

## 傾斜対流実験のフラクタル次元解析\*

野 沢 徹<sup>\*1</sup>・酒 井 敏<sup>\*2</sup>・余 田 成 男<sup>\*3</sup>

## 要 旨

簡単な傾斜対流実験を行ない、得られた温度時系列データからフラクタル次元(相関次元:  $D$ )を求めた。定常波動流では $D \sim 1.2$ という結果を得た。また、実験の精度等に問題が残るものの、不規則波動流では $D \sim 3.5$ となり、このようなカオス流に対しては、フラクタル次元解析はスペクトル解析では得られない有益な情報をもたらす可能性があることがわかった。しかしながら、バシレーションのレジームでは準周期変動を示す次元2が得られなかった。その理由としては、バシレーションのパワーがランダムノイズのパワーとほぼ同程度であったこと、アトラクタ上の点の不均一分布に見合うだけの十分なデータ数が得られていなかったことなどが考えられる。

## 1. はじめに

ロレンツが熱対流の簡単な数値モデルで「カオス」を発見して以来(Lorenz, 1963), さまざまな分野においてカオスの存在が報告されてきた。流体系におけるカオスはレイリー・ベナール対流で実験的に検証され, 詳細に調べられている(Gollub and Benson, 1980; 佐野・沢田, 1982など)。また, これらのカオスは, 相空間内の解軌道が奇妙なアトラクタ(ストレンジ・アトラクタ)を構成することが知られている(佐野, 1987)。一方で, 数学の分野ではフラクタル図形(特徴的な長さを持たないような図形)の幾何学が発展し, その複雑さを定量的に表す指標として, フラクタル次元という非整数の次元が導入された(Mandelbrot, 1982; 高安, 1986など)。このフラクタル幾何学は非線形力学系におけるストレンジ・アトラクタにも応用され, さまざまなアトラクタのフラクタル次元が求められている。

フラクタル次元を求めるにはいくつかの方法があるが, Grassberger and Procaccia (1983) によって考案

された相関次元は, 1本の時系列データから比較的容易にフラクタル次元を求めることができるため, 数多くのカオス現象の相関次元が求められてきた。我々の分野においても, 各種気象データから相関次元が求められている(Fraedrich, 1986; Keppenne and Nicolis, 1989など)。しかし, Ruelle (1990) は, 相関次元の推定においては時系列データの長さによって求め得る次元に上限のあることを示した。彼はこの制約を満たしていない論文が数多くあることも指摘しており, 次元の推定に際しては細心の注意を払うよう警告している。

気象学の分野でよく知られた室内実験である傾斜対流実験でフラクタル次元を求めた例としては, Guckenheimer and Buzyna (1983) がある。しかし, 彼らはGrassberger and Procaccia (1983) と異なる仮定のもとで, 相関次元とは別のフラクタル次元を求めている。また, 時系列データの長さで求められたフラクタル次元はRuelle (1990) の条件を満たしていない。そこで, 本研究では傾斜対流実験を行ない, Ruelle (1990) の条件を満たすように時系列データを取り, フラクタル次元(相関次元)を求めた。傾斜対流実験の時系列を解析する方法としてはスペクトル解析がよく使われるが, 時系列データの処理方法として, スペクトル解析とフラクタル次元解析を比較し, 解析の容易さやノイズに対する特性等も検討した。

\* Fractal analysis for rotating annulus experiments with radial differential heating.

<sup>\*1</sup> Toru Nozawa, 京都大学理学部.

<sup>\*2</sup> Satoshi Sakai, 京都大学総合人間学部.

<sup>\*3</sup> Shigeo Yoden, 京都大学理学部.

