X0 \end{cases}$$

ただし、 $X = C, G, H$ であり、 $Y = 1, 0$ である。そして、理論モデル (式 3.33) を用いて、解型の境界を表す式を求めた。

- CY と GY の境界： $R_T = \frac{4}{9}(4A+3)(B+3)$ ただし $B \leq 2$

- CY と HY の境界：

$$R_T = \frac{B}{2} \left[B + 2B + B \left(\frac{2+B}{1+B} \right) \right] \left[\frac{AB}{2} \left(\frac{2+B}{1+B} \right) + 1 \right] \text{ ただし } B < 2$$

- GY と HY の境界： $B = 2$ ただし $R_T < 20(4A+3)/9$

- X1 と X0 の境界： $R_T = \frac{2}{A^2} (AB + 1 + \sqrt{1 + A^2})$

外部条件によっては、理論モデルの解は $R_{vB} > E_H$ を満たすこともあるが、これはゲラシメカニズムが働くために必要な、水平拡散の緩和時間が、子午面循環の循環時間よりも十分に短く、かつ鉛直拡散の緩和時間よりも十分に短い、という条件を満たしていない。そのため、このとき解は、Matsuda (1980) で示された直接循環 (D) 型になると期待される。そこで、 $R_{vB} > E_H$ を解が D 型になる条件とし、その境界も求めた。

- D と他の解型の境界： $R_T = \frac{1}{2} \left[S_D^2 + 2S_D + BS \left(\frac{2+S_D}{1+S_D} \right) \right] \left[\frac{AS_D}{2} \left(\frac{2+S_D}{1+S_D} \right) + 1 \right]$

ただし, $S_D = E_H / (\pi^2 E_V) = B / (20\pi^4 E_V^2)$ である. 以上の条件をもとに描いたレジームダイアグラムが図 4.1, 4.2 (p. 86) である.

理論モデルから求めたレジームダイアグラムの妥当性を調べるために, 図 4.1, 4.2 で示されている外部パラメータ A, B, R_T の範囲の数値解を 1 桁おきに求めた. 数値解から, 無次元量 $S_n, R_{vBn}, R_{vTn}, \beta_n$ を計算して解型を調べ (pp. 89–91, 図 4.3–4.5), その分布を理論レジームダイアグラムと比較した (図 4.6, 4.7). 数値解の解型の分布は, D 型の一部を除き, 理論レジームダイアグラムとおよそ一致している. 実験結果は, $A (\propto \tau\Omega)$ が大きい場合には, $B (\propto E_H)$ がある程度小さくて $R_{vB} > E_H$ を満たしていても, D 型解ではなく, C0 型の解になりやすいことを示している (図 4.7b). これは, 放射緩和時間が長い, 金星やタイタンの大気において, ギーラシメカニズムが働いている可能性に対して肯定的な結果である.

解の水平エクマン数依存性

第 5 章では, はじめに, 基礎方程式系 (2.1)–(2.6) は水平拡散係数をゼロ ($\nu_H = 0$) にすれば, 地球のハドレー循環の理論モデル「ヘルド・ハウモデル」を提案した Held and Hou (1980) と, ほぼ同じ枠組みになることを指摘した. このことから, 基礎方程式系の安定平衡状態の解は, E_H を小さくしていけば, 剛体回転に近いスーパーローテーション解からヘルド・ハウモデルのハドレー循環解に変化していくことが予想された. そこで, $A = \pi^2 \times 10^0$ と $E_V = 10^{-3}$ を固定したまま, $B = 2\pi^2 \times 10^m$ ($m = -3, -4, \dots, -8$) に対して, $R_T = 10^n$ ($n = -2, -1, \dots, 7$) の数値解の定常状態または統計的平衡状態を調べた (pp. 105–107, 図 5.3–5.5). その結果, 東西風速分布は, E_H が小さくなるにつれて, 剛体回転に近く赤道にジェットをもつ分布から, 中緯度にジェットをもつ分布に変わり, さらに E_H が小さくなると, ヘルド・ハウモデル解に近い分布になることが明らかになった (p. 109, 図 5.6). また, 中緯度ジェット解とヘルド・ハウモデル解を分ける E_H の大きさは, D 型解の境界の E_H から, 1 桁程小さい値であった (p. 110, 図 5.7). これは, ヘルド・ハウモデルが実現するためには, 子午面循環の循環時間に比べて, 水平拡散の緩和時間が十分に長い—すなわち, 水平拡散が無視できるほど小さい—必要があることと整合的な結果である.

おわりに

本研究では、ブシネスク近似や、ニュートン加熱・冷却、自転軸対称性、強い水平渦拡散といった、多くの近似や仮定を含む、理想化された大気の基本方程式系を、理論的・数値的に調べることで、ギーラシメカニズムで維持されるスーパーローテーションの強度や力学的平衡状態のパラメータ依存性を明らかにしてきた。本研究で得られた知見は、現実の惑星大気スーパーローテーションの理解に寄与するものだと、筆者は考えている。今後は、上記の近似や仮定の有無が、本研究で得られた結果に対して、どのような影響を与えるかを調べていく必要がある。そのためには、単純な大気モデルから複雑な大気大循環モデルまでを用いた、階層的な研究によって、知見を積み重ねていかねばならない。

基礎となった論文

本学位論文の基礎となった投稿準備中，あるいは出版済みの論文は，以下の2篇である．

- (1) Theoretical Estimation of the Superrotation Strength in an Idealized Axisymmetric Model of Planetary Atmospheres
(理想化された軸対称惑星大気モデルにおけるスーパーローテーション強度の理論的見積もり)
国際誌に投稿準備中
山本 博基，余田 成男の共著

- (2) Axisymmetric Steady Solutions in an Idealized Model of Atmospheric General Circulations: Hadley Circulation and Super-rotation
(理想化された大気大循環モデルの軸対称定常解：ハドレー循環とスーパーローテーション)
Theoretical and Applied Mechanics Japan 誌，57 巻，147 頁–158 頁，(平成 21 年刊行) 掲載
山本 博基，石岡 圭一，余田 成男の共著

論文 (1) は，本学位論文第 3 章の基礎となっている．論文 (2) は，第 5 章の基礎となっている．ただし，本学位論文を通しての一貫性を保つために，数値実験の設定に若干の変更を加えて，再計算を行ったため，論文 (2) の図と第 5 章の図は同一ではない．なお，両論文とも，研究主題の設定，理論的考察，数値モデルの構築，計算および解析を含め，筆者が中心的に行い，執筆したものである．また，本学位論文第 4 章の内容は，筆者が論文にまとめ，国際誌に投稿する予定である．

その他，参考となる出版済みの論文は，以下の3篇である．

- (3) Laboratory experiments on two coalescing axisymmetric turbulent plumes in a rotating fluid
(回転流体中の隣り合う軸対称乱流プルームの合体に関する室内実験)
Physics of Fluids 誌，23 巻，5 号，056601 (平成 23 年刊行) 掲載
山本 博基，Claudia Cenedese，Colm-cille P. Caulfield の共著

論文 (3) は，筆者が平成 21 年 6 月 21 日から同年 8 月 21 日まで，米国ウッズホール海洋研究所 (Woods Hole Oceanographic Institution) にて，フェローとして GFD プログラムに参加し，同研究所の Claudia Cenedese 研究員と英国ケンブリッジ大学の Colm-cille P. Caulfield 講師と共同して行った研究の成果である．筆者は，回転水槽実験の実施，結果の解析，および論文執筆において中心的な役割を果たした．なお，同プログラムには，惑星科学研究センター (神戸大学・北海道大学グローバル COE プログラム「惑星科学国際教育研究拠点の構築」) の支援を受けて参加した．

- (4) Automated cloud tracking system for the Akatsuki Venus Climate Orbiter data
(金星探査機「あかつき」のための自動雲移動ベクトル導出システム)
Icarus 誌，217 巻，2 号，661 頁–668 頁 (平成 24 年刊行) 掲載
小郷原 一智，神山 徹，山本 博基，佐藤 尚毅，高木 征弘，今村 剛の共著

- (5) A newly developed cloud tracking system for Venus Climate Orbiter Akatsuki and preliminary results using Venus Express data
(金星探査機「あかつき」のための雲移動ベクトル導出新システムとヴィーナズエクスプレスのデータを用いたその初期成果)
Theoretical and Applied Mechanics Japan 誌，60 巻，195 頁–204 頁 (平成 24 年刊行) 掲載
小郷原 一智，神山 徹，山本 博基，佐藤 尚毅，高木 征弘，今村 剛の共著

論文 (4) および (5) は，筆者が平成 22 年 8 月 2 日から同年 9 月 4 日まで，宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所にて，インターンシップ研修で，金星探査機「あかつき」のデータ解析パイプラインの研究開発に従事した際の成果である．筆者は，軽量の探査機の姿勢情報の高精度化の部分を担当した．なお，同研修は，京都大学グローバル COE プログラム「極端気象と適応社会の生存科学」の支援を受けて行った．

謝辞

本研究の遂行にあたり，絶えず熱心にご指導下さいました，余田成男先生に心から感謝申し上げます．数値的手法をはじめ，多くの助言を頂きました，石岡圭一先生に御礼申し上げます．学会，セミナー等を通じて有益な助言を頂きました，松田佳久先生，林祥介先生，向川均先生，竹広真一先生，堀之内武先生に感謝いたします．日々の研究において活発に議論してくださった，大塚成徳博士をはじめとする京都大学気象学研究室の皆様へ感謝いたします．また，多くの有益なご意見を頂きました，学位論文調査委員の皆様へ御礼申し上げます．

数値モデルには ISPACK (石岡, 2011), gtool5 ライブラリ (森川他, 2010), LAPACK (Anderson et al., 1987) を使用させて頂きました．作図には 地球流体電脳ライブラリ^{*1}と mjograph^{*2}を用いました．ここに記して謝意を表します．

参考論文 (3) は，米国ウッズホール海洋研究所の GFD プログラムに参加した際の研究成果であり，その際に指導して頂いた，同研究所の Claudia Cenedese 研究員と英国ケンブリッジ大学の Colm-cille P. Caulfield 講師に厚く御礼申し上げます．また，同プログラムの関係者の皆様へ，深く感謝いたします．同プログラムには，惑星科学研究センター (神戸大学・北海道大学グローバル COE プログラム「惑星科学国際教育 研究拠点の構築」) の支援を受けて参加しました．ここに記して謝意を表します．

参考論文 (4) および (5) は，宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所にて，インターンシップ研修で，金星探査機「あかつき」のデータ解析パイプラインの研究開発に従事した際の成果であり，同研究所にて指導して頂いた，今村剛先生，高木征弘先生，佐藤尚毅講師，小郷原一智博士，神山徹氏，および同研究所の皆様へ感謝申し上げます．同研修は，京都大学グローバル COE プログラム「極端気象と適応社会の生存科学」の支援を受けて行いました．ここに記して謝意を表します．

*1 <http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/index.html>

*2 <http://www.ochiailab.dnj.ynu.ac.jp/mjograph/indexj.html>

付録 A

数値モデルの構築

基礎方程式系 (2.1)–(2.6) の時間発展計算を行うために必要な，数値モデルを構築する手順について述べる．ただし，汎用性のために，自転軸対称性と放射対流平衡温位場の赤道対称性を取り除いた，球面上の 3 次元ブシネスク流体プリミティブ方程式系の数値モデルを構築する．なお，構築手順については Satoh (2004) の第 21 章と 石岡 (2004) を参考にしている．

方程式系は，以下のように書かれる．

球面上の 3 次元ブシネスク流体プリミティブ方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{uv \tan \phi}{a} + 2\Omega v \sin \phi - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \text{水平拡散項} \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2 \tan \phi}{a} - 2\Omega u \sin \phi - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \text{水平拡散項} \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta - \Theta_0}{\Theta_0} \quad (\text{A.1c})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (\text{A.1d})$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1e})$$

ただし， λ は経度を表し，その他の記号の意味は第 2 章と同じである．運動方程式 (A.1a) と (A.1b) の水平拡散項については，後で超粘性を含めた一般化した形式で導入する．また，汎用性のために，下端境界は粘着条件に替えて，以下の風速に比例する摩擦条件を用

いる．すなわち，下端 ($z = 0$) の境界条件は，風速に比例する摩擦，質量の流出入なし，および断熱である．

$$\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = C u, \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = C v, \quad w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{下端: } z = 0) \quad (\text{A.2})$$

ここで， C は比例定数である．なお，風速に比例する摩擦条件は， $C = 0$ ならば自由滑り条件に， $C = \infty$ ならば粘着条件になる．上端 ($z = H$) の境界条件は変わらず，自由滑り，質量の流出入なし，および断熱とする．

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{上端: } z = H) \quad (\text{A.3})$$

A.1 数理モデル化

3次元ブシネスク流体プリミティブ方程式系 (A.1) の数値解を精度よく計算するために，方程式系 (A.1) を変形して，数理モデル化する．

まず，風速ベクトル $\mathbf{v} \equiv (u, v, w)$ をトロイダル成分 ψ とポロイダル成分 χ の和で表す (\mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトル)．

$$\mathbf{v} = -\nabla \times (\psi \mathbf{k}) + \nabla \times [\nabla \times (\chi \mathbf{k})] \quad (\text{A.4})$$

これにより，連続の式 (A.1e) が自動的に満たされる． \mathbf{v} の各成分は，

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$w = -\frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \right] = -\nabla_H^2 \chi \quad (\text{A.7})$$

で書かれる．ただし，

$$\nabla_H^2 \equiv \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.8})$$

は球面上の水平ラプラシアンを表す．なお，風速ベクトル $\mathbf{v}(\psi, \chi)$ は， $\psi(\lambda, \phi, z, t)$ に z の任意の関数 $F(z)$ を加えても不変であり， $\chi(\lambda, \phi, z, t)$ に任意の定数値 C を加えても不変である．

$$\mathbf{v}[\phi(\lambda, \phi, z, t), \chi(\lambda, \phi, z, t)] = \mathbf{v}[\phi(\lambda, \phi, z, t) + F(z), \chi(\lambda, \phi, z, t) + C] \quad (\text{A.9})$$

鉛直渦度 ζ と水平発散 D は,

$$\zeta \equiv \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) = \nabla_H^2 \psi \quad (\text{A.10})$$

$$D \equiv \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_H^2 \chi) \quad (\text{A.11})$$

と書かれる．ここで，サイン緯度 $\mu \equiv \sin \phi$ を導入する．すると， ∇_H^2 は，

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \quad (\text{A.12})$$

と書かれる．さらに， u, v に $\cos \phi$ をかけた以下の量を導入する．

$$\mathcal{U} \equiv u \cos \phi = -\frac{1 - \mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{V} \equiv v \cos \phi = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1 - \mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right) \quad (\text{A.14})$$

そして，

$$\mathcal{A} \equiv (\zeta + 2\Omega\mu)\mathcal{U} + w \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{B} \equiv (\zeta + 2\Omega\mu)\mathcal{V} - w \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

とおけば，

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\text{式 A.1b}) - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [(\text{式 A.1a}) \cos \phi]$$

の演算で得られる渦度方程式は，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mu} + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \text{水平拡散項} \quad (\text{A.17})$$

と書ける．また，

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\mathcal{U}^2 + \mathcal{V}^2}{2(1 - \mu^2)} \quad (\text{A.18})$$

とおけば，

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\text{式 A.1a}) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [(\text{式 A.1b}) \cos \phi]$$

の演算で得られる発散方程式は，

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mu} - \nabla_H^2 (\Phi + \mathcal{E}) + \nu_V \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} + \text{水平拡散項} \quad (\text{A.19})$$

と書ける．式 (A.19) を鉛直微分して，式 (A.1d) を利用すれば，

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z} \right) = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left(g \frac{\theta}{\Theta_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right) + \nu_V \frac{\partial^3 \mathcal{D}}{\partial z^3} + \text{水平拡散項} \quad (\text{A.20})$$

となる．

熱力学方程式 (A.1d) の移流項を連続の式 (A.1e) を用いてフラックス形式にしてから， U, V, μ を用いて書き直せば，

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) - \frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (\text{A.21})$$

となる．

以上，渦度方程式 (A.17)，鉛直微分した発散方程式 (A.20)，熱力学方程式 (A.21) はそれぞれ， $\zeta = \nabla_H^2 \psi$ ， $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z} = \nabla_H^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$ ， θ の予報方程式であり，3次元ブシネスク流体プリミティブ方程式系 (A.1) の数理モデルとなる．

数理モデル

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mu} + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \text{水平拡散項} && (\text{再掲 A.17}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial z} \right) &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left(g \frac{\theta}{\Theta_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right) + \nu_V \frac{\partial^3 \mathcal{D}}{\partial z^3} \\ &\quad + \text{水平拡散項} && (\text{再掲 A.20}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) - \frac{\theta - \theta_e}{\tau} + \kappa_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} && (\text{再掲 A.21}) \end{aligned}$$

ψ, χ, θ に関する上下端境界条件は，それが満たされているときに元の境界条件 (A.2) と (A.3) が満たされなくてはならない．そこで，上端の境界条件は，

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \chi = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{上端 : } z = H) \quad (\text{A.22})$$

とし，下端の境界条件は，

$$\nu_V \frac{\partial \psi}{\partial z} = C\psi, \quad \nu_V \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = C \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \chi = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{下端 : } z = 0) \quad (\text{A.23})$$

とする．

A.2 空間離散化

上記の数理モデルを，水平方向には球面調和関数展開を用いたスペクトル法で離散化し，鉛直方向には中央差分法で離散化する．

A.2.1 球面調和関数展開

三角切断による切断波数を \mathcal{M} とする． $\psi, \chi, \theta, w, \zeta$ を以下のように球面調和関数 Y_n^m で展開する．

$$\psi(\lambda, \mu, z, t) = a^2 \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}} \psi_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.24})$$

$$\chi(\lambda, \mu, z, t) = a^2 \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}} \chi_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.25})$$

$$\theta(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}} \theta_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.26})$$

$$w(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}} w_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.27})$$

$$\zeta(\lambda, \mu, z, t) = \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}} \zeta_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.28})$$

ここで， $\psi_n^m, \chi_n^m, \theta_n^m, w_n^m, \zeta_n^m$ はそれぞれの展開係数である．球面調和関数 Y_n^m は，2 に正規化されたルジャンドル陪関数 $P_n^m(\mu)$ と三角関数 $e^{im\lambda}$ で，

$$Y_n^m(\lambda, \mu) \equiv P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (\text{A.29})$$

と定義される (i は虚数単位)．球面調和関数に水平ラプラシアンを作用させると，

$$\nabla_H^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.30})$$

なので，式 (A.7) と (A.10) より，

$$w_n^m(z, t) = n(n+1) \chi_n^m(z, t) \quad (\text{A.31})$$

$$\zeta_n^m(z, t) = -n(n+1) \psi_n^m(z, t) \quad (\text{A.32})$$

である．

\mathcal{U} と \mathcal{V} は，以下のように球面調和関数展開する．

$$\mathcal{U}(\lambda, \mu, z, t) = a \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}+1} \mathcal{U}_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.33})$$

$$\mathcal{V}(\lambda, \mu, z, t) = a \sum_{m=-\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \sum_{n=|m|}^{\mathcal{M}+1} \mathcal{V}_n^m(z, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (\text{A.34})$$

また，ルジャンドル陪関数の性質，

$$(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m(\mu) = (n+1) \epsilon_n^m P_{n-1}^m(\mu) - n \epsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m(\mu) \quad (\text{A.35})$$

を利用して，式 (A.13) と (A.14) から，以下の関係式が得られる．

$$\mathcal{U}_n^m(z, t) = -(n+2) \epsilon_{n+1}^m \psi_{n+1}^m(z, t) + (n-1) \epsilon_n^m \psi_{n-1}^m(z, t) + im \frac{\partial}{\partial z} \chi_n^m(z, t) \quad (\text{A.36})$$

$$\mathcal{V}_n^m(z, t) = im \psi_n^m(z, t) + (n+2) \epsilon_{n+1}^m \frac{\partial}{\partial z} \chi_{n+1}^m(z, t) - (n-1) \epsilon_n^m \frac{\partial}{\partial z} \chi_{n-1}^m(z, t) \quad (\text{A.37})$$

ただし，

$$\epsilon_n^m \equiv \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}} \quad (\text{A.38})$$

である．

数理モデル内の非線形項 \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{E} , $(\mathcal{U}\theta)$, $(\mathcal{V}\theta)$, $(w\theta)$ は実空間上で値を計算して，球面調和関数変換により，それぞれの展開係数 \mathcal{A}_n^m , \mathcal{B}_n^m , \mathcal{E}_n^m , $(\mathcal{U}\theta)_n^m$, $(\mathcal{V}\theta)_n^m$, $(w\theta)_n^m$ を求める．なお，実空間上の変数 $F_{i,j} = F(\lambda_i, \mu_j)$ ($i = 1, 2, \dots, I$; $j = 1, 2, \dots, J$) から，その展開係数 F_n^m は次式で計算される．

$$F_n^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) F_{i,j} \quad (\text{A.39})$$

ただし， I は経度方向の格子点数， J は緯度方向の格子点数， $\lambda_i = 2\pi(j-1)/J$ は等間隔にとった経度であり， $\mu_j = \sin \phi_j$ で， ϕ はガウス緯度 [ルジャンドル多項式 $P_n(\mu) = P_n^0(\mu)$ の零点] であり， w_j^g はガウス重みと呼ばれ，

$$w_j^g = \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_j)P'_n(\mu_j)}, \quad P'_n \equiv \frac{dP_n}{d\mu} \quad (\text{A.40})$$

で定義される．*1

A.2.2 鉛直格子配置

中央差分法で効率よく計算するために，鉛直方向にはスタッガード格子を用いる．整数格子 z_k ($k = 0, 1, \dots, K$) と半整数格子 $z_{k+\frac{1}{2}}$ ($k = -1, 0, \dots, K$) で定義される変数は，それぞれ以下のとおりである．