——1992年10月22日受領——

——1993年6月22日受理——

2. 実験装置および条件

実験装置の概要を第1図に示す。二重円筒の実験槽の内半径は 3.50 cm, 外半径は 7.35 cm であり, 約 6 cm の深さまで作業流体を入れることが可能である。作業流体として水を使用した。内側の冷却部はアルミ

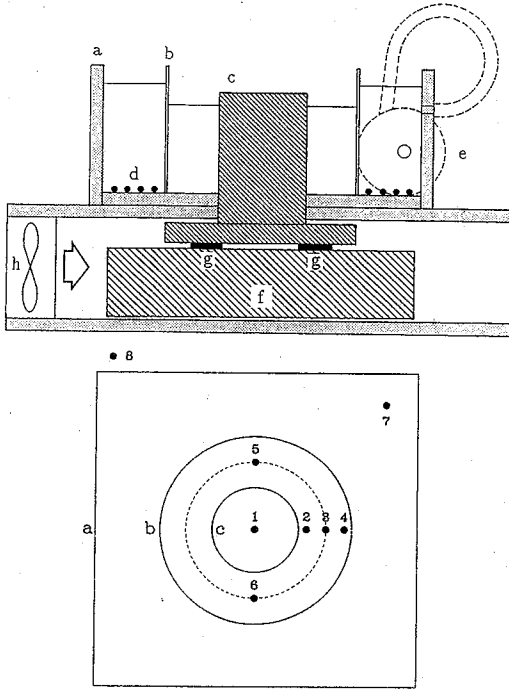
ニウムの丸棒で, これを直接サーモモジュールで冷却する。外側の円筒はパイレックスガラスで, その外側に温水を循環させて加熱する。

実験パラメーター(水深, 回転角速度, 温度差)は第1表の通りである。流体中の温度測定は5個のサーミスタを第1図に示すように配置して行い, そのほかに3つのサーミスタを用いて加熱部(温水), 冷却部(アルミニウムの丸棒の表面)の温度および気温を測定した。流体中のサーミスタ2~6は, そのすべてが水面下約2.5 cm の位置にくるように設置した。このサーミスタ温度計の相対精度は $10^{-2}$  K程度, レスポンスタイムは1秒以内である。測定される温度の変動幅が数K程度であることを考えると, この精度で測定を行えば2桁以上のスケールにわたってフラクタル次元解析が行えることになる。

なお, 一部の実験(第1表の水平温度差に\*印のついたもの)では, 平均半径に8個のサーミスタを等間隔に並べるような配列を用いており, その際には別の温度計を用いて加熱部と冷却部の温度測定を行ったため, これらの実験に関しては水平温度差の測定精度が低い。

実験は開始時の非定常状態を除くために, 1時間以上の時間をかけて加熱部・冷却部を平衡状態にし, さらに回転数を固定してから30分以上経過した後測定を開始した。サンプリング間隔は1秒で約3時間測定を行ない, 回転台に固定したデータレコーダに記録した。Ruelle (1990) によるとフラクタル次元解析において, 少なくとも1桁にわたって次元を求めるためにはデータ点の総数 $N$ が

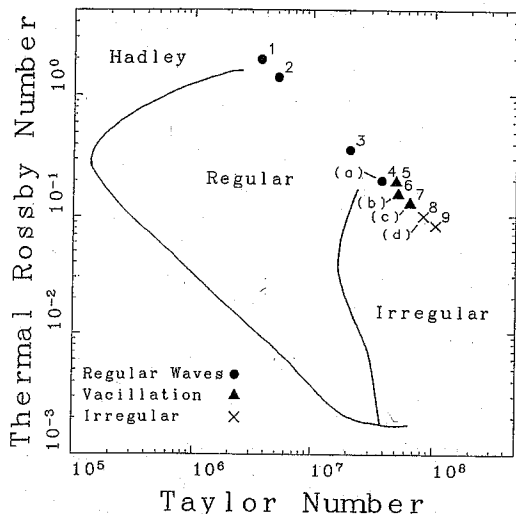
$$D \leq 2 \log_{10} N \tag{1}$$



第1図 上段: 実験装置の模式図。下段: 水槽内のサーミスタの配置図。  
 a: 透明アクリル外壁(正方形), b: 円筒ガラス(内径14.7 cm), c: アルミ棒(直径7 cm), d: ヒーター, e: 循環ポンプ, f: 放熱板, g: サーモモジュール, h: 冷却ファン。黒丸1~8がサーミスタの位置。

第1表 実験の概要。実験番号, 実験パラメーター(水深, ヒーター電圧, 回転角速度), および実験で得られた流体槽中央での時間平均温度, 内外円筒間の温度差, 熱ロスビー数, テイラー数, 卓越波数。#5と#9ではサーミスタを平均半径上に等間隔に配置した。水平温度差の欄で\*印は自作の電子温度計で測定した値を示す。

実験 #	水深 (cm)	ヒーター電圧 (V)	回転角速度 (rad/s)	平均温度 (K)	水平温度差 (K)	熱ロスビー数	テイラー数	卓越波数
1	4.9	85	$8.45 \times 10^{-1}$	22.6	14.*	$1.94 \times 10^0$	$3.63 \times 10^6$	3
2	4.9	85	$8.41 \times 10^{-1}$	21.4	14.*	$1.38 \times 10^0$	$5.09 \times 10^6$	4
3	5.0	70	1.75	20.8	15.5	$3.51 \times 10^{-1}$	$2.07 \times 10^7$	5
4(a)	5.8	72	2.54	21.1	15.7	$1.96 \times 10^{-1}$	$3.76 \times 10^7$	5
5	5.2	74	2.67	21.8	17.*	$1.92 \times 10^{-1}$	$4.93 \times 10^7$	5
6(b)	5.4	72	2.86	20.1	16.5	$1.51 \times 10^{-1}$	$5.13 \times 10^7$	5
7(c)	5.2	72	3.14	21.3	17.3	$1.27 \times 10^{-1}$	$6.42 \times 10^7$	5
8(d)	5.0	73	3.49	21.5	17.5	$9.97 \times 10^{-2}$	$8.24 \times 10^7$	5-6
9	5.0	73	3.81	22.2	16.*	$8.27 \times 10^{-2}$	$1.04 \times 10^8$	5-6



第2図 流れのレジームを  $T_a-Ro_T$  の無次元パラメータ空間に記入したレジームダイヤグラム。Hide and Mason (1975) の図に今回の実験結果を記入したもの。

を満たさなくてはならない。ここで  $D$  は求める次元である。この実験では約10000点のデータがあるので、温度時系列データの次元が8次元以下であれば、フラクタル次元を求めることが可能である。

第1表の熱ロスビー数 ( $Ro_T$ ) およびテイラー数 ( $Ta$ ) の定義は以下の通りである。

$$Ro_T = \frac{g \alpha \Delta T}{\Omega^2 (b-a)^2} \quad (2)$$

$$Ta = \frac{4\Omega^2 (b-a)^4}{\nu^2} \cdot \frac{b-a}{d} \quad (3)$$

ここで、 $a$  は実験槽の内半径、 $b$  は外半径、 $d$  は流体層の深さ、 $\alpha$  は流体の体膨張率、 $\nu$  は流体の動粘性係数、 $\Omega$  は回転角速度、 $g$  は重力加速度、 $\Delta T$  は水平温度差 (加熱部と冷却部の温度差) である。また、卓越波数は、アルミニウムの粉で表面の流れを可視化し、回転台に固定したビデオカメラから得られた画像をもとに求めた。

### 3. 実験結果

#### 3.1 力学レジーム

本実験で得られたレジームダイヤグラムを第2図に示す。図中の●は定常波動、▲は構造バシレーション (波の形が周期的に変化するもの。卓越波動の周期と波が変形する周期とが一般に非通約であるために準周期変動となる。)、×は不規則波動をそれぞれ表している。

各実験での卓越波数は#1では3、#2では4、#3~#7では5であり、#8と#9では5あるいは6 (不規則波動では時刻によって卓越波数が増加した) であった。実線は Hide and Mason (1975) による流れのレジームの境界線である。不規則波動が出現するテイラー数は彼らの結果よりも若干大きくなっているものの、力学レジームに関しては、全体として彼らの結果とほぼ同様の結果となっていることがわかる。