- 整数格子： χ , χ'' , w , $(w\theta)$

*1 ガウス緯度やガウス重みの計算方法については 山本 (2009) の付録 B を参照．

- 半整数格子： $\psi, \theta, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{E}, (\mathcal{U}\theta), (\mathcal{V}\theta)$

ただし， $\chi'' \equiv \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$ であり，半整数格子の $z_{-\frac{1}{2}}$ と $z_{K+\frac{1}{2}}$ は境界条件を満たすために必要な仮想点である (図 A.1)．なお，格子点の高さは，

$$z_k = k\Delta z \quad \left(k = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots, K + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.41})$$

ただし，

$$\Delta z \equiv \frac{H}{K} \quad (\text{A.42})$$

で定義され， $z_K = H$ が大気上端， $z_0 = 0$ が大気下端を表す格子点である．以下では，簡単のため，任意の変数 x の $z = z_k$ での値 $x(z_k)$ を x_k で表す．

いま，変数 x が整数格子で定義されていれば，その鉛直微分は次式のように半整数格子上の値として計算される．

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta z} \quad (\text{A.43})$$

逆に，変数 x が半整数格子で定義されていれば，その鉛直微分は，整数格子上の値として計算される．

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_k = \frac{x_{k+\frac{1}{2}} - x_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (\text{A.44})$$

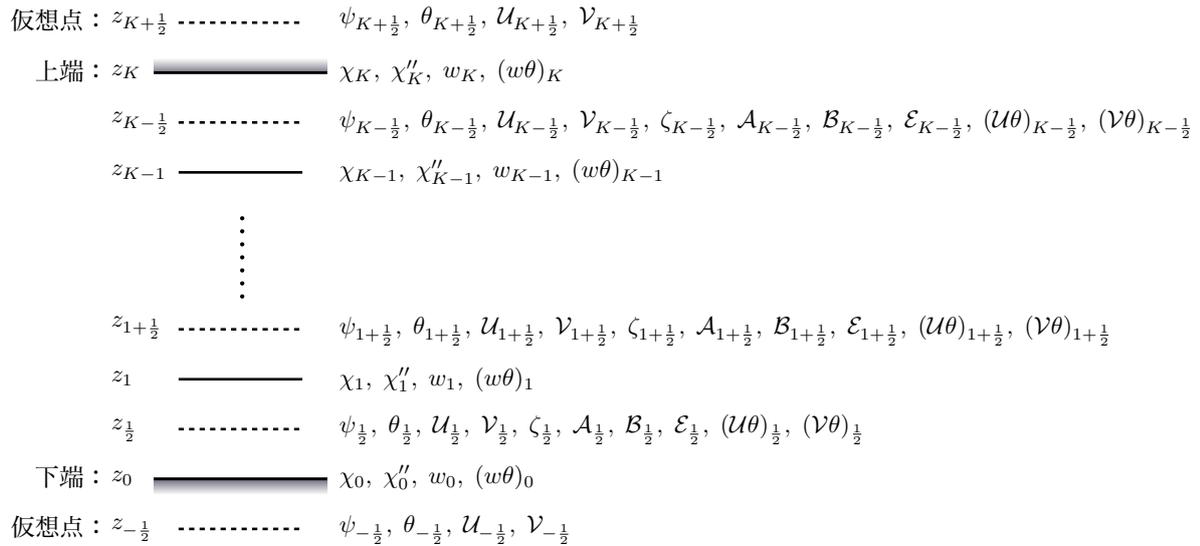


図 A.1 整数格子 (実線) と半整数格子 (破線) の位置関係と定義されている変数．

A.2.3 空間離散化した数理モデル

数理モデルに，上述の空間離散化を行うと，各鉛直格子点上の展開係数 $\phi_{n, k+\frac{1}{2}}^m(t)$ ， $\chi_{n, k}''^m(t)$ ， $\theta_{n, k+\frac{1}{2}}^m(t)$ の時間に関する常微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
& -n(n+1) \frac{d}{dt} \psi_{n, k+\frac{1}{2}}^m = \\
& \quad - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[-im \mathcal{A}_{n, k+\frac{1}{2}}^m + (n+2) \epsilon_{n+1}^m \mathcal{B}_{n+1, k+\frac{1}{2}}^m - (n-1) \epsilon_n^m \mathcal{B}_{n-1, k+\frac{1}{2}}^m \right] \\
& \quad - \nu_V n(n+1) \frac{\psi_{n, k+\frac{3}{2}}^m - 2\psi_{n, k+\frac{1}{2}}^m + \psi_{n, k-\frac{1}{2}}^m}{(\Delta z)^2} + \text{水平拡散項} \tag{A.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -n(n+1) \frac{d}{dt} \chi_{n, k}''^m = \\
& \quad \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[-im \frac{\mathcal{B}_{n, k+\frac{1}{2}}^m - \mathcal{B}_{n, k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right. \\
& \quad \left. - (n+2) \epsilon_{n+1}^m \frac{\mathcal{A}_{n+1, k+\frac{1}{2}}^m - \mathcal{A}_{n+1, k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} + (n-1) \epsilon_n^m \frac{\mathcal{A}_{n-1, k+\frac{1}{2}}^m - \mathcal{A}_{n-1, k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right] \\
& \quad + \frac{n(n+1)}{a^2} \left(\frac{g}{\Theta_0} \frac{\theta_{n, k+\frac{1}{2}}^m + \theta_{n, k-\frac{1}{2}}^m}{2} + \frac{\mathcal{E}_{n, k+\frac{1}{2}}^m - \mathcal{E}_{n, k-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} \right) \\
& \quad - \nu_V n(n+1) \frac{\chi_{n, k+1}''^m - 2\chi_{n, k}''^m + \chi_{n, k-1}''^m}{(\Delta z)^2} + \text{水平拡散項} \tag{A.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \theta_{n, k+\frac{1}{2}}^m = \\
& \quad - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[-im (\mathcal{U}\theta)_{n, k+\frac{1}{2}}^m \right. \\
& \quad \left. + (n+2) \epsilon_{n+1}^m (\mathcal{V}\theta)_{n+1, k+\frac{1}{2}}^m - (n-1) \epsilon_n^m (\mathcal{V}\theta)_{n-1, k+\frac{1}{2}}^m \right] \\
& \quad - \frac{(w\theta)_{n, k+1}^m - (w\theta)_{n, k}^m}{\Delta z} - \frac{\theta_{n, k+\frac{1}{2}}^m - (\theta_e)_{n, k+\frac{1}{2}}^m}{\tau} \\
& \quad - \kappa_V n(n+1) \frac{\theta_{n, k+\frac{3}{2}}^m - 2\theta_{n, k+\frac{1}{2}}^m + \theta_{n, k-\frac{1}{2}}^m}{(\Delta z)^2} \tag{A.47}
\end{aligned}$$

ただし，式 (A.45) と (A.47) では $k = 0, 1, \dots, K-1$ であり，式 (A.46) に対しては $k = 1, 2, \dots, K-1$ である．

非線形項は以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n, k+\frac{1}{2}}^m &= \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \left[\left(\zeta_{i, j, k+\frac{1}{2}} + 2\Omega\mu_j \right) \mathcal{U}_{i, j, k+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{w_{i, j, k+1} + w_{i, j, k}}{2} \right) \frac{\mathcal{V}_{i, j, k+\frac{3}{2}} - \mathcal{V}_{i, j, k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n, k+\frac{1}{2}}^m &= \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \left[\left(\zeta_{i, j, k+\frac{1}{2}} + 2\Omega\mu_j \right) \mathcal{V}_{i, j, k+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{w_{i, j, k+1} + w_{i, j, k}}{2} \right) \frac{\mathcal{U}_{i, j, k+\frac{3}{2}} - \mathcal{U}_{i, j, k-\frac{1}{2}}}{2\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$\mathcal{E}_{n, k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \left[\frac{\mathcal{U}_{i, j, k+\frac{1}{2}}^2 + \mathcal{V}_{i, j, k+\frac{1}{2}}^2}{2(1-\mu^2)} \right] \quad (\text{A.50})$$

$$(\mathcal{U}\theta)_{n, k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \mathcal{U}_{i, j, k+\frac{1}{2}} \theta_{i, j, k+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.51})$$

$$(\mathcal{V}\theta)_{n, k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) \mathcal{V}_{i, j, k+\frac{1}{2}} \theta_{i, j, k+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.52})$$

$$(w\theta)_{n, k}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) w_{i, j, k} \frac{\theta_{i, j, k+\frac{1}{2}} + \theta_{i, j, k-\frac{1}{2}}}{2} \quad (\text{A.53})$$

$$(\theta_e)_{n, k+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_j^g e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) (\theta_e)_{i, j, k+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.54})$$

また， $\mathcal{U}_{n, k+\frac{1}{2}}^m$ と $\mathcal{V}_{n, k+\frac{1}{2}}^m$ は式 (A.36) と式 (A.37) を鉛直離散化した以下の式で求められる．

$$\mathcal{U}_{n, k+\frac{1}{2}}^m = -(n+2)\epsilon_{n+1}^m \psi_{n+1, k+\frac{1}{2}}^m + (n-1)\epsilon_n^m \psi_{n-1, k+\frac{1}{2}}^m + im \frac{\chi_{n, k+1}^m - \chi_k^m}{\Delta z} \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{V}_{n, k+\frac{1}{2}}^m = im \psi_{n, k+\frac{1}{2}}^m + (n+2)\epsilon_{n+1}^m \frac{\chi_{n+1, k+1}^m - \chi_{n+1, k}^m}{\Delta z} - (n-1)\epsilon_n^m \frac{\chi_{n+1, k+1}^m - \chi_{n+1, k}^m}{\Delta z} \quad (\text{A.56})$$

A.2.4 上下端境界条件

上端 ($z = H = z_K$) の境界条件 (A.22) を離散化すると以下のようになる .

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \psi_{n, K+\frac{1}{2}}^m = \psi_{n, K-\frac{1}{2}}^m \quad (\text{A.57a})$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \chi_{n, K}^{\prime\prime m} = 0 \quad (\text{A.57b})$$

$$\chi = 0 \quad \rightarrow \quad \chi_{n, K}^m = 0 \quad (\text{A.57c})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_{n, K+\frac{1}{2}}^m = \theta_{n, K-\frac{1}{2}}^m \quad (\text{A.57d})$$

下端 ($z = 0 = z_0$) の境界条件 (A.23) の 1 つ目に関して ,

$$\nu_V \frac{\partial \psi}{\partial z} = C\psi \quad \rightarrow \quad \nu_V \frac{\psi_{n, \frac{1}{2}}^m - \psi_{n, -\frac{1}{2}}^m}{\Delta z} = C \frac{\psi_{n, \frac{1}{2}}^m + \psi_{n, -\frac{1}{2}}^m}{2} \quad (\text{A.58})$$

と書けるので ,

$$\alpha \equiv \frac{2\nu_V - C\Delta z}{2\nu_V + C\Delta z} \quad (\text{A.59})$$

とおけば , 境界条件 (A.58) は ,

$$\psi_{n, -\frac{1}{2}}^m = \alpha \psi_{n, \frac{1}{2}}^m \quad (\text{A.60})$$

となる . 下端境界条件 (A.23) の 2 つ目 ,

$$\nu_V \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = C \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

に関しては , $\chi_{n, k}^m$ の鉛直 1 階微分 $\chi_{n, k+\frac{1}{2}}^{\prime m}$ が半整数格子に定義されていると仮想すること
とで , ψ の場合と同様にして ,

$$\chi_{n, -\frac{1}{2}}^{\prime m} = \alpha \chi_{n, \frac{1}{2}}^{\prime m}$$

が得られる . そして , 上式を利用すれば , $\chi_{n, 0}^{\prime\prime m}$ を以下のように計算できる .

$$\begin{aligned} \chi_{n, 0}^{\prime\prime m} &= \frac{\chi_{n, \frac{1}{2}}^{\prime m} - \chi_{n, -\frac{1}{2}}^{\prime m}}{\Delta z} \\ &= \left(\frac{1 - \alpha}{\Delta z} \right) \chi_{n, \frac{1}{2}}^{\prime m} \\ &= \left(\frac{1 - \alpha}{\Delta z} \right) \frac{\chi_{n, 1}^m - \chi_{n, 0}^m}{\Delta z} \\ &= \left[\frac{1 - \alpha}{(\Delta z)^2} \right] \chi_{n, 1}^m \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

ただし，4行目への変形には下端境界条件 (A.23) の3つ目，

$$\chi = 0 \rightarrow \chi_{n,0}^m = 0 \quad (\text{A.62})$$

を用いている．結局，下端境界条件 (A.23) の離散化表現は以下ようになる．

$$\nu_V \frac{\partial \psi}{\partial z} = C\psi \rightarrow \psi_{n,-\frac{1}{2}}^m = \alpha \psi_{n,\frac{1}{2}}^m \quad (\text{A.63a})$$

$$\nu_V \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = C \frac{\partial \chi}{\partial z} \rightarrow \chi_{n,0}^{\prime\prime m} = \left[\frac{1-\alpha}{(\Delta z)^2} \right] \chi_{n,1}^m \quad (\text{A.63b})$$

$$\chi = 0 \rightarrow \chi_{n,0}^m = 0 \quad (\text{A.63c})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \rightarrow \theta_{n,-\frac{1}{2}}^m = \theta_{n,\frac{1}{2}}^m \quad (\text{A.63d})$$

A.3 時間発展計算

ある時刻において，

- $\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m$ ただし $k = -1, 0, \dots, K$
- $\mathcal{A}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \mathcal{B}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \mathcal{E}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, (\mathcal{U}\theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m, (\mathcal{V}\theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m$
ただし $k = 0, 1, \dots, K-1$
- $\chi_{n,k}^{\prime\prime m}, w_{n,k}^m, (w\theta)_{n,k}^m$ ただし $k = 0, 1, \dots, K$

の値が既知だとする．すると，以下の手順で，次の時刻の上記の変数の値が求められる．

(▶ は，その変数が次の時刻のものであることを表す．)

(1) 予報式 (A.45)，(A.46)，(A.47) から，

▶ $\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m$ ただし $k = 0, 1, \dots, K-1$

▶ $\chi_{n,k}^{\prime\prime m}$ ただし $k = 1, 2, \dots, K$

を求める．

(2) 連立1次方程式 (三重対角行列)，

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{n,1}^m \\ \chi_{n,2}^m \\ \chi_{n,3}^m \\ \vdots \\ \chi_{n,K-2}^m \\ \chi_{n,K-1}^m \end{pmatrix} = (\Delta z)^2 \begin{pmatrix} \chi_{n,1}^{\prime\prime m} \\ \chi_{n,2}^{\prime\prime m} \\ \chi_{n,3}^{\prime\prime m} \\ \vdots \\ \chi_{n,K-2}^{\prime\prime m} \\ \chi_{n,K-1}^{\prime\prime m} \end{pmatrix} \quad (\text{A.64})$$

を解くことで、

$$\blacktriangleright \chi_{n,k}^m \text{ ただし } k = 1, 2, \dots, K-1$$

を求める。なお、式 (A.64) は、

$$\frac{\chi_{n,k+1}^m - 2\chi_{n,k}^m + \chi_{n,k-1}^m}{(\Delta z)^2} = \chi_{n,k}^{\prime\prime m} \quad (\text{A.65})$$

を $k = 1$ から $K - 1$ まで連立させたものである。境界条件の $\chi_{n,0}^m = \chi_{n,K}^m = 0$ を用いている。

(3) 上端境界条件 (A.57) から、上端 z_K または仮想点 $z_{K+\frac{1}{2}}$ 上の、

$$\blacktriangleright \psi_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \theta_{n,K+\frac{1}{2}}^m, \chi_{n,K}^{\prime\prime m}, \chi_{n,K}^m$$

を求める。

(4) 下端境界条件 (A.63) から、下端 z_0 または仮想点 $z_{-\frac{1}{2}}$ 上の、

$$\blacktriangleright \psi_{n,-\frac{1}{2}}^m, \theta_{n,-\frac{1}{2}}^m, \chi_{n,0}^{\prime\prime m}, \chi_{n,0}^m$$

を求める。

(5) 式 (A.31) と (A.32) から、

$$\blacktriangleright \zeta_{n,k+\frac{1}{2}}^m \text{ ただし } k = 0, 1, \dots, K-1$$

$$\blacktriangleright w_{n,k}^m \text{ ただし } k = 0, 1, \dots, K$$

を求める。

(6) 式 (A.55) と (A.56) から、

$$\blacktriangleright \mathcal{U}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \mathcal{V}_{n,k+\frac{1}{2}}^m \text{ ただし } k = 0, 1, \dots, K-1$$

を求める。

(7) すべての波数について上の (1) から (6) を計算した後に、式 (A.26) , (A.27) , (A.28) ,

(A.33) , (A.34) により、実空間上の変数、

$$\blacktriangleright \theta_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \zeta_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \mathcal{U}_{i,j,k+\frac{1}{2}}, \mathcal{V}_{i,j,k+\frac{1}{2}}$$

$$\text{ただし } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K-1$$

$$\blacktriangleright w_{i,j,k} \text{ ただし } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 0, 1, \dots, K$$

を求める。

(8) 境界条件より、

$$\mathcal{U}_{i,j,-\frac{1}{2}} = \alpha \mathcal{U}_{i,j,\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{U}_{i,j,K+\frac{1}{2}} = \mathcal{U}_{i,j,K-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.66})$$

$$\mathcal{V}_{i,j,-\frac{1}{2}} = \alpha \mathcal{V}_{i,j,\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{V}_{i,j,K+\frac{1}{2}} = \mathcal{V}_{i,j,K-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.67})$$

なので、上式から、

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \mathcal{U}_{i,j,-\frac{1}{2}}, \mathcal{U}_{i,j,K+\frac{1}{2}}, \mathcal{V}_{i,j,-\frac{1}{2}}, \mathcal{V}_{i,j,K+\frac{1}{2}} \\ &\quad \text{ただし } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J \end{aligned}$$

を求める．

(9) 式 (A.48)–(A.53) により，すべての波数について，

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \mathcal{A}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \mathcal{B}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \mathcal{E}_{n,k+\frac{1}{2}}^m, (\mathcal{U}\theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m, (\mathcal{V}\theta)_{n,k+\frac{1}{2}}^m \\ &\quad \text{ただし } k = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright (w\theta)_{n,k}^m \quad \text{ただし } k = 0, 1, \dots, K$$

を求める．

以上により，本節冒頭で示した変数がそろそろ．(1) から (9) を繰り返すことで，時間発展が計算される．実際には，精度よく時間発展を計算するため，以下で表される古典的な 4 次のルンゲ・クッタ法を用いる．

$$\mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{x}_l + \frac{\mathbf{k}_1}{6} + \frac{\mathbf{k}_2}{3} + \frac{\mathbf{k}_3}{3} + \frac{\mathbf{k}_4}{6} \quad (\text{A.68})$$

ただし，

$$\mathbf{k}_1 = \Delta t f(\mathbf{x}_l) \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{k}_2 = \Delta t f\left(\mathbf{x}_l + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right) \quad (\text{A.70})$$

$$\mathbf{k}_3 = \Delta t f\left(\mathbf{x}_l + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right) \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{k}_4 = \Delta t f(\mathbf{x}_l + \mathbf{k}_3) \quad (\text{A.72})$$

であり， \mathbf{x}_l は時刻 t_l での，すべての予報変数 $(\phi_{n,k+\frac{1}{2}}^m, \chi_{n,k}^m, \theta_{n,k+\frac{1}{2}}^m)$ をまとめた変数ベクトル， Δt は時間刻み幅， $f(\mathbf{x})$ は上記の (1) から (9) の計算をまとめた関数である．

A.4 水平拡散項

本節では，Becker (2001) が提案した角運動量を正しく保存する水平拡散項 (超粘性を含む) を紹介する．その後，水平拡散係数が大きい場合に有効な数値計算法について述べる．

A.4.1 角運動量を保存する水平拡散項

従来，水平拡散項として水平ラプラシアンが用いられてきたが，このような水平拡散項は角運動量を正しく保存しない．角運動量を保存する水平拡散項 H_q は次式で書かれる

(Becker, 2001) .

$$\mathbf{D}_{H,q} = \nu_H \left(\nabla_H^2 \mathbf{v}_q + \nabla \hat{\mathcal{D}}_q + 2 \frac{\mathbf{v}_q}{a^2} \right) \quad (\text{A.73})$$

ただし ,

$$\mathbf{v}_q = (-1)^q a^{2q} \nabla_H^{2q} \mathbf{v} \quad (\text{A.74})$$

$$\hat{\mathcal{D}}_q = \nabla \cdot \mathbf{v}_q \quad (\text{A.75})$$

である . 式 (A.73) は , $q \geq 1$ のときは数値的安定性のために導入する超粘性を , $q = 0$ のときは物理的に意味のある通常の粘性 (拡散) を表す .

式 (A.73) を , $\psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m$ と $\chi_{n,k}^m$ の予報式 (A.45) と (A.46) の形に直すと ,

$$\text{式 (A.45) : } + \frac{\nu_H}{a^2} \left\{ [n(n+1)]^{1+q} - 2[n(n+1)]^q \right\} n(n+1) \psi_{n,k+\frac{1}{2}}^m \quad (\text{A.76})$$

$$\text{式 (A.46) : } + \frac{\nu_H}{a^2} \left\{ 2[n(n+1)]^{1+q} - 2[n(n+1)]^q \right\} n(n+1) \chi_{n,k}^m \quad (\text{A.77})$$

となる .

ここで $q = 0$ とし , 自転軸対称 ($\partial/\partial\lambda = 0$) を仮定すると , 東西風 u の運動方程式の水平拡散項は ,

$$(\mathbf{D}_{H,0})_\lambda = \nu_H \left[\frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{u}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{2u}{a^2} \right] \quad (\text{A.78})$$

となる . また , 南北風 v の運動方程式の水平拡散項は ,

$$(\mathbf{D}_{H,0})_\phi = \nu_H \left\{ \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - \frac{v}{a^2 \cos^2 \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) \right] + \frac{2v}{a^2} \right\} \quad (\text{A.79})$$

となる .

式 (A.78) から $(\mathbf{D}_{H,0})_\lambda = 0$ になるのは ,

$$u = u_0 \cos \phi \quad (\text{A.80})$$

(u_0 は定数) のときである . つまり , このときの水平拡散項は東西風速場を剛体回転に近づけるように働くのである .

A.4.2 水平拡散係数が大きい場合の数値計算法

水平拡散係数の値が大きい場合 , 強い拡散効果によって , 解の時間発展計算は早く定常状態に達することが予想される . しかし , 実際は拡散係数を大きくすると CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件から時間刻み幅を小さくする必要があるため , 結果として定常状態に達するまでに要する計算回数が多くなり , 計算時間が増大する .

このような、解自体は急激に一定値に収束するが、陽的公式では刻み幅を十分に小さくしないと正しい解が得られない常微分方程式は「硬い方程式 (stiff equation)」と呼ばれる。硬い方程式は、解核行列 (resolvent matrix) を利用した数値計算法により、時間発展計算を効率的に行うことができる。^{*2} 水平拡散項にこの計算法を利用し、時間発展計算に古典的な 4 次のルンゲ・クッタ法を用いる場合、時間積分は以下ようになる。

$$\boldsymbol{x}_l = E \left[E \left(\boldsymbol{x}_l + \frac{1}{6} \boldsymbol{k}_1 \right) + \frac{1}{3} (\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3) \right] + \frac{1}{6} \boldsymbol{k}_4 \quad (\text{A.81})$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \Delta t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l) \quad (\text{A.82})$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \Delta t \boldsymbol{f} \left[E \left(\boldsymbol{x}_l + \frac{1}{2} \boldsymbol{k}_1 \right) \right] \quad (\text{A.83})$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \Delta t \boldsymbol{f} \left(E \boldsymbol{x}_l + \frac{1}{2} \boldsymbol{k}_2 \right) \quad (\text{A.84})$$

$$\boldsymbol{k}_4 = \Delta t \boldsymbol{f} [E (E \boldsymbol{x}_l + \boldsymbol{k}_3)] \quad (\text{A.85})$$

ここで E は、各予報変数の各波数成分に作用する水平拡散項の係数 $[-\nu_H n(n+1)/a^2$ など] を ν_* としたときに、

$$\exp \left(\nu_* \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (\text{A.86})$$

を対応する対角成分とする対角行列である。

A.5 自転軸対称 2次元化

本章で構築してきた 3 次元ブシネスク流体プリミティブ方程式系の数値モデルは、 $\partial/\partial\lambda = 0$ とすることで、自転軸対称対称な 2 次元モデルにすることができる。このとき、東西波数に関しては $m = 0$ の成分のみを計算すればよい。

A.6 ソースコードの公開先

筆者が Fortran 90 で作成した、3 次元および 2 次元数値モデルのソースコードは、下記 URL にて公開されている。数値モデル化に関するより詳細な情報についても、下記 URL を参照してほしい。

<http://www.gfd-dennou.org/member/hiroki/homepage/bpmodel.html>

^{*2} 硬い方程式の数値計算法については 石岡 (2004) の 4.7 節が、解核行列については 笠原 (1982) の第 4 章が詳しい。

付録 B

図集

本研究で計算した数値解の，以下の物理量を図示する．

- 無次元東西風： $u^* \equiv u/(a\Omega)$
 - 等値線間隔は，それぞれの最大値 (各パネル上部の値) の 10 分の 1
- 無次元子午面流線関数： $\Psi^* \equiv \Psi/(aH\Omega)$
 - 等値線間隔は，それぞれの最大値 (各パネル上部の値) の 10 分の 1
- 無次元温度： $\theta^* \equiv \theta/\Theta_0$
 - 等値線間隔は，0.01

図 B.1–B.10 , B.13–B.22 , B.25–B.34 , B.37 , B.38 は等温位静止大気を初期条件とした時間発展計算で得られた，定常解 (S)，あるいは統計的平衡状態にある解の時間平均場 (SS) を示している．パネルの欠損は，その外部条件では適切な数値解が得られなかったことを示す．図中の太枠は，多重安定平衡状態が得られたことを示す．もう 1 つの解は，図 B.11 , B.12 , B.23 , B.24 , B.35 , B.36 に示されている．表 B.1 に外部パラメータの値と図の対応を示す．

表 B.1 外部パラメータの値と図の対応．なお， $A = \pi^2 \tau \Omega E_V$ ， $B = 20\pi^2 E_H E_V$ である．

対応する図	A	B	E_V	$\tau \Omega$	E_H
u^* : 図 B.1 , B.2 Ψ^* : 図 B.13 , B.14 θ^* : 図 B.25 , B.26	$\pi^2 \times 10^1$ $\pi^2 \times 10^0$ $\pi^2 \times 10^{-1}$ $\pi^2 \times 10^{-2}$ $\pi^2 \times 10^{-3}$	$2\pi^2 \times 10^{-2}$	10^{-3}	10^4 10^3 10^2 10 1	1
u^* : 図 B.3 , B.4 Ψ^* : 図 B.15 , B.16 θ^* : 図 B.27 , B.28	$\pi^2 \times 10^1$ $\pi^2 \times 10^0$ $\pi^2 \times 10^{-1}$ $\pi^2 \times 10^{-2}$ $\pi^2 \times 10^{-3}$	$2\pi^2 \times 10^0$		10^4 10^3 10^2 10 1	10^2
u^* : 図 B.5 , B.6 Ψ^* : 図 B.17 , B.18 θ^* : 図 B.29 , B.30	$\pi^2 \times 10^{-2}$	$2\pi^2 \times 10^0$ $2\pi^2 \times 10^{-1}$ $2\pi^2 \times 10^{-2}$ $2\pi^2 \times 10^{-3}$		10	10^2 10 1 10^{-1}
u^* : 図 B.7 , B.8 Ψ^* : 図 B.19 , B.20 θ^* : 図 B.31 , B.32		$2\pi^2 \times 10^0$ $2\pi^2 \times 10^{-1}$ $2\pi^2 \times 10^{-2}$ $2\pi^2 \times 10^{-3}$			10^2 10 1 10^{-1}
u^* : 図 B.9 , B.10 Ψ^* : 図 B.21 , B.22 θ^* : 図 B.33 , B.34	$\pi^2 \times 10^0$	$2\pi^2 \times 10^{-4}$ $2\pi^2 \times 10^{-5}$ $2\pi^2 \times 10^{-6}$ $2\pi^2 \times 10^{-7}$ $2\pi^2 \times 10^{-8}$		10^3	10^{-2} 10^{-3} 10^{-4} 10^{-5} 10^{-6}
図 B.37 , B.38	$\pi^2 \times 10^{-1}$	$2\pi^2 \times 10^0$		10^{-2}	10