これらの実験のうち、以下の解析ではとくに#4、#6、#7、#8の各実験を、それぞれ定常波動 (#4)、バシレーション (#6、#7)、不規則波動 (#8) の典型的なケースと見なし、これらの結果についてスペクトル解析とフラクタル次元解析を行うことにする。また、これらの実験のそれぞれを実験(a)、(b)、(c)、(d)と呼ぶ。

#### 3.2 スペクトル解析

第3図は(a)~(d)の各実験においてサーミスタ6で測定した温度時系列データ  $T(t)$  (平均からのずれ成分) のパワースペクトル密度関数  $G(\omega)$  である。

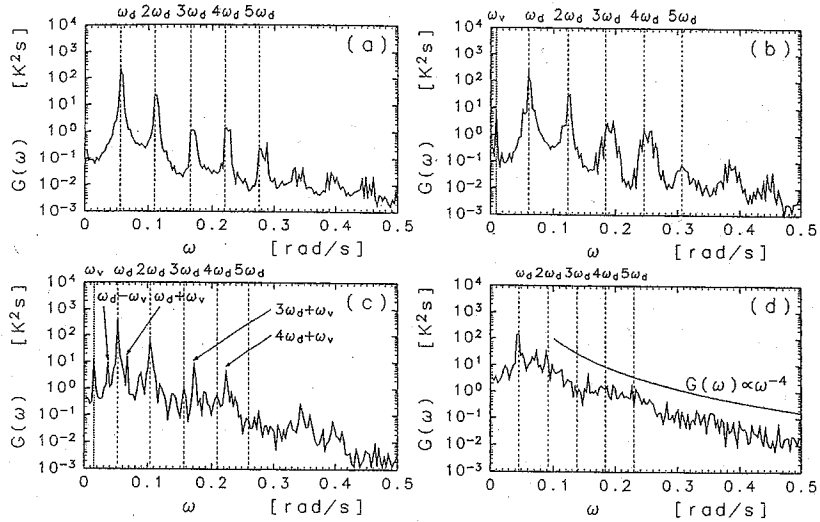
実験(a)では卓越周波数 ( $\omega_d = 5.52 \times 10^{-2}$  rad/sec) とその高調波成分 ( $2\omega_d, 3\omega_d, \dots$ ) が見てとれる。水槽に固定されたサーミスタで温度測定をしているので、この卓越周期 ( $2\pi/\omega_d = 1.13 \times 10^2$  sec) は卓越する波の1波長が通過する時間に対応している。

実験(b)、(c)では  $\omega_d$  より低周波数側に新たな周波数成分  $\omega_v$  が加わり、 $\omega_d \pm \omega_v, 2\omega_d \pm \omega_v, 3\omega_d \pm \omega_v, \dots$  などの周波数にもピークが出現している。特に(c)の高周波数域では、 $\omega_d$  の高調波成分よりも  $3\omega_d + \omega_v, 4\omega_d + \omega_v$  などの成分の方が大きなパワーを持っている。このことから、卓越波動がゆっくりした周期  $2\pi/\omega_v$  でバシレーションを起していることがわかる。実際の流れでは、この周期で流れの形が周期的に変化する。