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

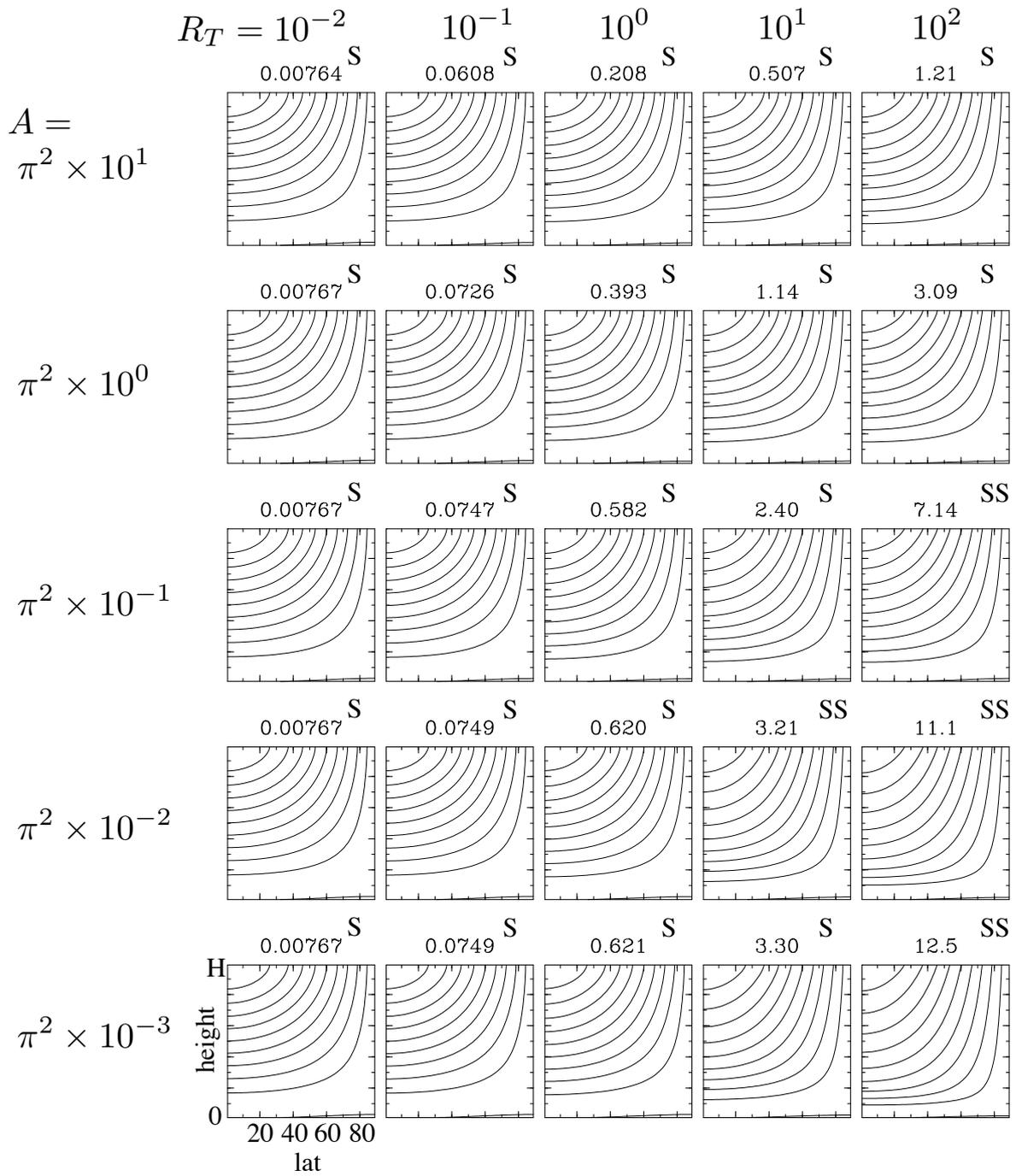


図 B.1

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

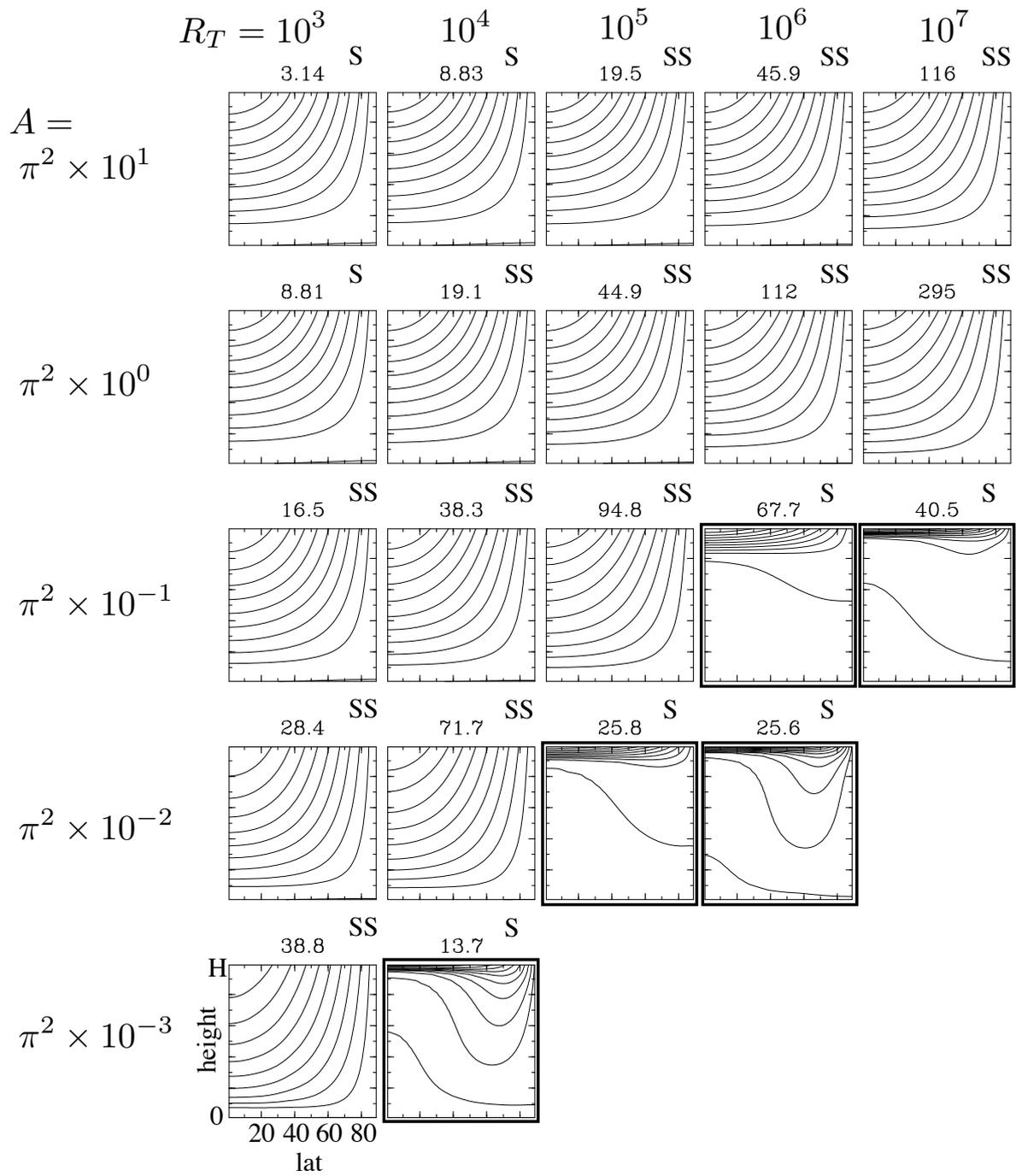


图 B.2

$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

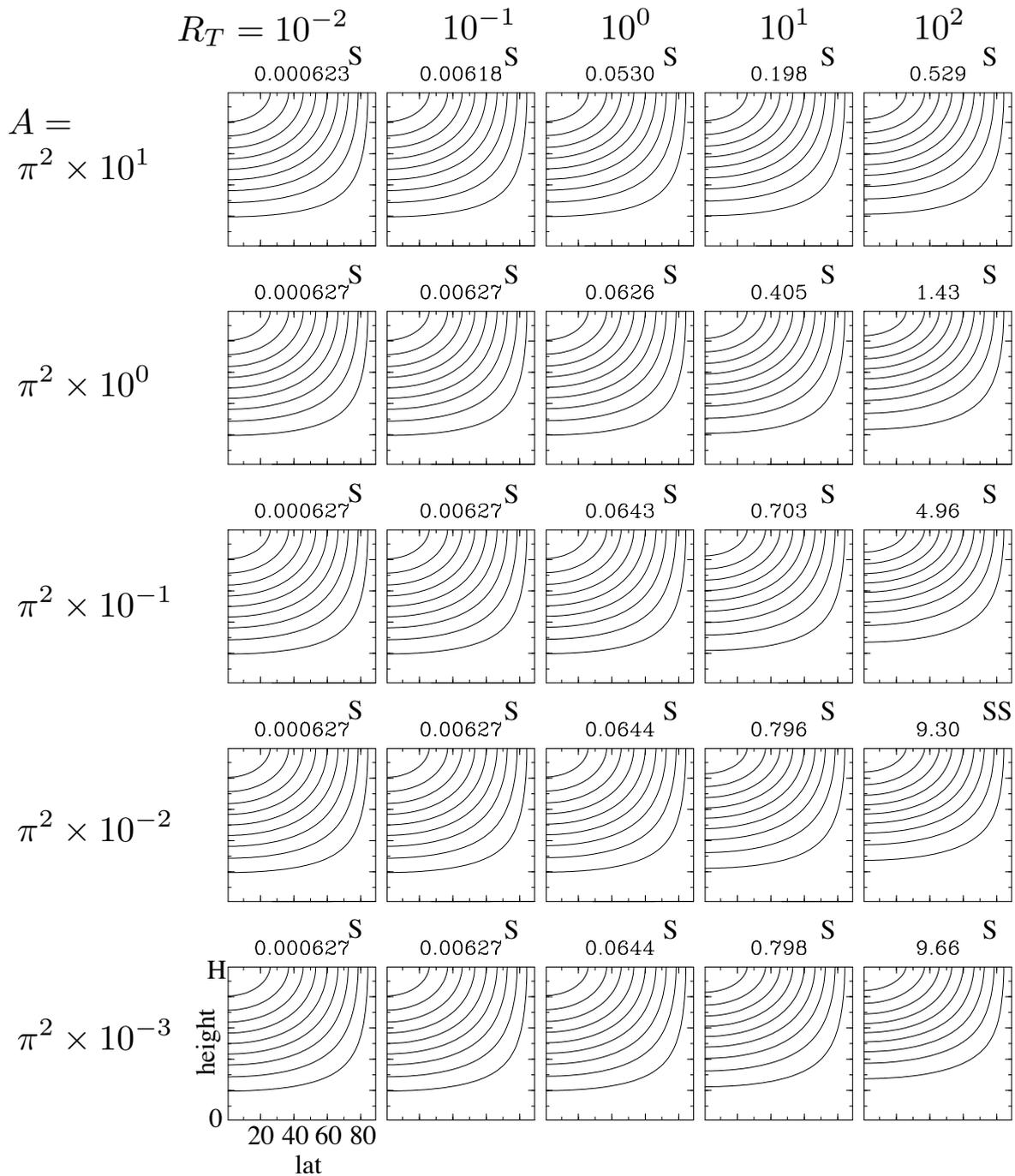


図 B.3

$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

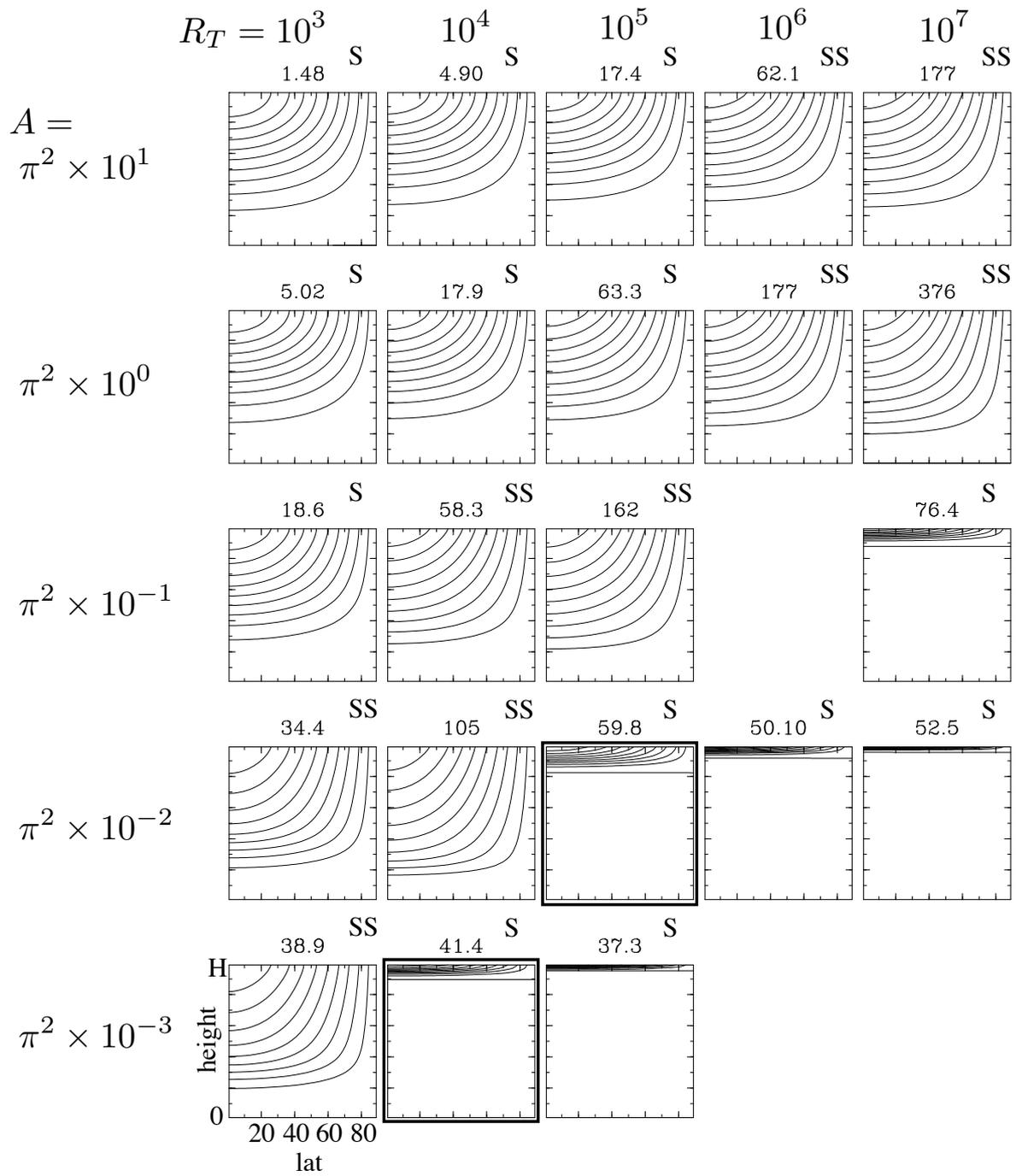


图 B.4

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

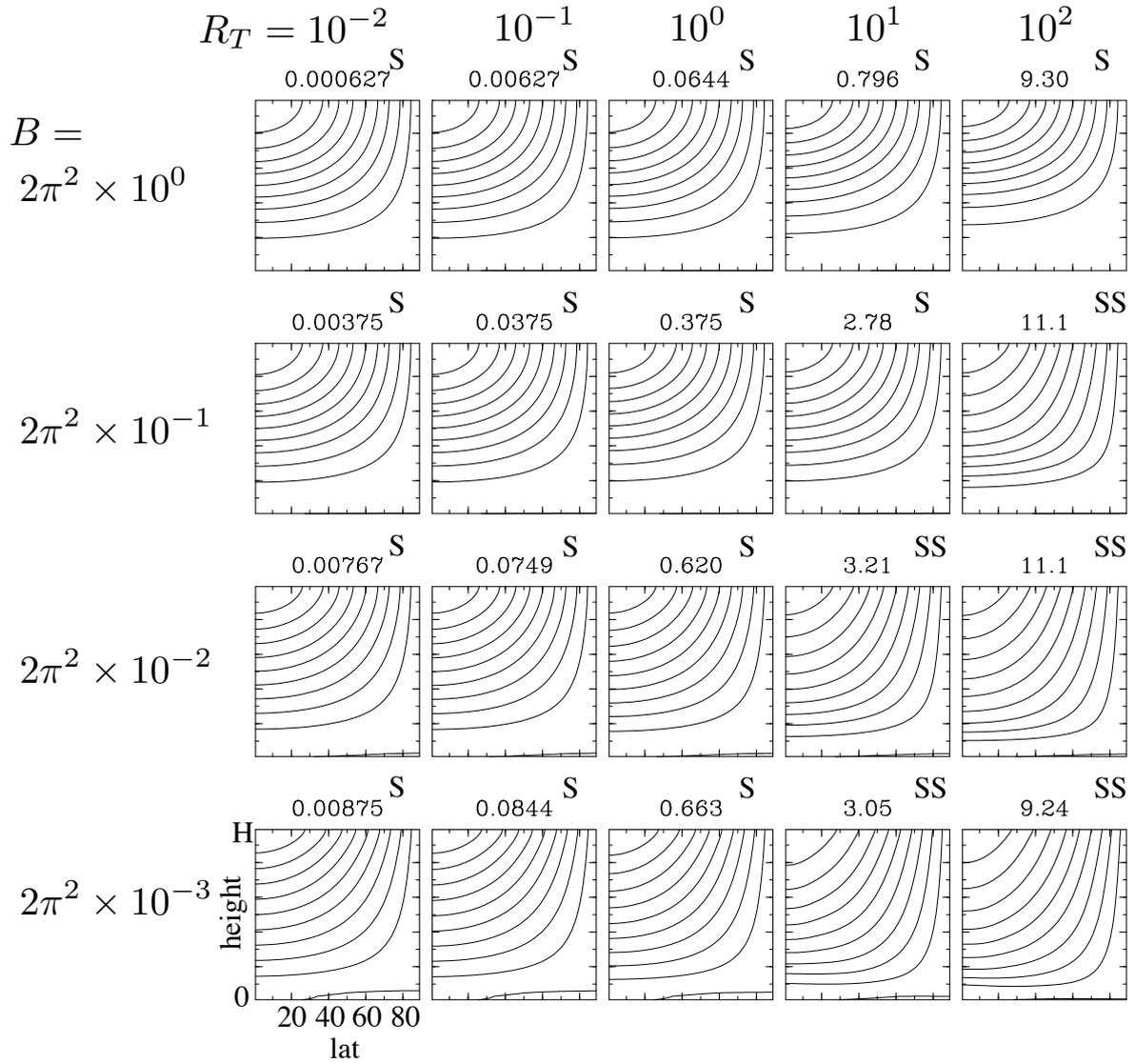
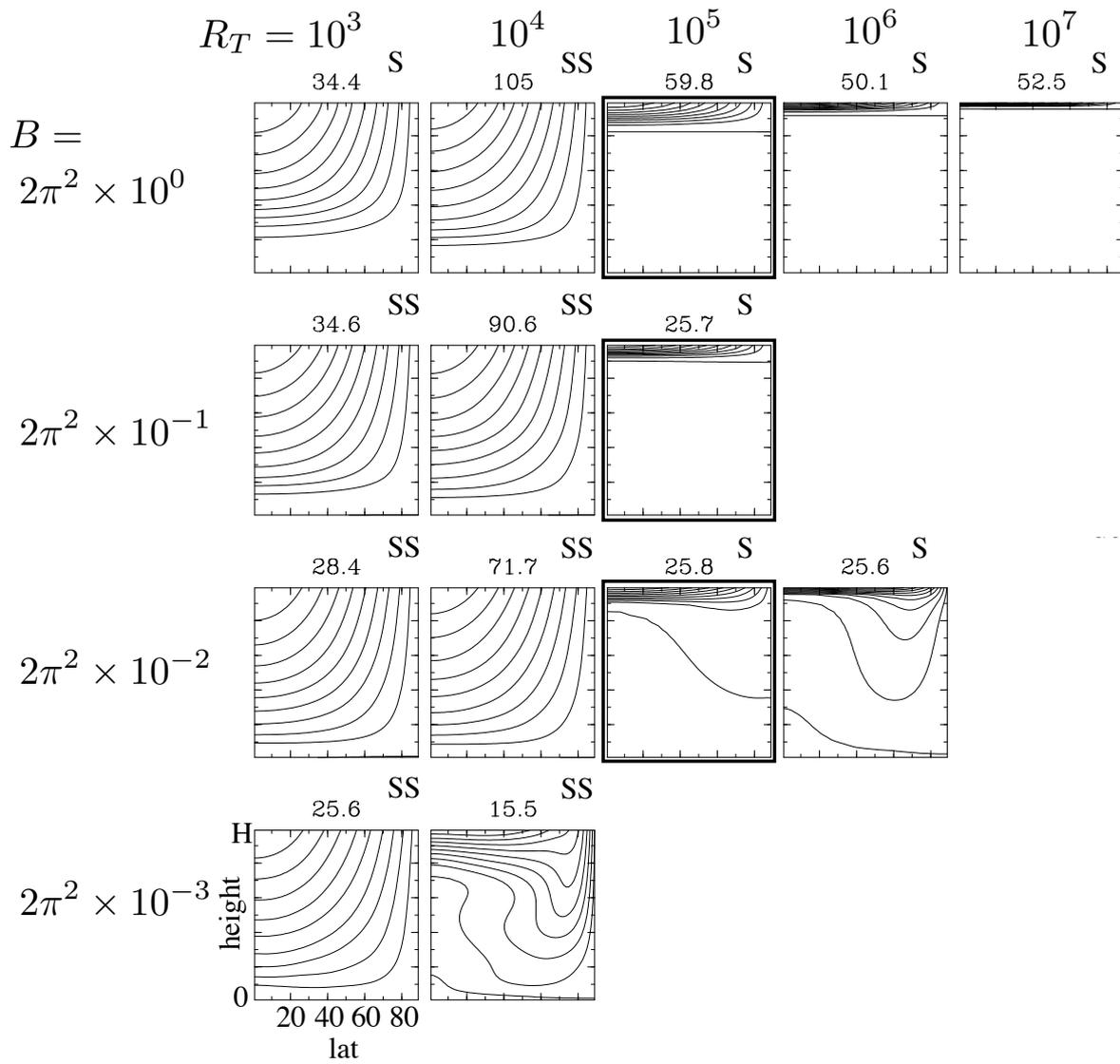


図 B.5

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$



☒ B.6

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

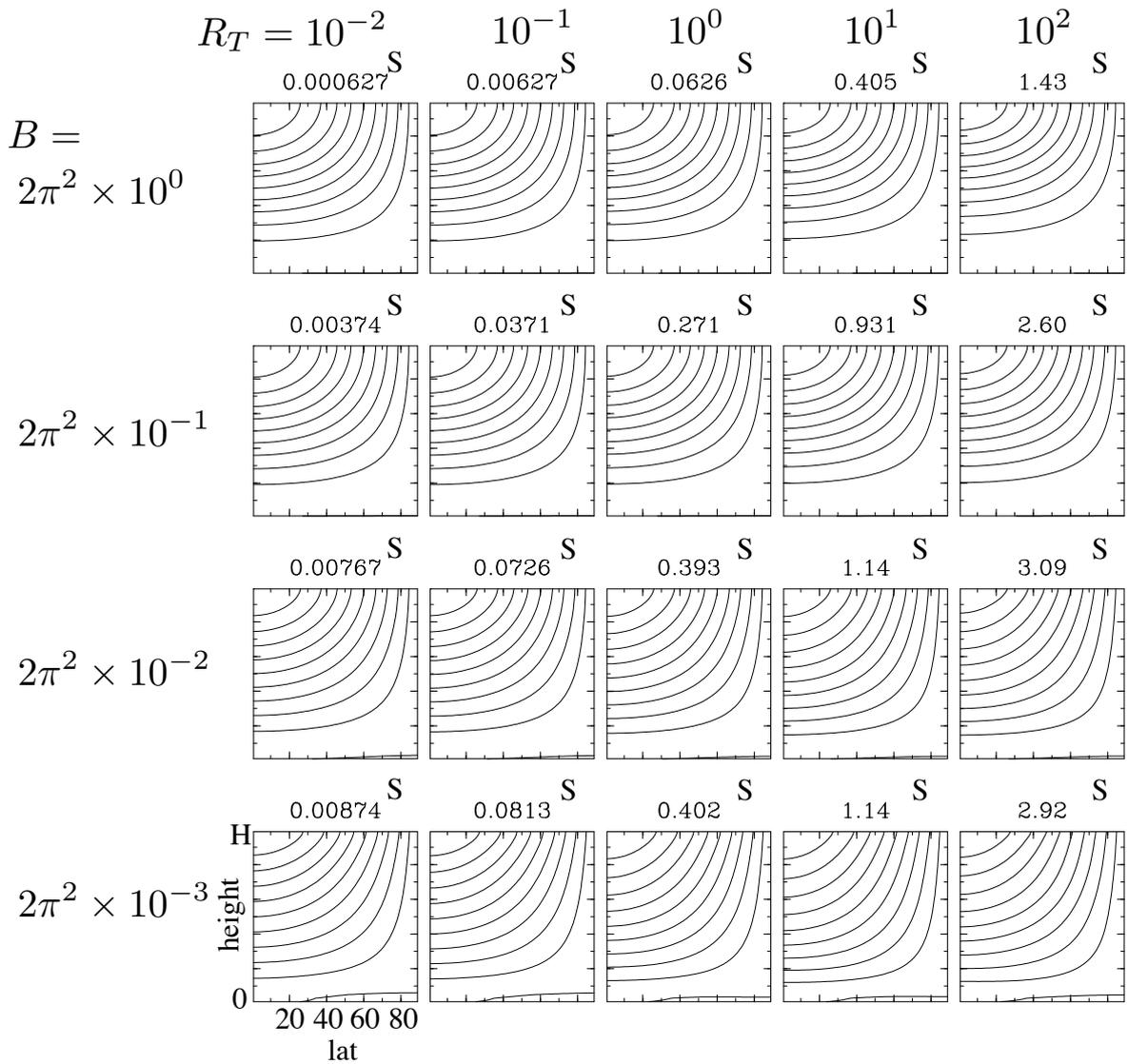


図 B.7

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

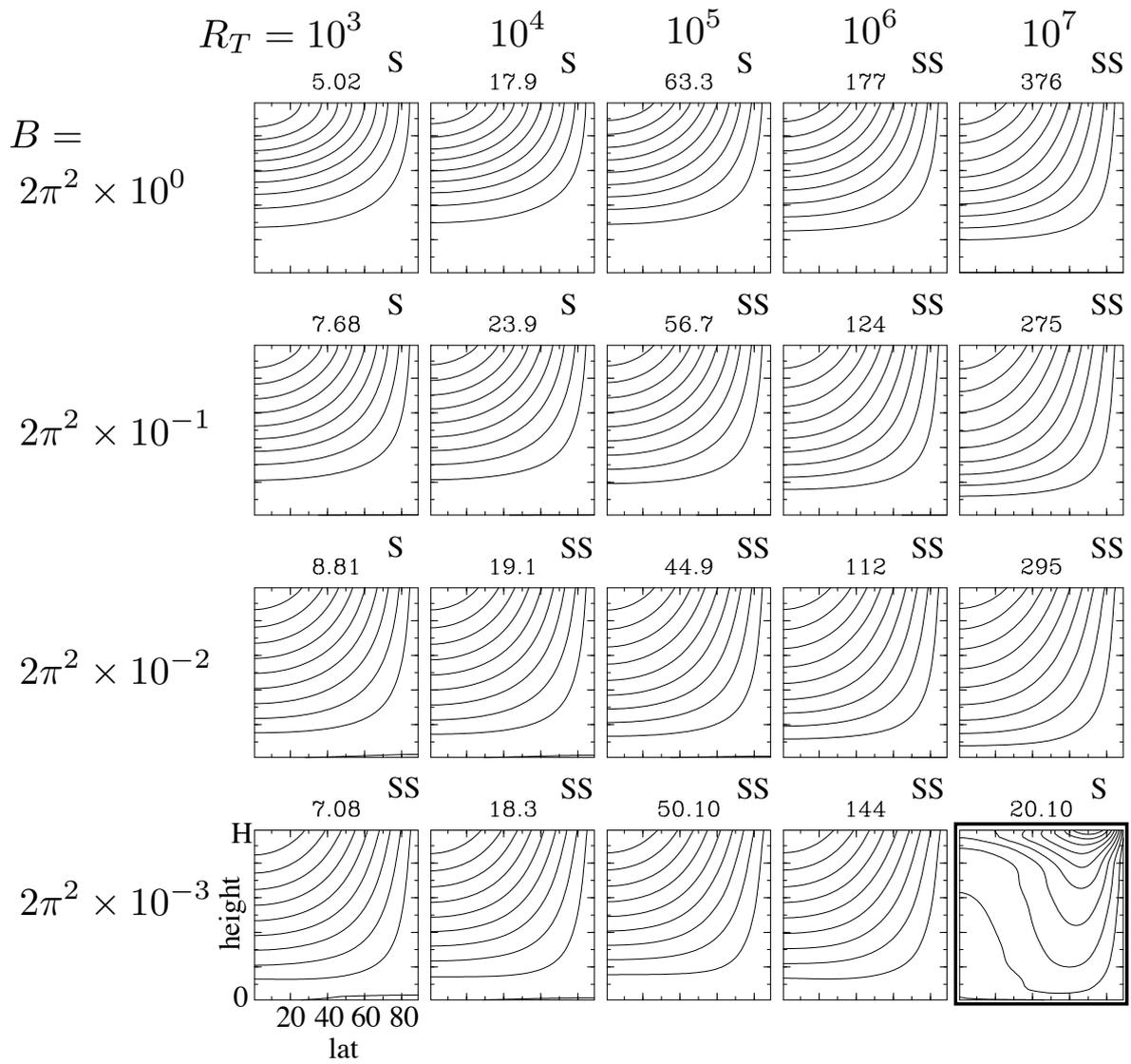


图 B.8

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

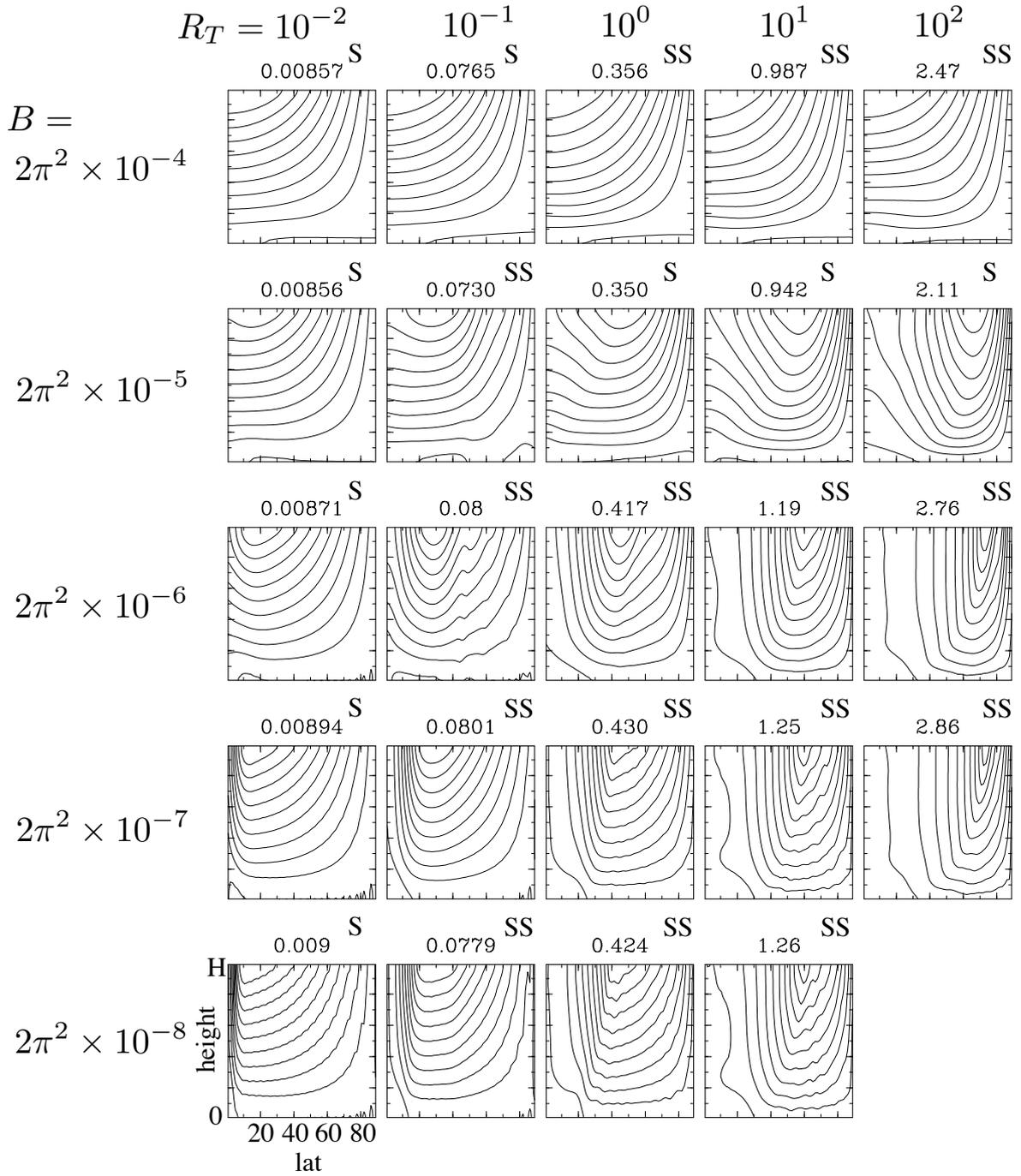


図 B.9

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = 10^3 \quad \text{SS}$$

$$10^4 \quad \text{SS}$$

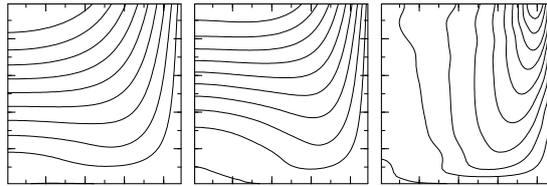
$$10^5 \quad \text{SS}$$

$$10^6$$

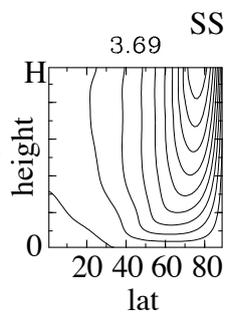
$$10^7$$

$$B =$$

$$2\pi^2 \times 10^{-4}$$



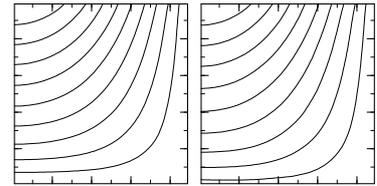
$$2\pi^2 \times 10^{-5}$$



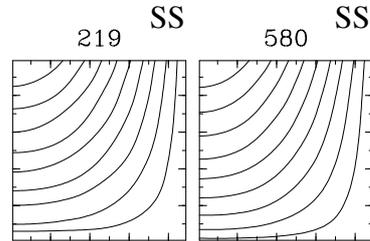
$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7$$

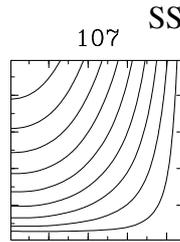
$$A = \pi^2 \times 10^{-1}$$



$$\pi^2 \times 10^{-2}$$

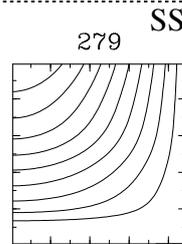


$$\pi^2 \times 10^{-3}$$

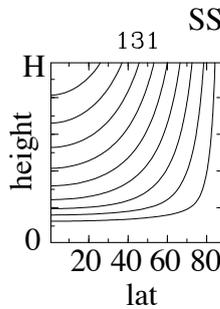


$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}$$



$$\pi^2 \times 10^{-3}$$



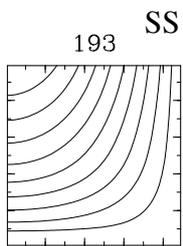
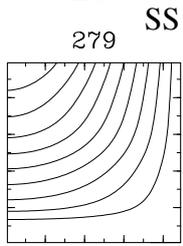
☒ B.11