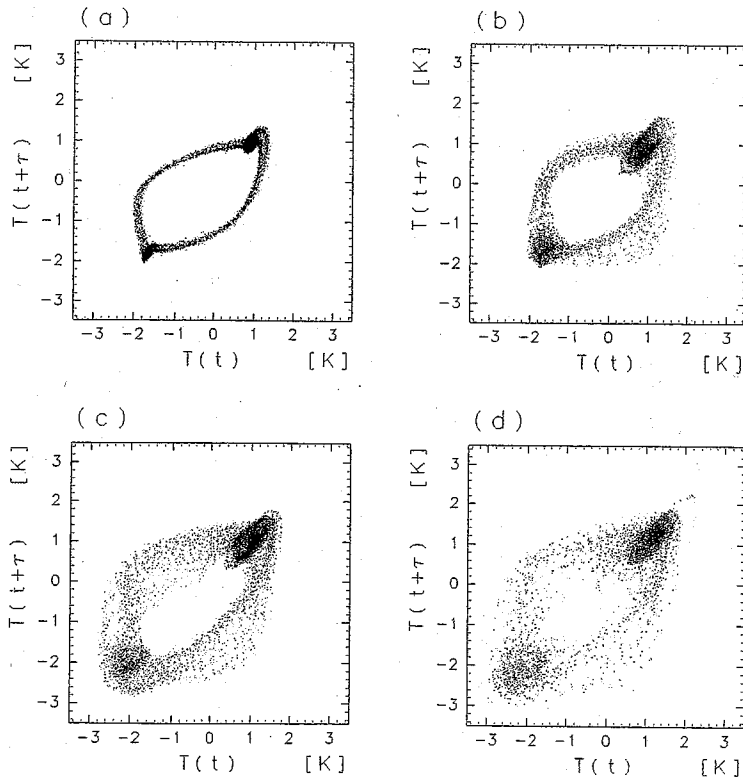
実験(d)では、かろうじて卓越周波数 ( $\omega_d$ ) のピークが認められるものの、ノイズレベルが上がりかなり不規則な流れになっていることがわかる。さらに、この高調波にはピークが出現していない。このレジームでのスペクトルに関しては、Buzyna *et al.* (1984) が実験している。彼らの実験の不規則波動域では、高周波数域で  $G(\omega) \propto \omega^{-3.8-4.7}$  程度のスペクトル分布を得ている。テイラー数が異なっているけれども、我々の実験でも  $\omega > 0.1$  rad/sec の高周波数域では、 $G(\omega) \propto \omega^{-4}$  に近いスペクトル分布となっている。

#### 3.3 フラクタル次元

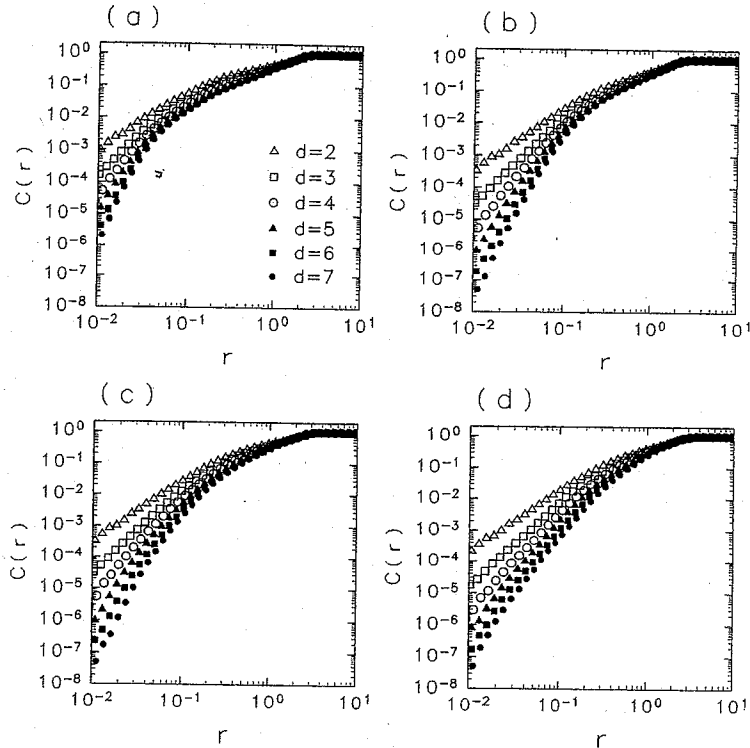
前節でスペクトルを求めた同じデータに対してフラクタル次元解析を行ってみる。



第3図 実験(a)~(d)で得られた温度時系列(サーミスタ6)のパワースペクトル。  
 $\omega_d$  は卓越周波数を,  $\omega_v$  はバシレーションの周波数を表す。



第4図 実験(a)~(d)で得られた温度時系列(サーミスタ6)  $T(t)$  と  
 10秒 ( $=\tau$ ) 遅れの温度時系列  $T(t+\tau)$  の相図。