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

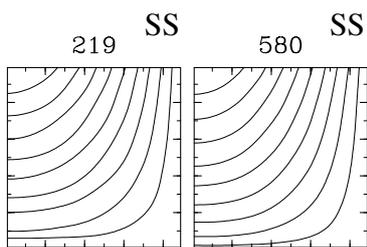
$$R_T = 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7$$

$$B =$$

$$2\pi^2 \times 10^0$$



$$2\pi^2 \times 10^{-1}$$

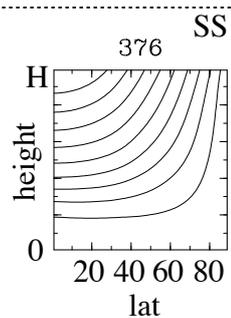


$$2\pi^2 \times 10^{-2}$$

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

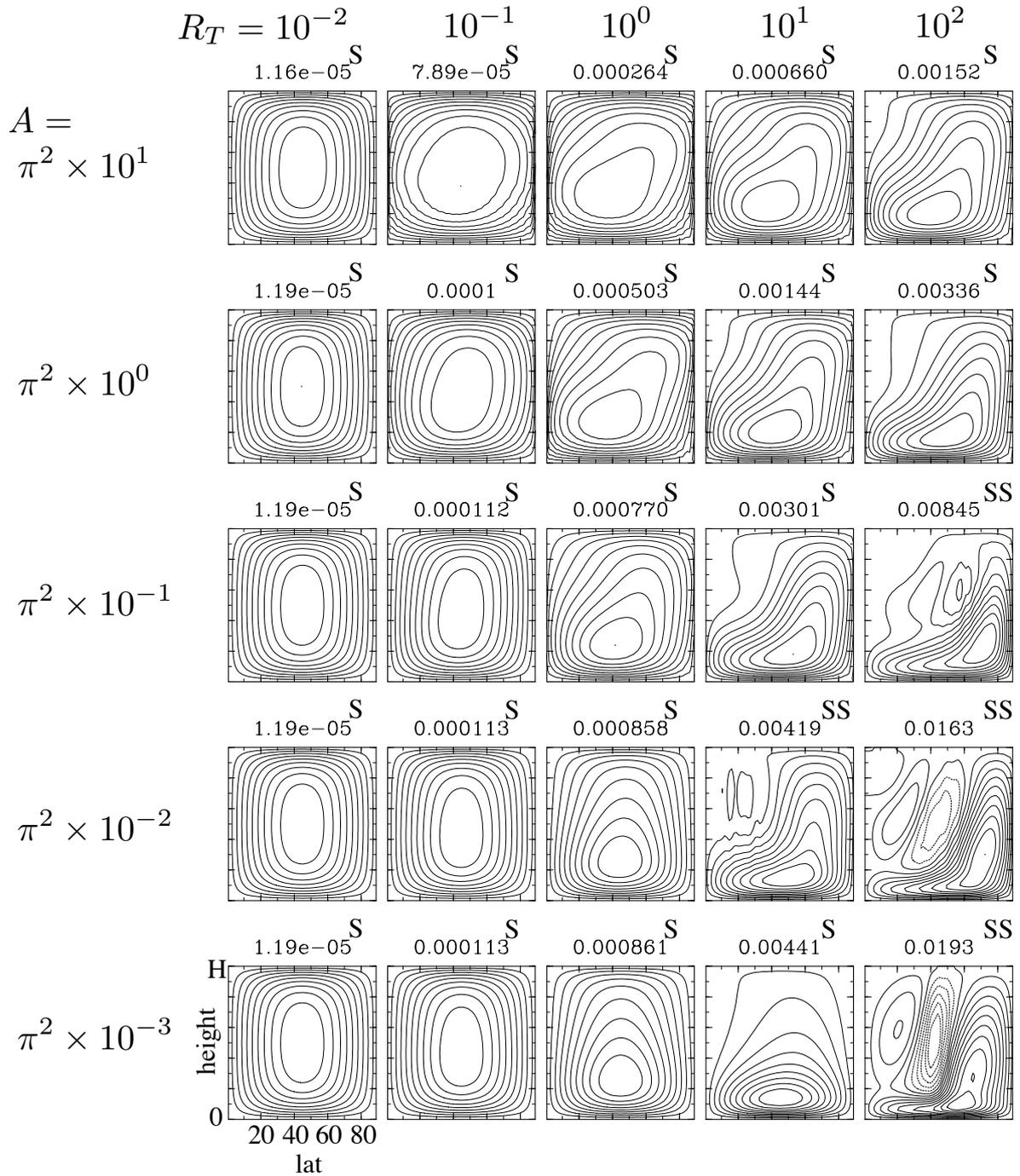
$$B =$$

$$2\pi^2 \times 10^{-3}$$



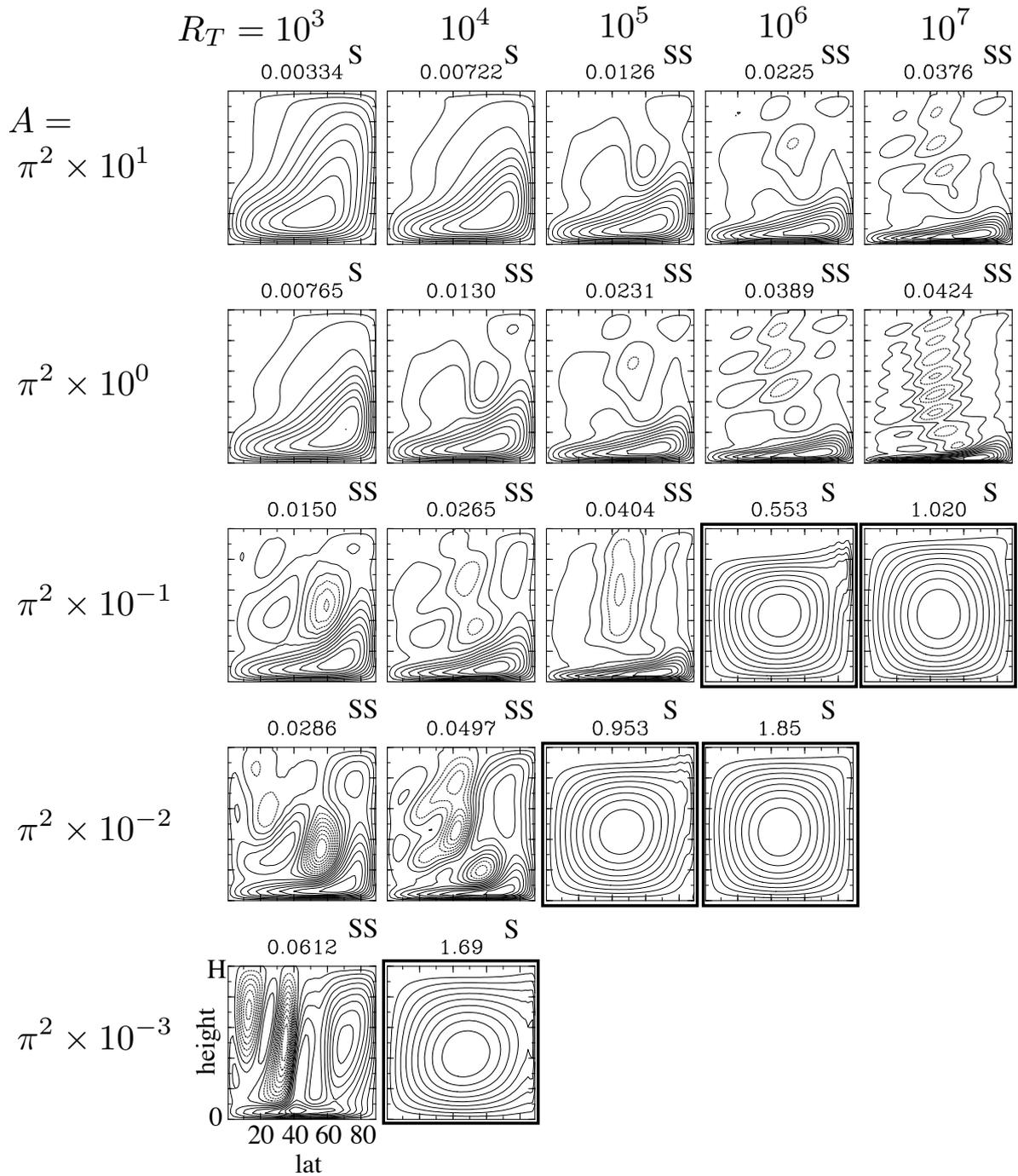
⊠ B.12

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$



☒ B.13

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$


 B.14

$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

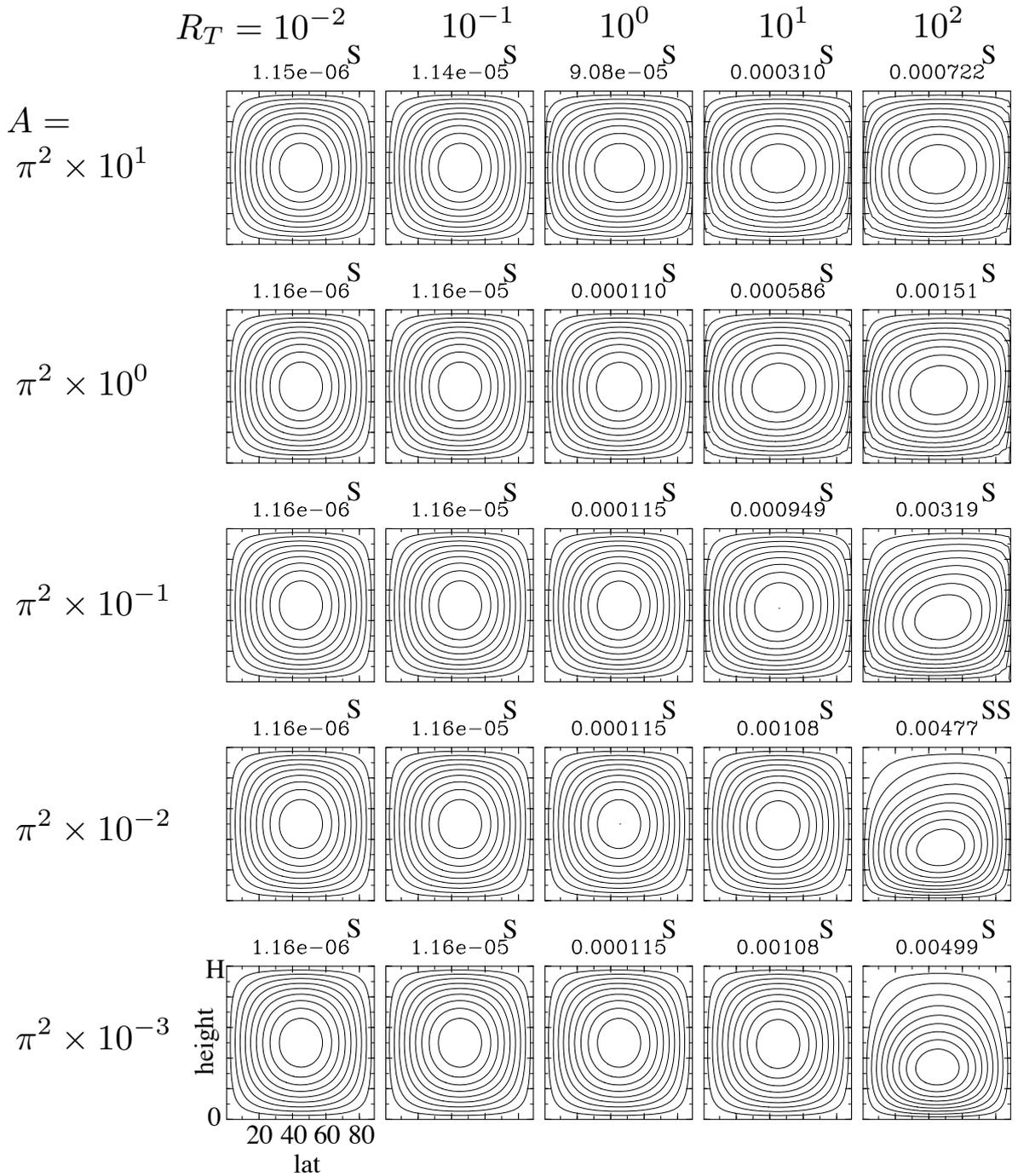
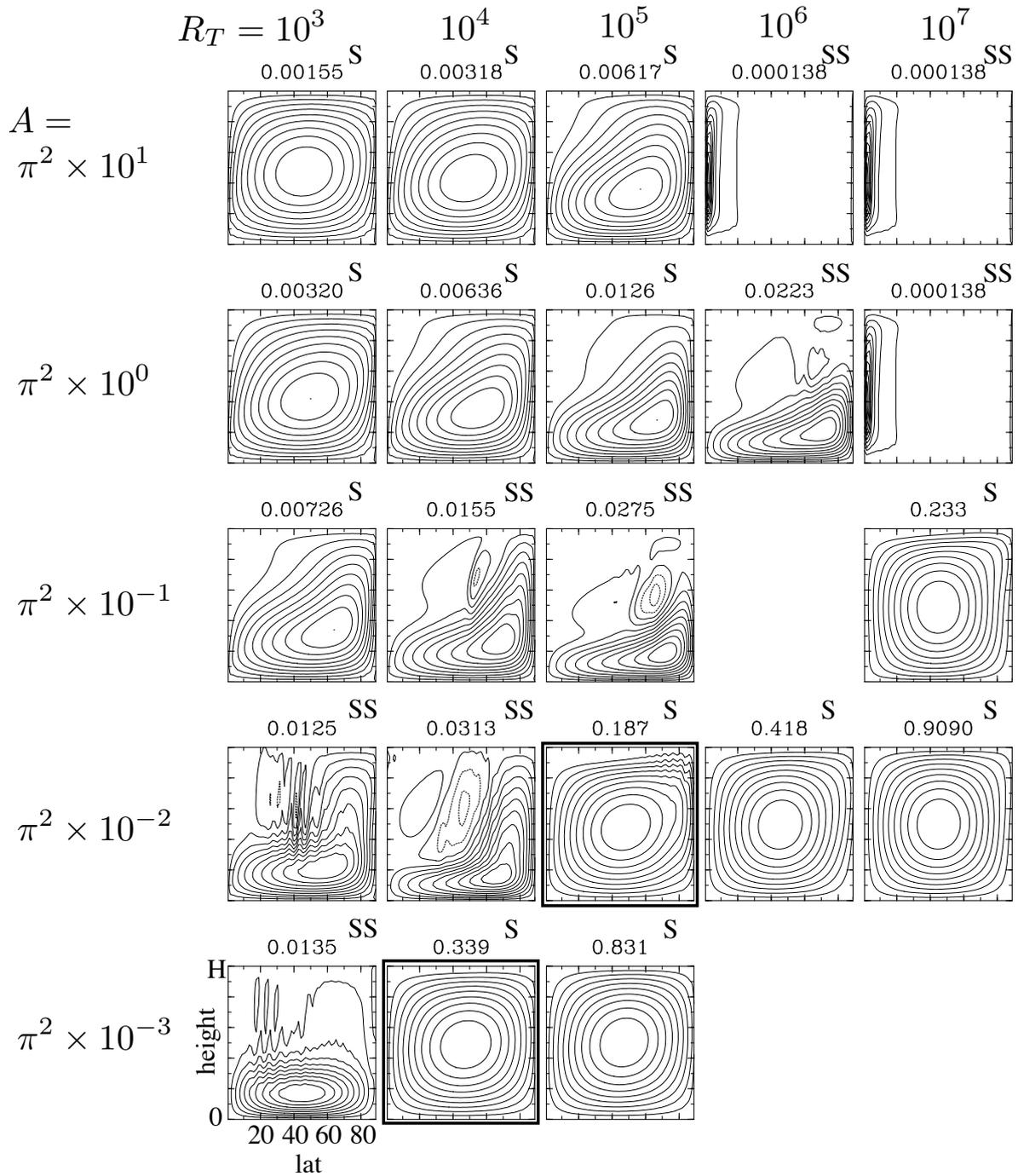


図 B.15

$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$



⊠ B.16

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

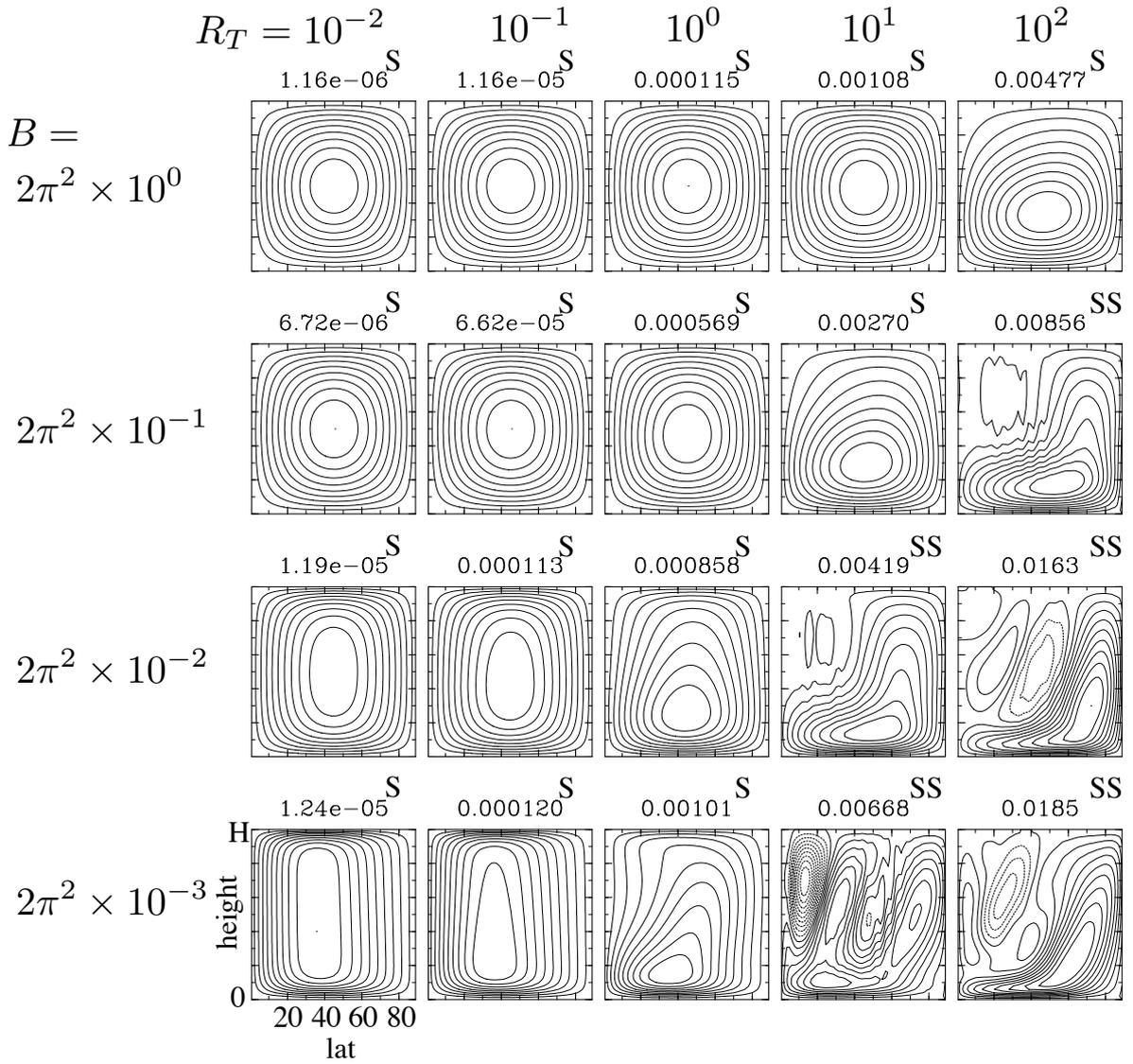
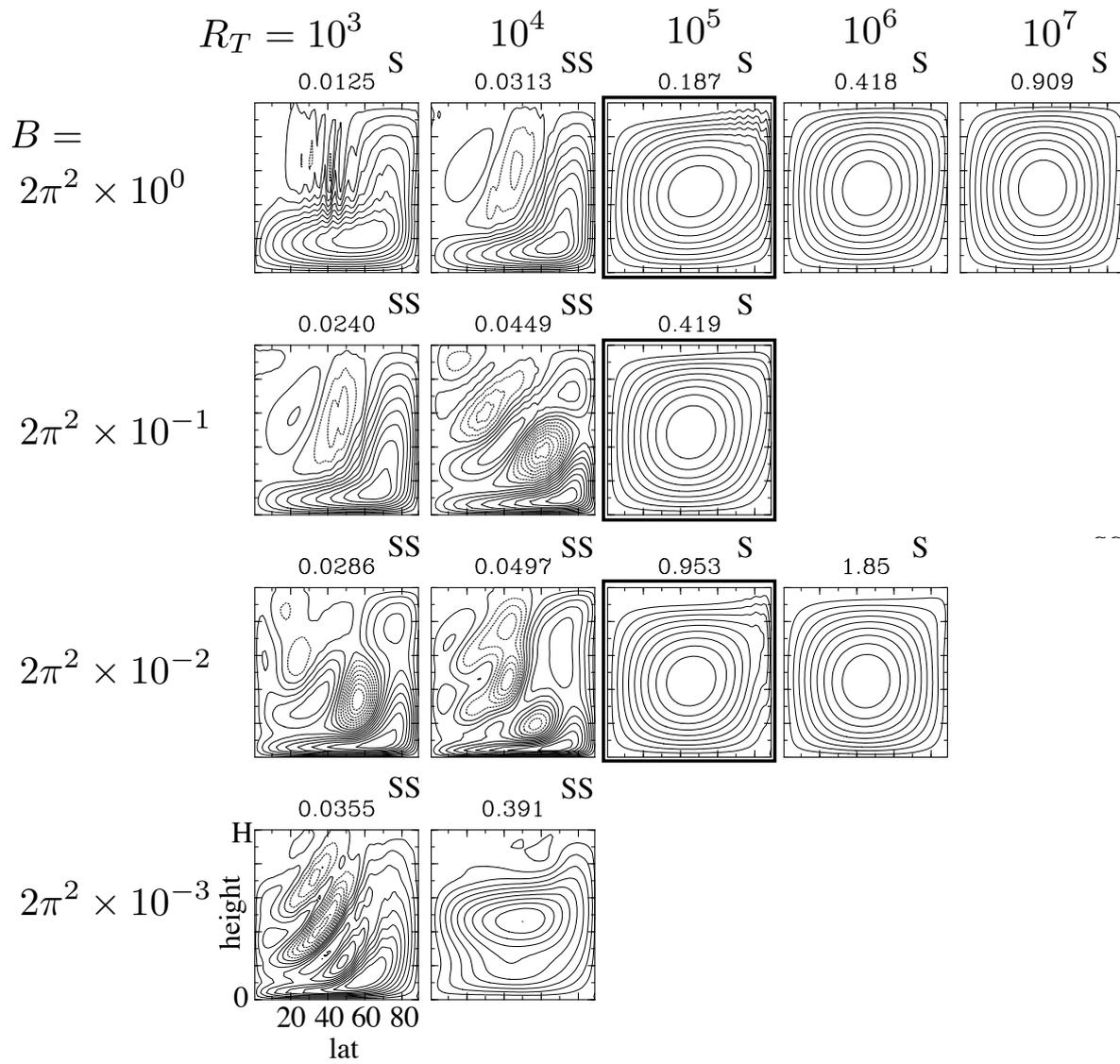