第5図  $d=2\sim 7$ の埋め込み次元で実験(a)~(d)のアトラクタを再構成して求めた2体相関関数の積分。サーミスタ3, 5, 6の温度時系列から求めた結果を平均している。埋め込みの方法としては時間遅れを用いる。 $\tau=10$ 秒。

フラクタル次元 (相関次元)  $D$ は、時間遅れ  $\tau$ を用いて温度時系列を  $d$ 次元相空間内に埋め込んでアトラクタを再構成し、その2体相関関数の積分 (correlation integral)  $C(r)$ のある有限区間での回帰直線の傾きから求められる。すなわち、1つの時系列  $T(t)$ に対して、 $\tau$ の整数倍の時間をずらしたデータを  $d$ 個作り、 $d$ 次元ベクトル  $T=(T(t), T(t+\tau), \dots, T(t+(d-1)\tau))$ の時系列 (アトラクタ) を構成する。前述の4つの実験データから、このようにして構成したアトラクタの2次元平面への射影を第4図に示す。

この  $d$ 次元データから  $C(r)$  を求めるわけであるが、これは「ある点を選んだときに、その点から距離  $r$ 以内にある点の平均の数」として、次のように定義される。

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(r - \|T_i - T_j\|) \quad (4)$$

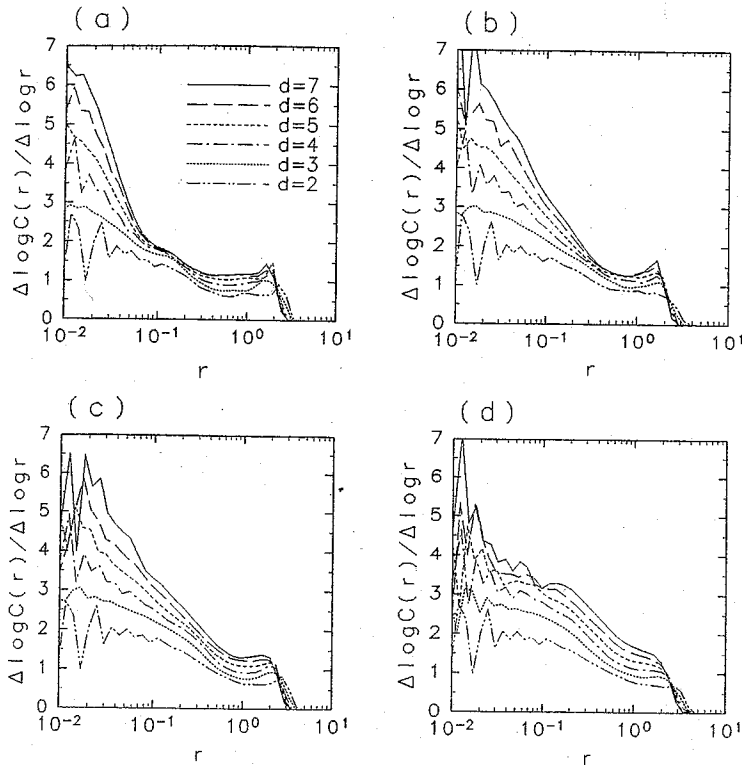
ここで、 $N$ はデータ点の総数、 $H(z)$ はヘビサイド関

数 ( $z \geq 0$  なら  $H(z)=1$ ,  $z < 0$  なら  $H(z)=0$ )、また、距離  $\|T_i - T_j\|$  は計算の効率を考慮してユークリッドの距離ではなく、いわゆるマンハッタン・メトリックで次のように定義する。

$$\|T_i - T_j\| = \sum_{k=0}^{d-1} |T(i\Delta t + k\tau) - T(j\Delta t + k\tau)| \quad (5)$$