図 B.17

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$


 B.18

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

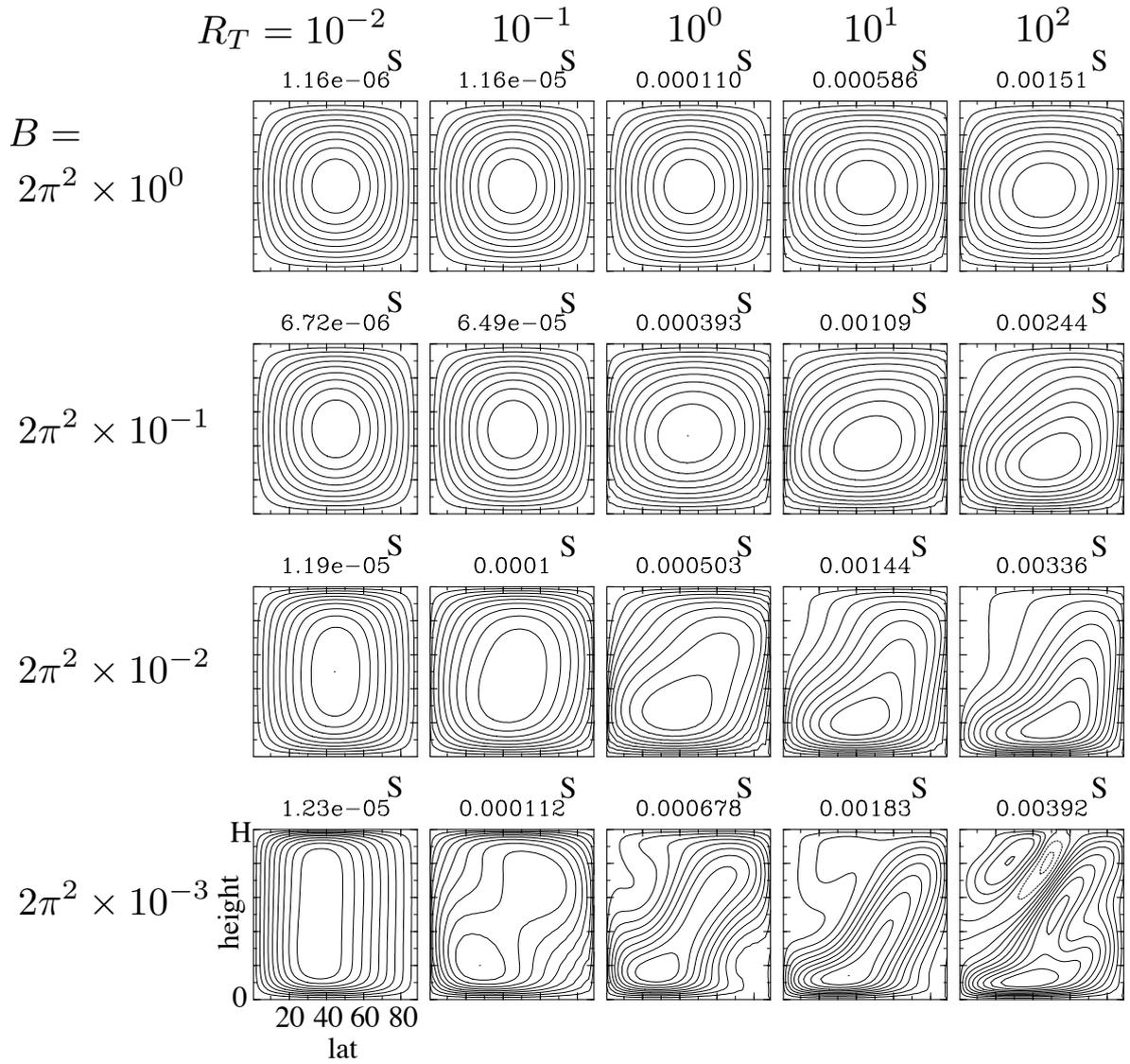
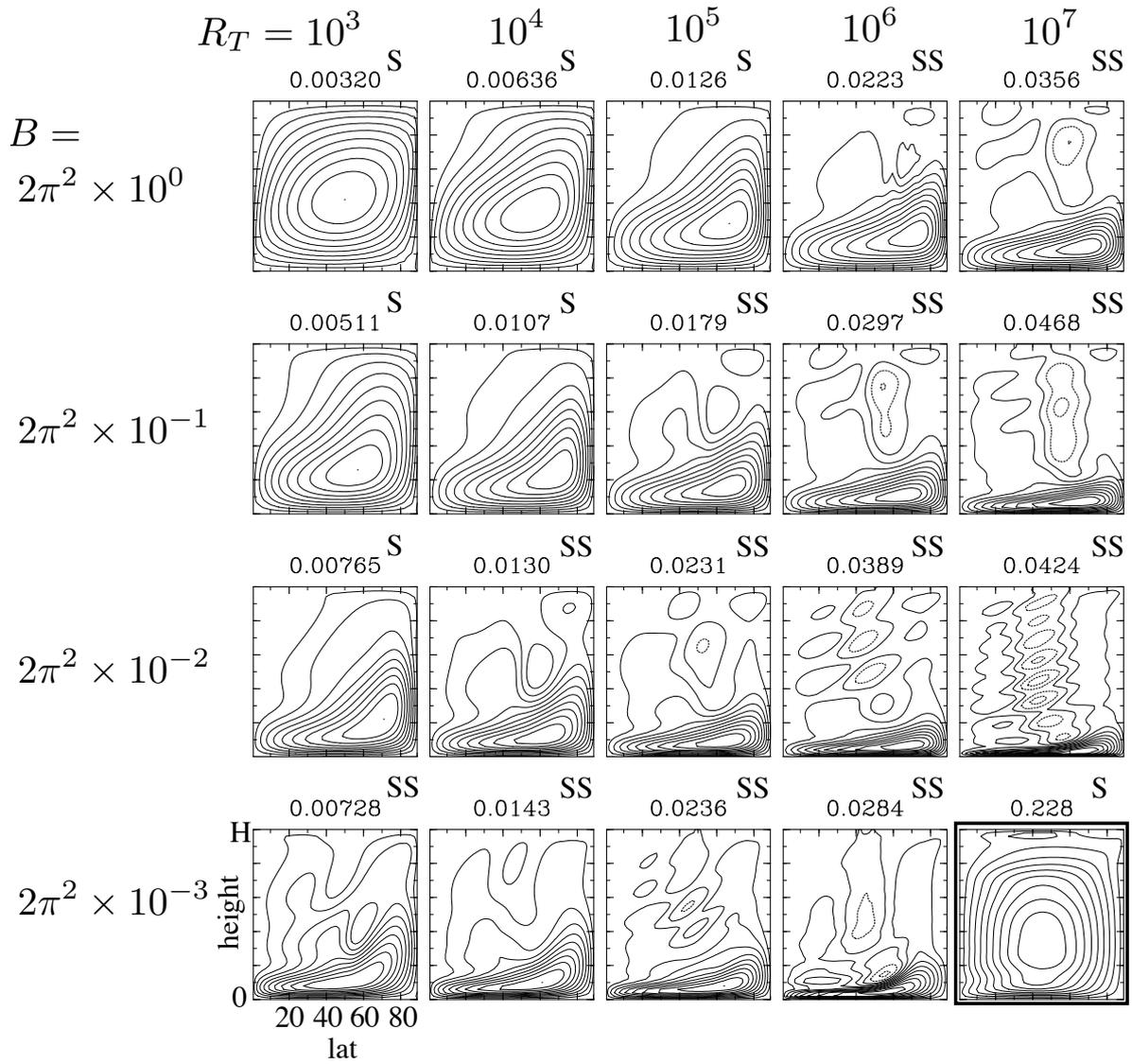
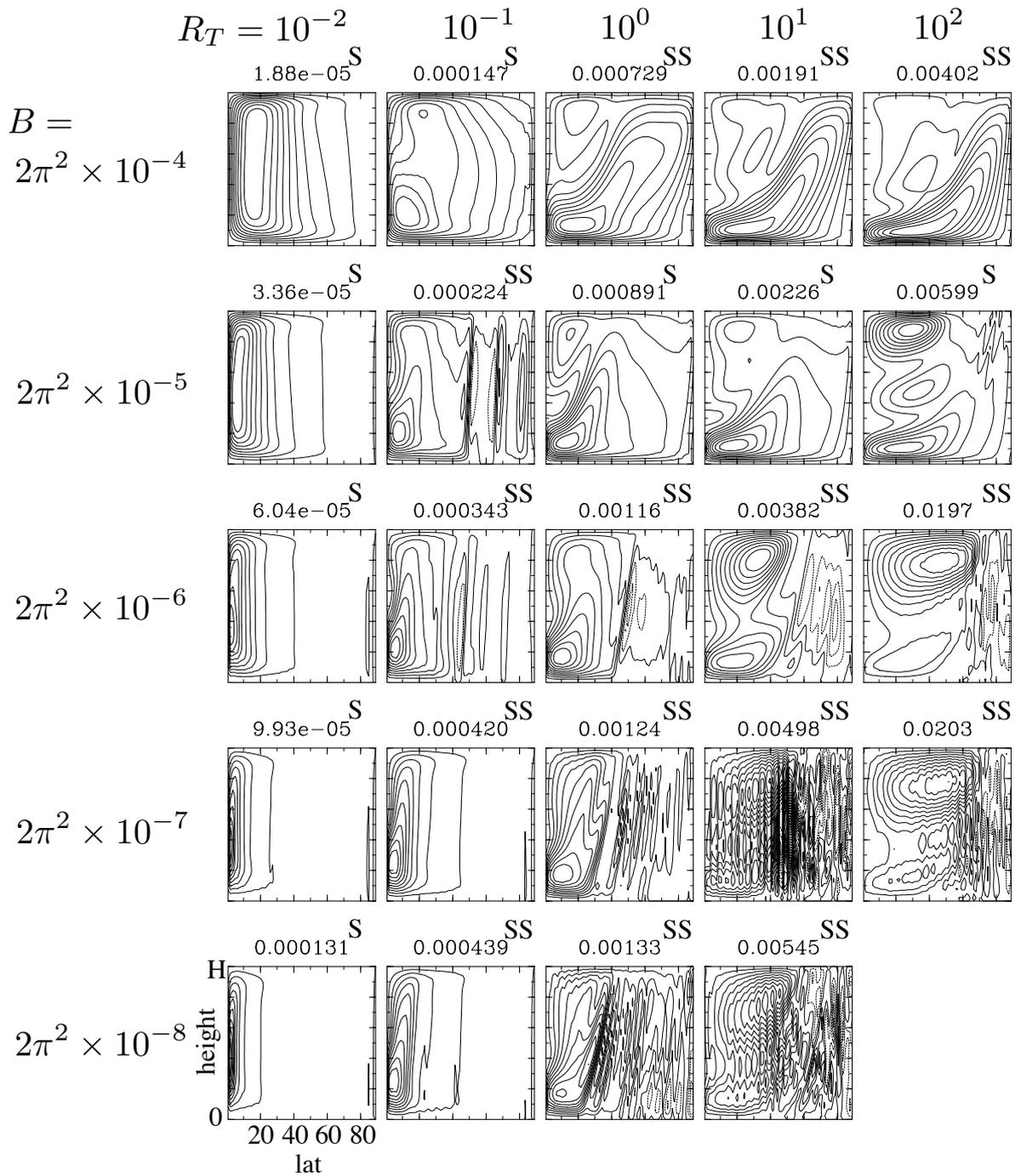


図 B.19

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$


 B.20

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$



☒ B.21

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = 10^3$$

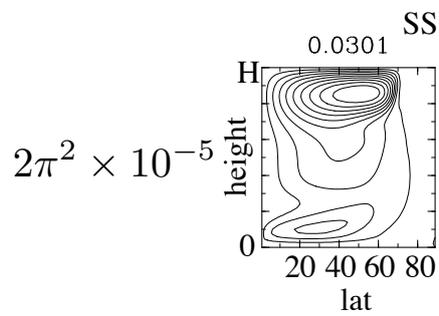
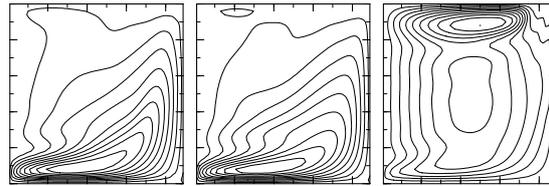
$$10^4$$

$$10^5$$

$$10^6$$

$$10^7$$

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-4}$$



$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = 10^3$$

$$10^4$$

$$10^5$$

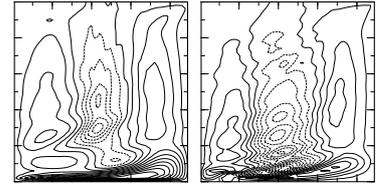
$$10^6$$

$$10^7$$

0.0429 SS

0.0495 SS

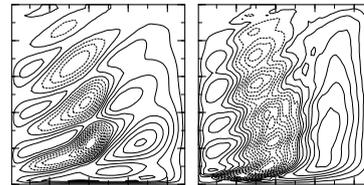
$$A = \pi^2 \times 10^{-1}$$



$$\pi^2 \times 10^{-2}$$

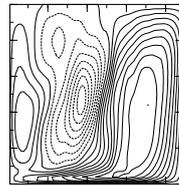
0.0998 SS

0.0678 SS



$$\pi^2 \times 10^{-3}$$

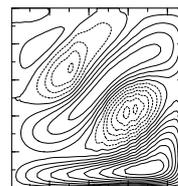
0.119 SS



$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

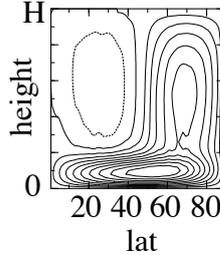
$$A = \pi^2 \times 10^{-2}$$

0.0547 SS



$$\pi^2 \times 10^{-3}$$

0.0344 SS



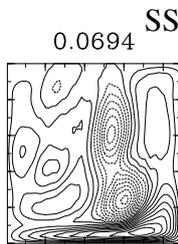
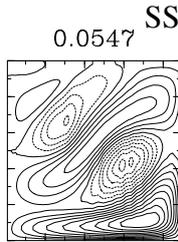
☒ B.23

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

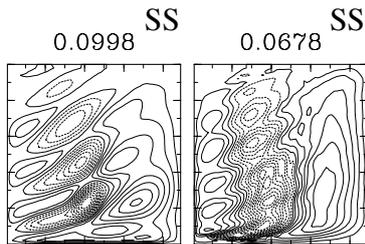
$$R_T = 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7$$

$$B =$$

$$2\pi^2 \times 10^0$$



$$2\pi^2 \times 10^{-1}$$

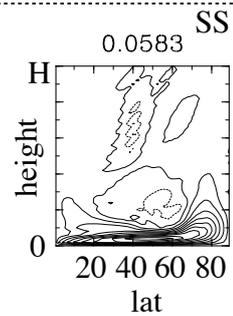


$$2\pi^2 \times 10^{-2}$$

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

$$B =$$

$$2\pi^2 \times 10^{-3}$$



⊠ B.24

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = \begin{matrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 10^0 & 10^1 & 10^2 \\ \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} \end{matrix}$$

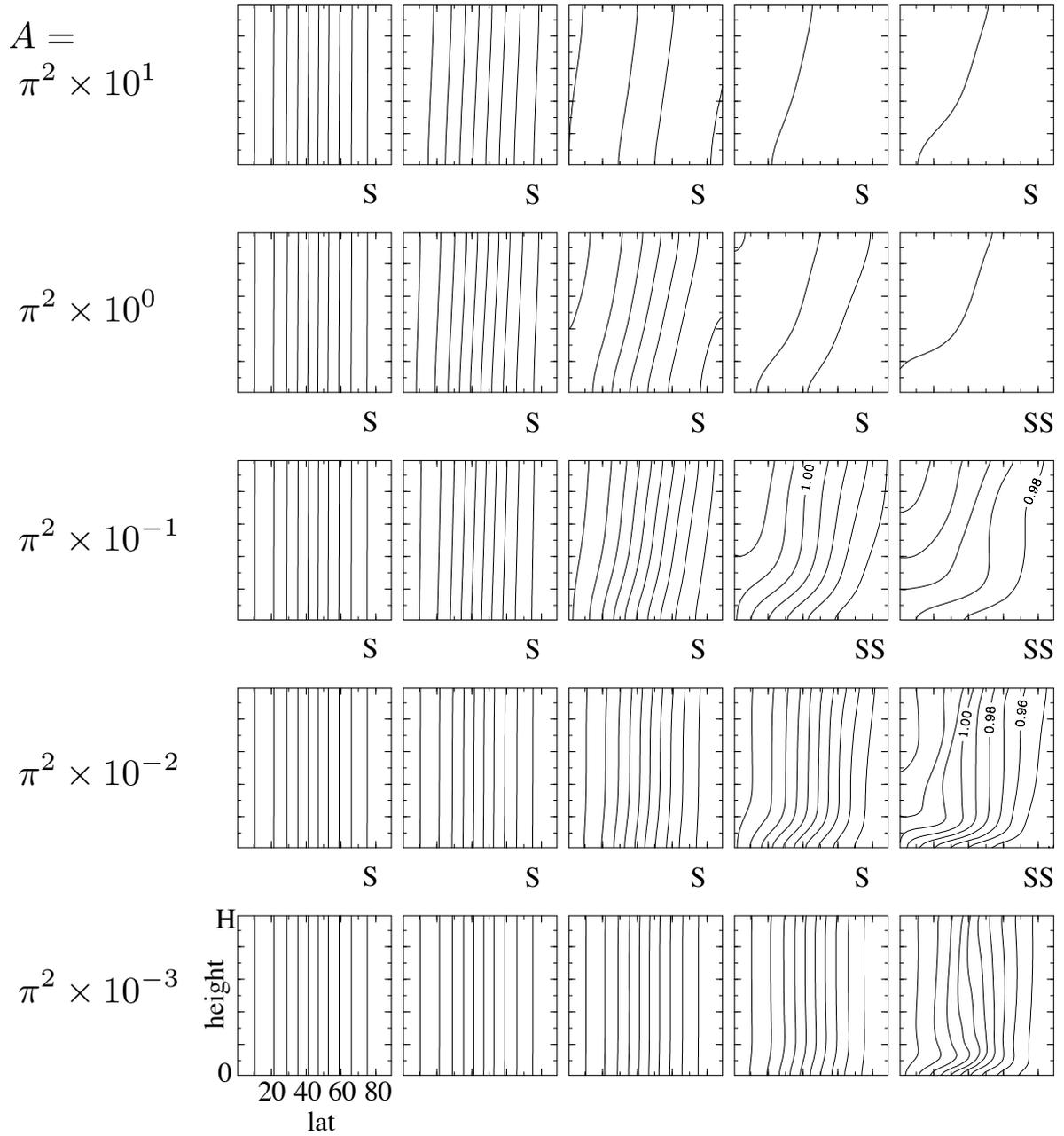


図 B.25

$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = \begin{matrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 10^0 & 10^1 & 10^2 \\ \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} & \text{S} \end{matrix}$$

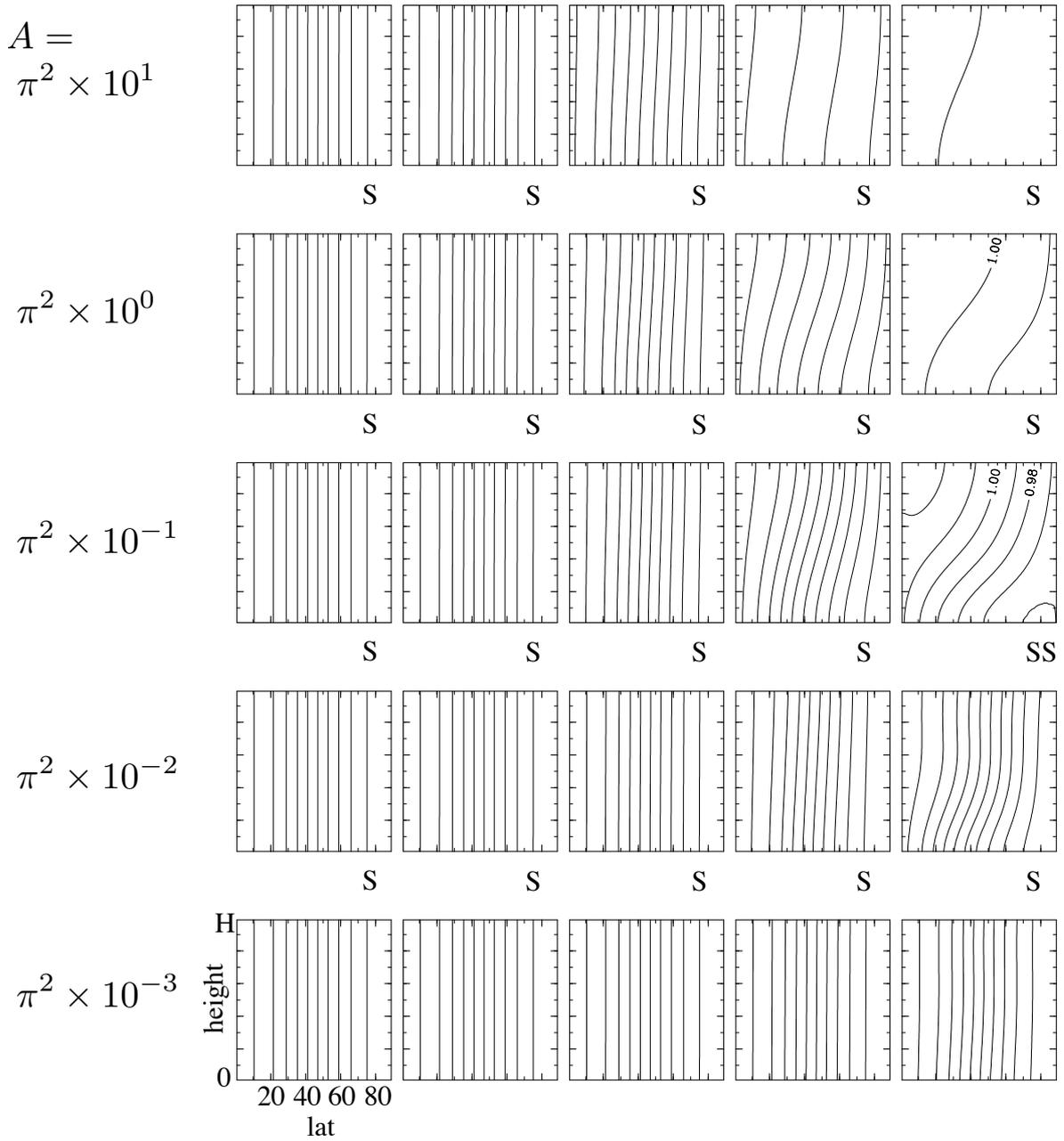
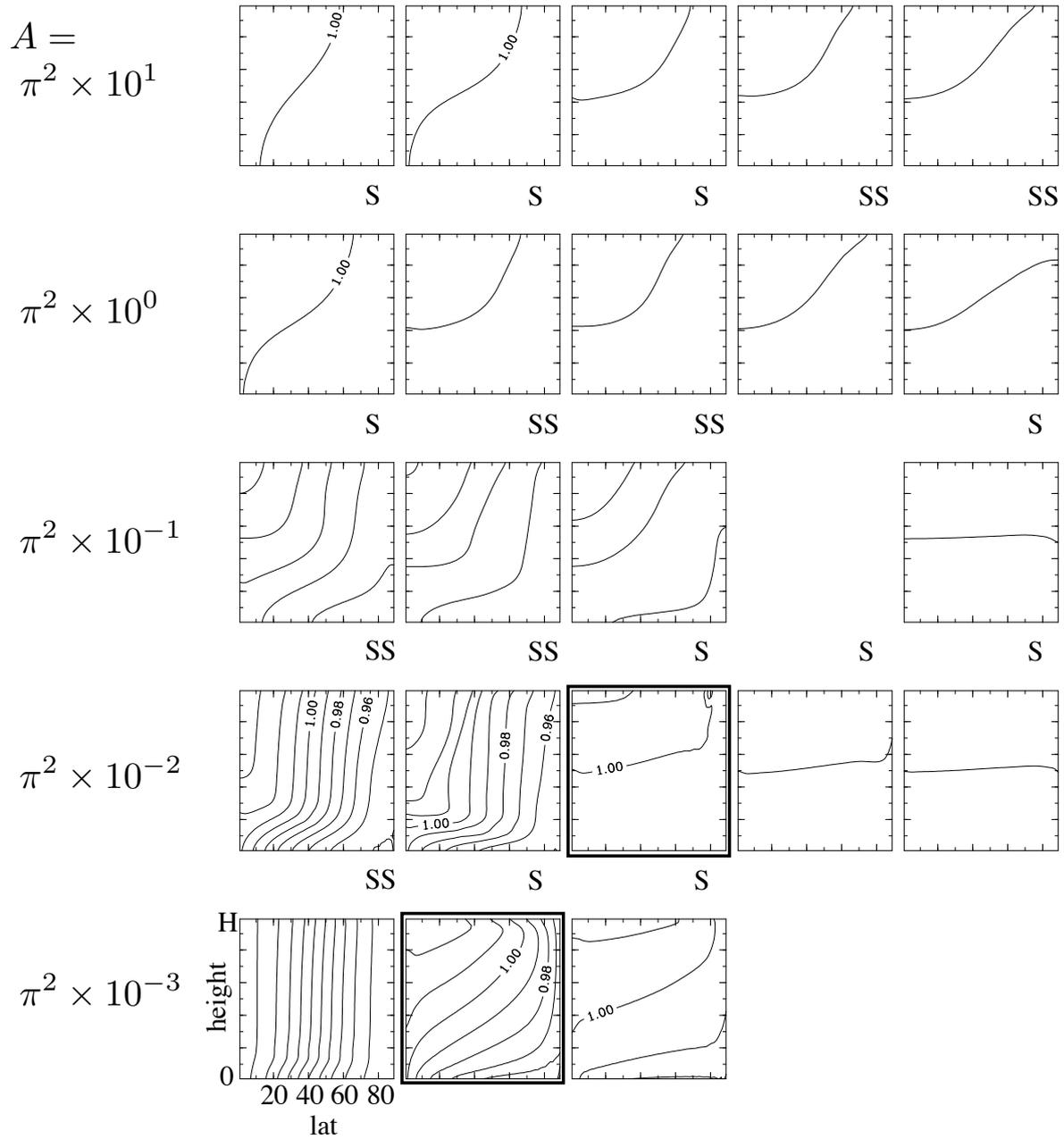


図 B.27

$$B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

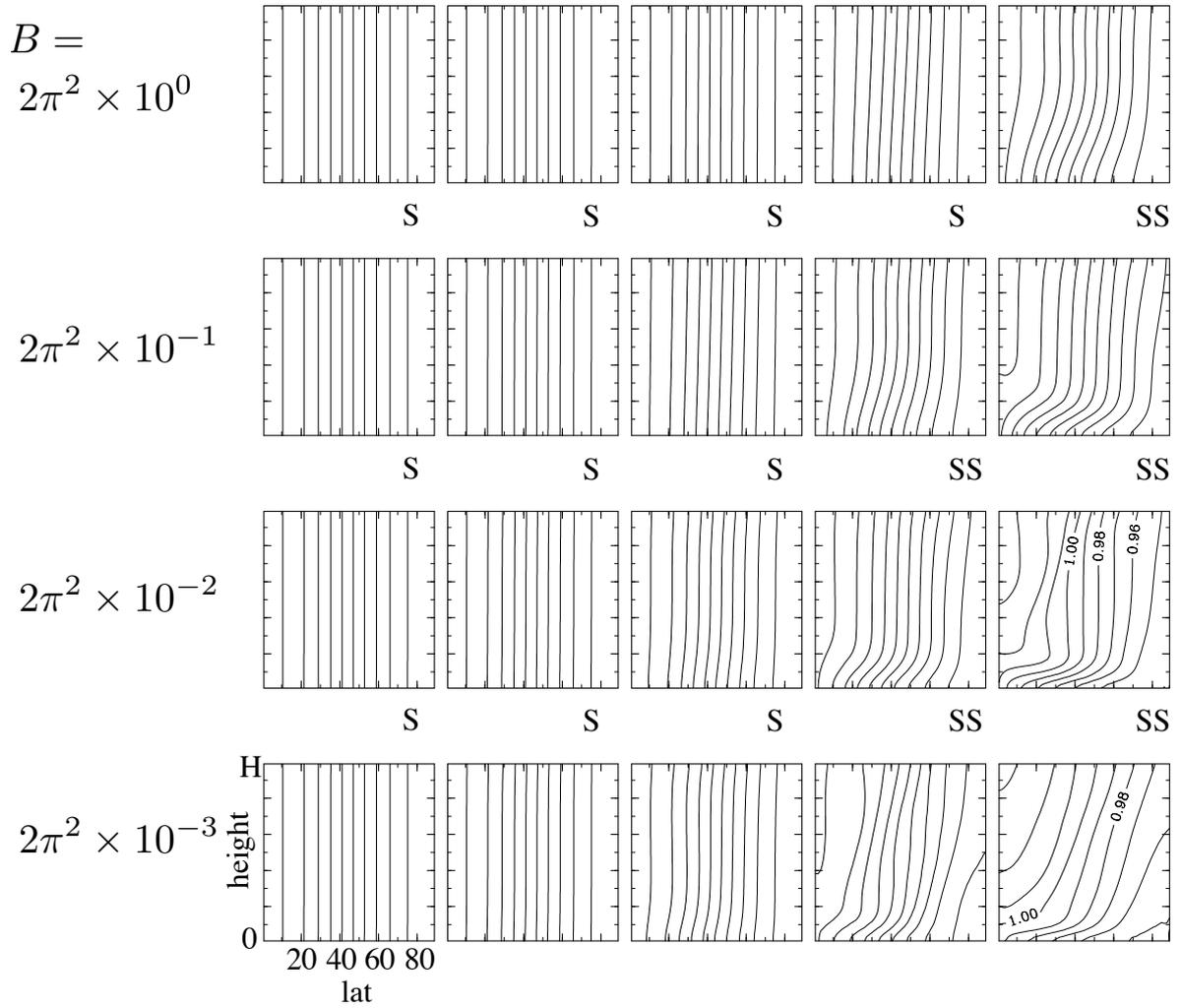
$$R_T = 10^3 \text{ s} \quad 10^4 \text{ s} \quad 10^5 \text{ s} \quad 10^6 \text{ SS} \quad 10^7 \text{ SS}$$



☒ B.28

$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = \begin{matrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 10^0 & 10^1 & 10^2 \\ \text{s} & \text{s} & \text{s} & \text{s} & \text{s} \end{matrix}$$

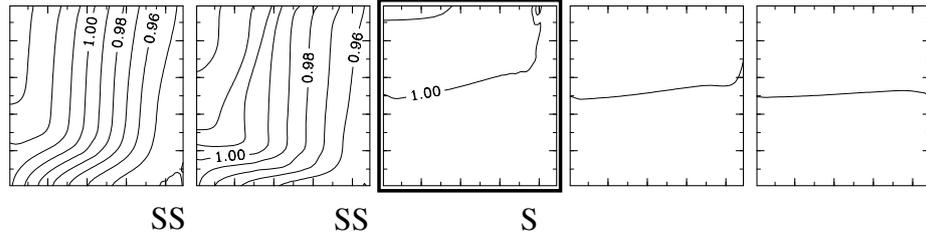


☒ B.29

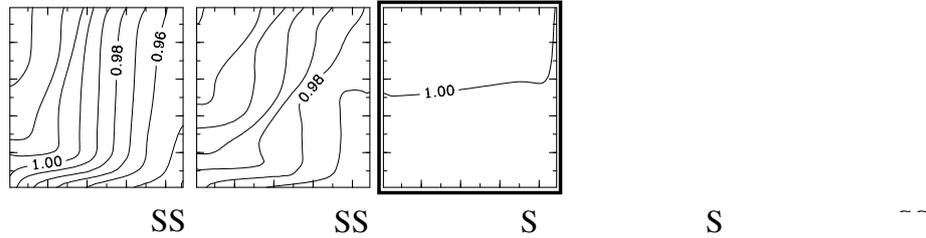
$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = 10^3 \text{ s} \quad 10^4 \text{ SS} \quad 10^5 \text{ S} \quad 10^6 \text{ S} \quad 10^7 \text{ S}$$

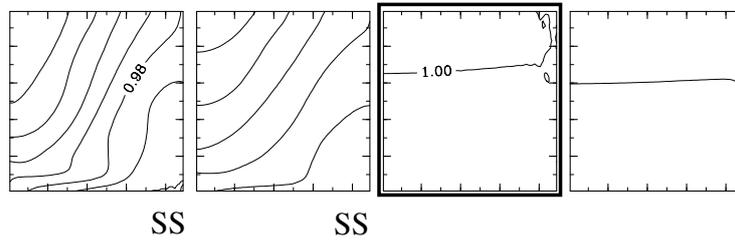
$$B = 2\pi^2 \times 10^0$$



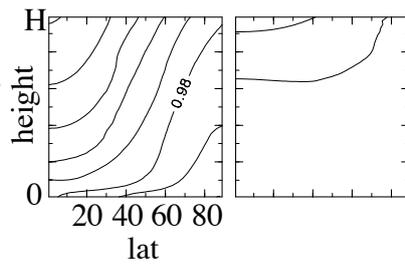
$$2\pi^2 \times 10^{-1}$$



$$2\pi^2 \times 10^{-2}$$

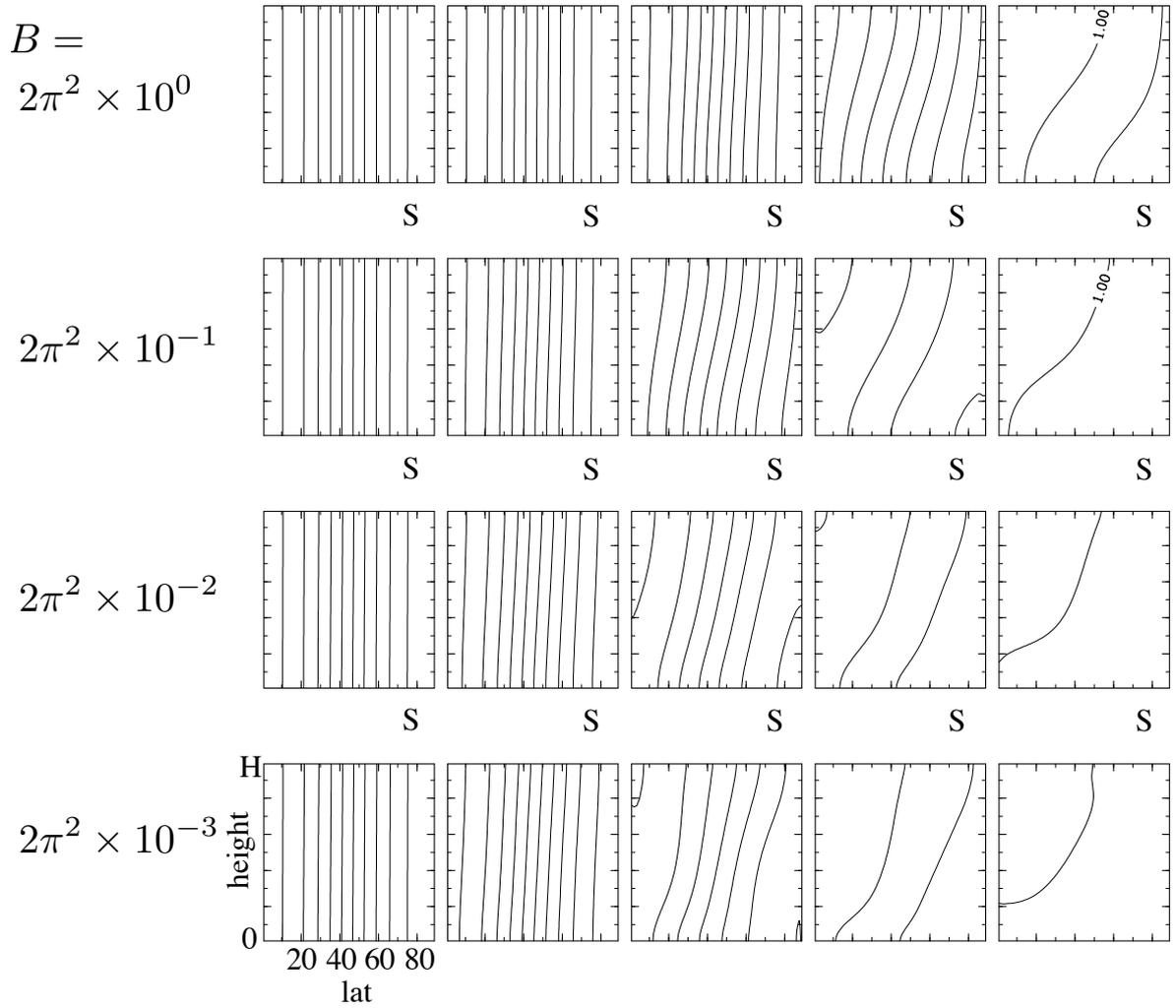


$$2\pi^2 \times 10^{-3}$$



$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

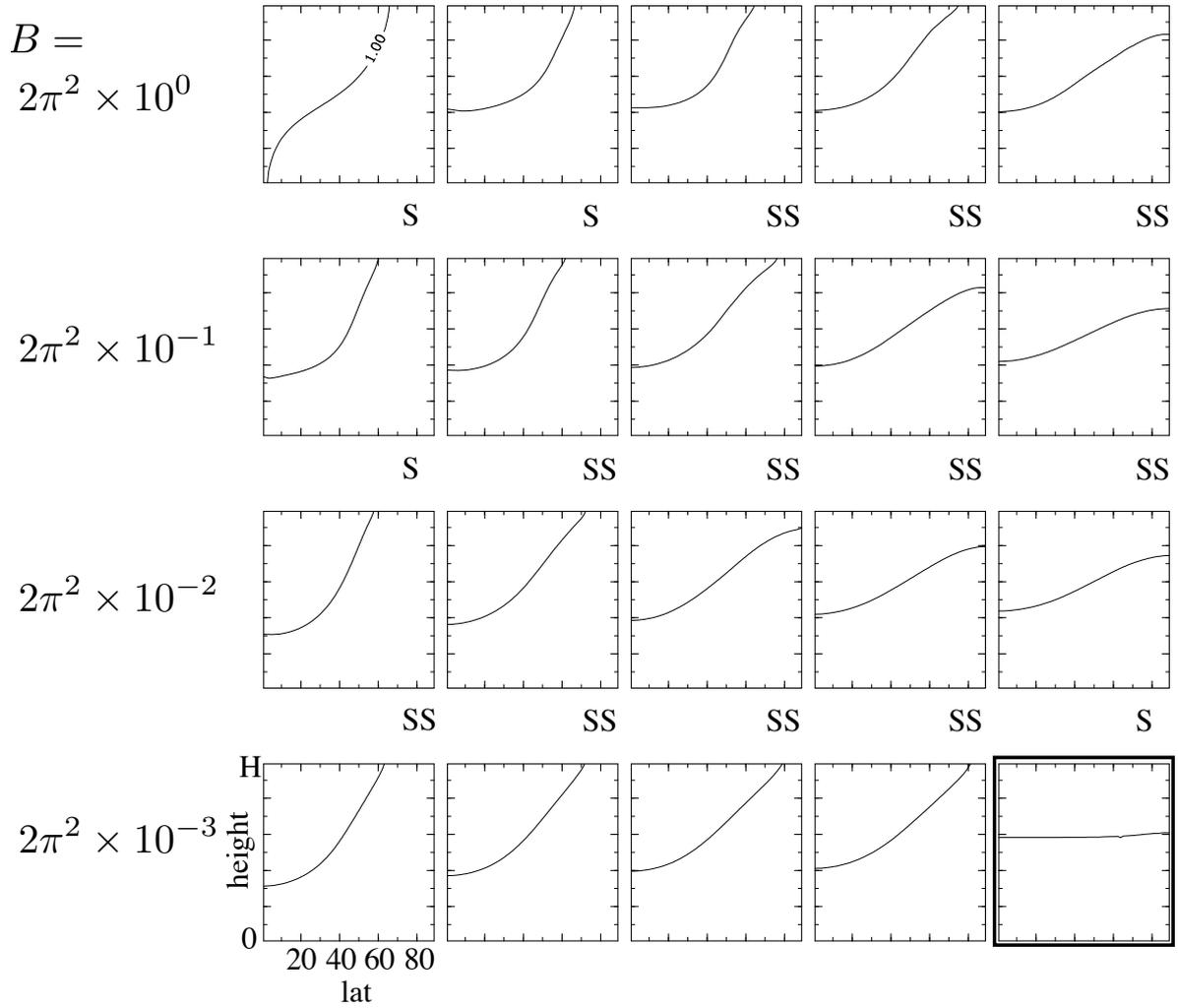
$$R_T = \begin{matrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 10^0 & 10^1 & 10^2 \\ \text{s} & \text{s} & \text{s} & \text{s} & \text{s} \end{matrix}$$



☒ B.31

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

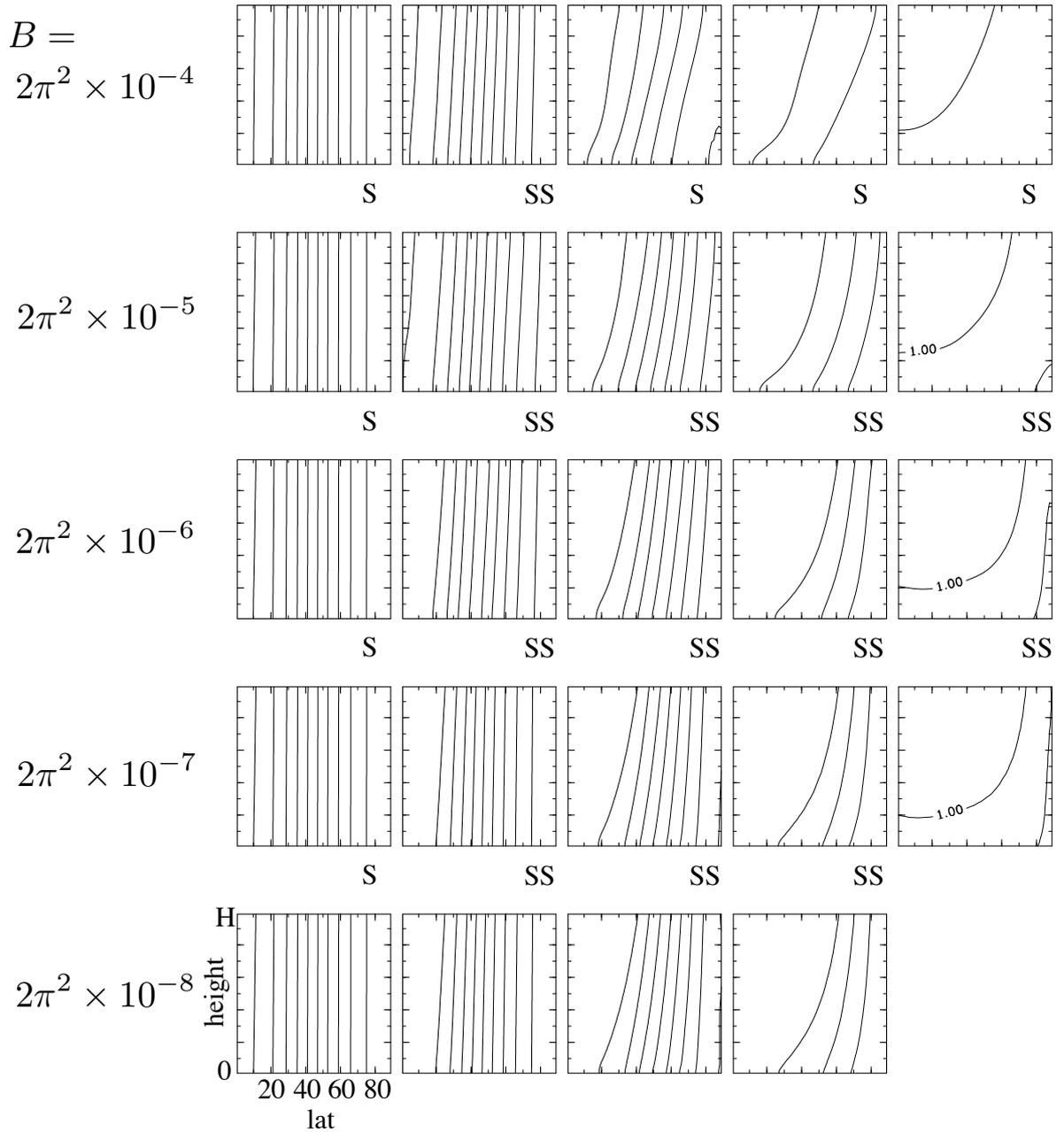
$$R_T = 10^3 \text{ s} \quad 10^4 \text{ s} \quad 10^5 \text{ s} \quad 10^6 \text{ SS} \quad 10^7 \text{ SS}$$



☒ B.32

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

$$R_T = \begin{matrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 10^0 & 10^1 & 10^2 \\ \text{S} & \text{S} & \text{SS} & \text{SS} & \text{SS} \end{matrix}$$



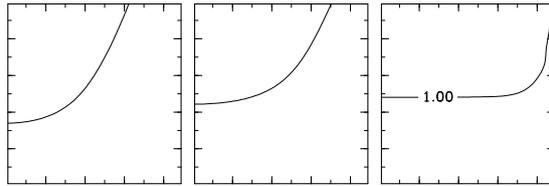
☒ B.33

$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

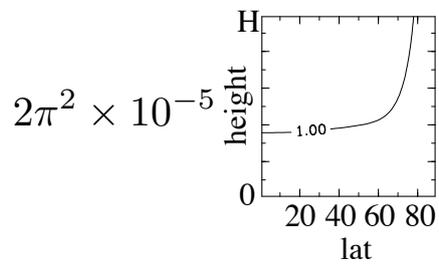
$$R_T = 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7$$

SS SS SS

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-4}$$



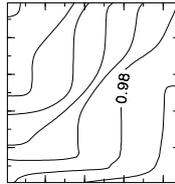
SS



$$A = \pi^2 \times 10^{-2}, E_V = 10^{-3}$$

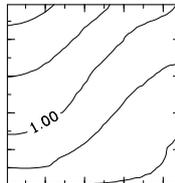
$$R_T = 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7$$

$$B = 2\pi^2 \times 10^0$$



SS

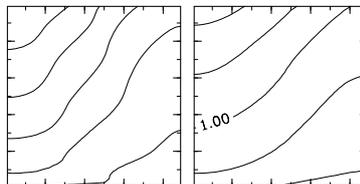
$$2\pi^2 \times 10^{-1}$$



SS

SS

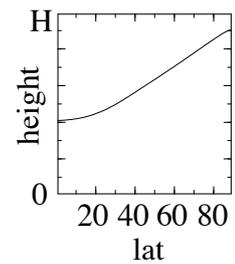
$$2\pi^2 \times 10^{-2}$$



$$A = \pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-3}$$

SS

$$B = 2\pi^2 \times 10^{-3}$$



$$A = \pi^2 \times 10^{-1}, B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-2}$$

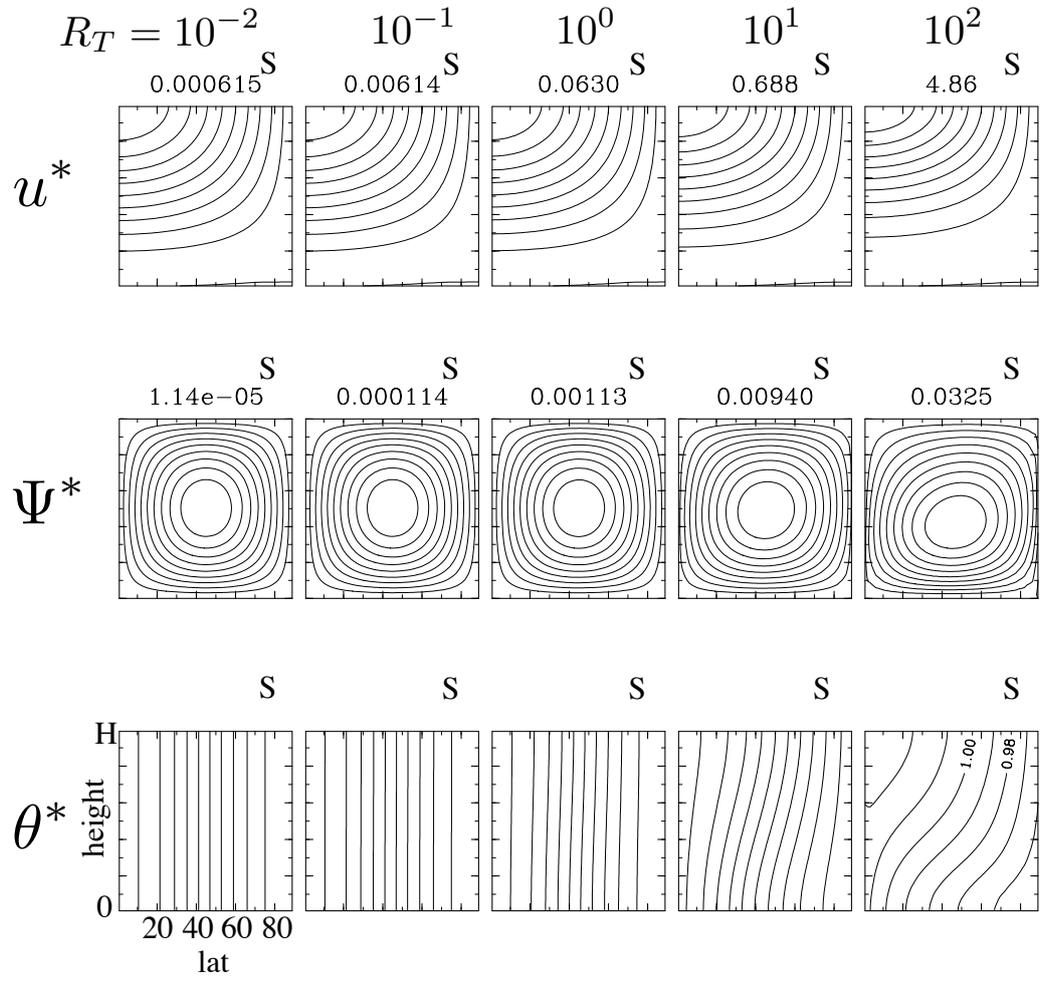
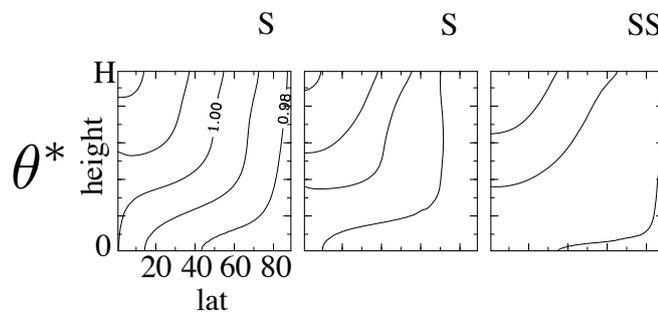
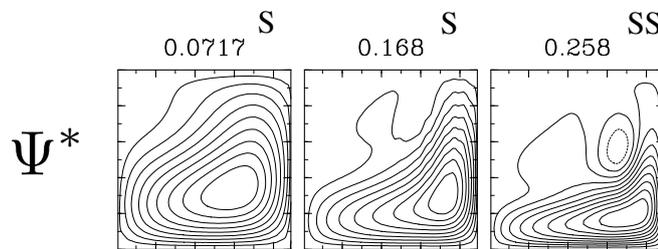
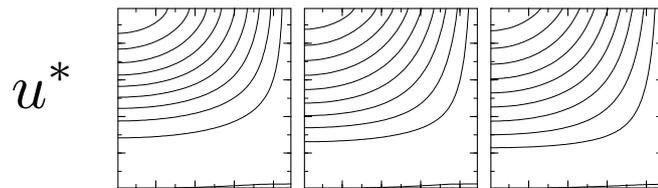


図 B.37

$$A = \pi^2 \times 10^{-1}, B = 2\pi^2 \times 10^0, E_V = 10^{-2}$$

$$R_T = \begin{matrix} 10^3 & 10^4 & 10^5 \\ 18.2 \text{ S} & 58.7 \text{ S} & 157 \text{ SS} \end{matrix}$$



☒ B.38

参考文献

- Anderson, E., Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen, 1987: *LAPACK Users' Guide*, Software, Environments and Tools, Society for Industrial Mathematics, 3rd edition.
- Becker, E., 2001: Symmetric stress tensor formulation of horizontal momentum diffusion in global models of atmospheric circulation, *J. Atmos. Sci.*, **58** (3), 269–282.
- Bird, M. K., M. Allison, S. W. Asmar, D. H. Atkinson, I. M. Avruch, R. Dutta-Roy, Y. Dzierma, P. Edenhofer, W. M. Folkner, L. I. Gurvits, D. V. Johnston, D. Plettemeier, S. V. Pogrebenko, R. A. Preston, and G. L. Tyler, 2005: The vertical profile of winds on Titan, *Nature*, **438** (7069), 800–802.
- Boyer, C. and H. Camichel, 1961: Observations photographiques de la planète Vénus, *Annales d'Astrophysique*, **24**, 531–535.
- Boyer, C. and P. Guérin, 1969: Etude de la rotation rétrograde, en 4 jours, de la couche extérieure nuageuse de Vénus, *Icarus*, **11** (3), 338–355.
- Del Genio, A. D. and W. Zhou, 1996: Simulations of superrotation on slowly rotating planets: Sensitivity to rotation and initial condition, *Icarus*, **120** (2), 332–343.
- Fels, S. B. and R. Lindzen, 1974: The interaction of thermally excited gravity waves with mean flows, *Geophys. Fluid Dyn.*, **6** (2), 149–191.
- Flasar, F. M., M. D. Allison, and J. I. Lunine, 1997: Titan Zonal Wind Model, in Wilson, A. ed. *Huygens: Science, Payload and Mission (ESA conference)*, 287–298, ESA Publications.
- Gierasch, P. J., 1975: Meridional circulation and maintenance of the Venus atmospheric rotation, *J. Atmos. Sci.*, **32** (6), 1038–1044.
- Gierasch, P. J., R. M. Goody, R. E. Young, D. Crisp, C. Edwards, R. Kahn, D. McCleese, D. Rider, A. Del Genio, R. Greeley, A. Hou, C. B. Leovy, and M. Newman, 1997: The general circulation of the Venus atmosphere: An assessment, in Bougher,

- S. W., D. M. Hunten, and R. J. Phillips eds. *Venus II: Geology, Geophysics, Atmosphere, and Solar Wind Environment (University of Arizona Space Science Series)*, University of Arizona Press, pp. 459–500.
- Gierasch, P. J. and Y. L. Young, 2003: Planetary Atmospheres/Venus, in *Encyclopedia of Atmospheric Sciences Volume Four N-Rad*, Academic Press; Elsevier Science.
- Held, I. M., 2005: The gap between simulation and understanding in climate modeling, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **86** (11), 1609–1614.
- Held, I. M. and A. Y. Hou, 1980: Non-linear axially-symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **37** (3), 515–533.
- Hide, R., 1969: Dynamics of atmospheres of major planets with an appendix on viscous boundary layer at rigid bounding surface of an electrically-conducting rotating fluid in presence of a magnetic field, *J. Atmos. Sci.*, **26**, 841–853.
- Hollingsworth, J. L., R. E. Young, G. Schubert, C. Covey, and A. S. Grossman, 2007: A simple-physics global circulation model for Venus: Sensitivity assessments of atmospheric superrotation, *Geophys. Res. Lett.*, **34** (5), L05202.
- Hoskins, B. J., 1983: Dynamical processes in the atmosphere and the use of models, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **109** (459), 1–21.
- Hou, A. Y., 1984: Axisymmetric circulations forced by heat and momentum sources—a simple-model applicable to the Venus atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **41** (24), 3437–3455.
- Hou, A. Y. and B. F. Farrell, 1987: Superrotation induced by critical-level absorption of gravity-waves on venus—an assessment, *J. Atmos. Sci.*, **44** (7), 1049–1061.
- Iga, S. and Y. Matsuda, 2005: Shear instability in a shallow water model with implications for the Venus atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **62** (7), 2514–2527.
- Kido, A. and Y. Wakata, 2008: Multiple equilibrium states appearing in a Venus-like atmospheric general circulation model, *J. Meteor. Soc. Japan*, **86** (6), 969–979.
- Kido, A. and Y. Wakata, 2009: Multiple equilibrium states appearing in a Venus-like atmospheric general circulation model with three-dimensional solar heating, *SOLA*, **5**, 85–88.
- Lebonnois, S., F. Hourdin, V. Eymet, A. Cresspin, R. Fournier, and F. Forget, 2010: Superrotation of Venus’ atmosphere analyzed with a full general circulation model, *J. Geophys. Res.*, **115**, E06006.
- Lee, C., S. R. Lewis, and P. L. Read, 2007: Superrotation in a Venus general circulation model, *J. Geophys. Res.*, **112**, E04S11.
- Leovy, C. B., 1987: Zonal winds near Venus’ cloud top level: an analytic model of

- the equatorial wind-speed, *Icarus*, **69** (2), 193–201.
- Luz, D. and F. Hourdin, 2003: Latitudinal transport by barotropic waves in Titan's stratosphere. I. General properties from a horizontal shallow-water model, *Icarus*, **166** (2), 328–342.
- Matsuda, Y., 1980: Dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **58** (6), 443–470.
- Matsuda, Y., 1982: A further study of dynamics of the four-day circulation in the Venus atmosphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **60** (1), 245–254.
- Nakamura, M., T. Imamura, M. Ueno, N. Iwagami, T. Satoh, S. Watanabe, M. Taguchi, Y. Takahashi, M. Suzuki, and T. Abe, 2007: Planet-C: Venus Climate Orbiter mission of Japan, *Planet Space Sci.*, **55** (12), 1831–1842.
- Nakamura, M., T. Imamura, N. Ishii, T. Abe, T. Satoh, M. Suzuki, M. Ueno, A. Yamazaki, N. Iwagami, S. Watanabe, M. Taguchi, T. Fukuhara, Y. Takahashi, M. Yamada, N. hoshino, S. Ohtsuki, K. Uemizu, G. L. Hashimoto, M. Takagi, Y. Matsuda, K. Ogohara, N. Sato, Y. Kasaba, T. Kouyama, N. Hirata, Y. Yamamoto, N. Okada, T. Horinouchi, M. Yamamoto, and Y. Hayashi, 2011: Overview of Venus orbiter, Akatsuki, *Earth Planets Space*, **63** (5), 443–457.
- Rossow, W. B. and G. P. Williams, 1979: Large-scale motion in the Venus stratosphere, *J. Atmos. Sci.*, **36** (3), 377–389.
- Sánchez-Lavega, A., 2010: *An Introduction to Planetary Atmospheres*, Taylor & Francis.
- Satoh, M., 2004: *Atmospheric Circulation Dynamics and Circulation Models*, Springer Praxis Books in Environmental Sciences, Springer, 1st edition.
- Schubert, G., 1983: General circulation and the dynamical state of the Venus atmosphere, in Hinten, D. ed. *Venus*, Tucson, University of Arizona Press, 681–765.
- Schubert, G. and J. A. Whitehead, 1969: Moving flame experiment with liquid mercury: Possible implications for Venus atmosphere, *Science*, **163** (3862), 71–72.
- Seiff, A., 1983: Thermal structure of the Venus atmosphere, in Hinten, D. ed. *Venus*, Tucson, University of Arizona Press, 215–279.
- Sicardy, B., A. Brahic, C. Ferrari, D. Gautier, J. Lecacheux, E. Lellouch, F. Roques, J. E. Arlot, F. Colas, W. Thuillot, F. Sevre, J. L. Vidal, C. Blanco, S. Cristaldi, C. Buil, A. Klotz, and E. Thouvenot, 1990: Probing Titan's atmosphere by stellar occultation, *Nature*, **343** (6256), 350–353.
- Smrekar, S. E. and E. R. Stofan, 2007: Venus: Surface and Interior, in McFadden, L.-A. A., P. R. Weissman, and T. V. Johnson eds. *Encyclopedia of the Solar System*,

- Elsevier LTD. 149–168.
- Sugata, S. and S. Yoden, 1992: Steady axi-symmetrical flow due to differential heating in a rotating annulus and its dependence on experimental parameters, *J. Meteor. Soc. Japan*, **70** (5), 1005–1017.
- Takagi, M. and Y. Matsuda, 1999: Interpretation of Thompson’s mechanism for Venus’ atmospheric super-rotation and its extension to the spherical geometry, *J. Meteor. Soc. Japan*, **77** (5), 971–983.
- Takagi, M. and Y. Matsuda, 2000: Stability of convection between the day and night sides on the rotating sphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **78** (2), 181–186.
- Takagi, M. and Y. Matsuda, 2005: Sensitivity of thermal tides in the Venus atmosphere to basic zonal flow and Newtonian cooling, *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L02203.
- Takagi, M. and Y. Matsuda, 2007: Effects of thermal tides on the Venus atmospheric superrotation, *J. Geophys. Res.*, **112** (D9), D007901.
- Taylor, F. W., 2010: *Planetary Atmospheres*, Oxford University Press, USA.
- Thompson, R., 1970: Venus’s general circulation is a merry-go-round, *J. Atmos. Sci.*, **27** (8), 1107–1116.
- Williams, G. P., 2003: Jet sets, *J. Meteor. Soc. Japan*, **81** (3), 439–476.
- Yamamoto, H., K. Ishioka, and S. Yoden, 2009: Axisymmetric steady solutions in an idealized model of atmospheric general circulations: Hadley circulation and super-rotation, *Theor. Appl. Mech. Jpn.*, **57**, 147–158.
- Yamamoto, M. and M. Takahashi, 2003: The fully developed superrotation simulated by a general circulation model of a Venus-like atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **60** (3), 561–574.
- Young, R. E., R. L. Walterscheid, G. Schubert, L. Pfister, H. Houben, and D. L. Bindschadler, 1994: Characteristics of finite-amplitude stationary gravity-waves in the atmosphere of Venus, *J. Atmos. Sci.*, **51** (13), 1857–1875.
- Young, R. E. and J. B. Pollack, 1977: A three-dimensional model of dynamical processes in the Venus atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **34** (9), 1315–1351.
- Zhu, X., 2006: Maintenance of equatorial superrotation in the atmospheres of Venus and Titan, *Planet Space Sci.*, **54** (8), 761–773.
- 笠原皓司, 1982: 『微分方程式の基礎』, 数理科学ライブラリー, 朝倉書店.
- 国立天文台 (編) 2010: 『理科年表』, 丸善.
- 山本博基, 2009: 「自転軸対称な大気大循環に関する研究—ハドレー循環とスーパーローテーション」, 修士論文, 京都大学.
- 松田佳久, 2000: 『惑星気象学』, 東京大学出版会.

松田佳久, 2011: 『惑星気象学入門—金星に吹く風の謎』, 岩波科学ライブラリー, 岩波書店.

森川靖大・高橋芳幸・佐々木洋平・西澤誠也・乙部直人・石渡正樹・小高正嗣・竹広真一・堀之内武・林祥介・豊田英司・gtool 開発グループ, 2010: gtool5, 地球流体電脳倶楽部.

石岡圭一, 2004: 『スペクトル法による数値計算入門』, 東京大学出版会.

石岡圭一, 2011: ISPACK-0.96, 地球流体電脳倶楽部.

日本数学会 (編) 2007: 『岩波数学辞典』, 岩波書店, 第 4 版.