実験で得られた時系列から求めた、埋め込み次元  $d=2\sim 7$ における2体相関関数の積分  $C(r)$ を第5図に示す。 $C(r)$ はサーミスタ3, 5, 6の温度時系列から求めた結果を各  $r$ において平均している。この実験では、 $r$ はアトラクタ上の2点間の温度変動幅に対応している。時間遅れ  $\tau$ はアトラクタが細長くなったり何回もねじれたりしないように選ぶ必要があり、ここでは  $\tau=10$ 秒とした。

相関次元 ( $D$ )は Grassberger and Procaccia (1983) にしたがって、このグラフの傾きから定義される。すなわち、 $C(r) \sim r^D$  のとき、 $D$ を相関次元と呼



第6図 第5図における2体相関関数の積分の傾き。

ぶ。一般に相関次元は注目するスケール $r$ の関数であるが、あるスケールで特定の次元を持つ構造が存在するときには、そのスケールの範囲で相関次元が $r$ によらず一定値を示すことになる (Appendix A)。第6図にこのように定義される相関次元を示す。

実験(a)では、およそ $0.2 < r < 1$ の範囲で $D \sim 1.2$ を与える。ここで、 $D \sim 1.2$ となるのは、第4図(相図)からもわかるように、アトラクタが有限の太さをもった円環構造をしているためである (Appendix A, 第A図(2))。また、グラフの右端( $r = 2$ 付近)で相関次元がスパイク状に高くなるのは、円環のように穴のあいた構造を持つ場合の特徴である(第A図(2), (3))。また、グラフの $r < 0.1$ の部分では $r$ が小さくなるに従って相関次元が高くなり、しかも埋め込み次元 $d$ による差も大きくなる傾向が見られるが、これはランダムノイズによる影響である。時系列がランダムノイズである場合には、相関次元は埋め込み次元にほぼ等しくなることがわかっており (Malraison *et al.*, 1983)、この実験でも $r = 0.01$ でほぼそのようになっている。

実験(b), (c)でも実験(a)と同様に $r \sim 1$ 付近で $D \sim 1.3$

となり、実験(a)と同様に $r = 1$ のスケールで円環構造が存在することを示しているが、実験(a)に比べて次元を与えるスケールの幅はかなり狭い。それより小さなスケールではランダムノイズに特有の傾向となっており、特定の次元を読み取ることはできない。しかしながら、これらの実験で得られた波は単一周期の振動ではなく、2つの周期(卓越波動の周期 $2\pi/\omega_d$ と波が変形する周期 $2\pi/\omega_p$ )を持つバシレーションであることはスペクトル解析の結果から明らかである。そのような場合のアトラクタはトーラスとなるので、次元は2となるはずである。しかも、第3図(a), (b)からわかるように、実験(b)は実験(a)と比べても単にバシレーションの周期の信号が付け加わった程度の違いしかなく、ノイズレベルはどちらもほとんど同じである。ということは、実験(a)においてノイズの影響が顕著になる $r = 0.1$ よりも大きなスケールにおいて、ある程度の幅で2という値が得られそうな気がするが、フラクタル次元解析の結果には、ランダムノイズのような特徴が現れてしまっている(この原因に関しては後述)。

これに対して、実験(d)では実験(b), (c)と比べて明ら

かに異なる傾向が見られる。すなわち、実験(b), (c)ではスケールが小さくなるにしたがって、相関次元の埋め込み次元に対する依存性が大きくなっているのに対し、実験(d)では $r=0.1$ あたりのスケールで、むしろ埋め込み次元に対する依存性が小さくなっている。これはこのスケールにおける相関次元が実験(b), (c)に比べて収束性がよいことを示している。また $r=0.1$ あたりで、相関次元の $r$ に対する依存性も小さくなって比較的一定値(3.5)に近い相関次元を与えている。

#### 4. 考察

実験(b), (c)において、スペクトル解析では2つの周波数 $\omega_a, \omega_b$ が見られ準周期的振動であることがはっきりわかるのに対して、フラクタル次元解析においては、それに対応する相関次元2が全く読み取れない。同じデータに対して Guckenheimer and Buzyna (1983)の方法をもとにしたフラクタル次元解析を行なった(Appendix B)が、実験(d)では2.8程度の次元を得たものの、実験(b), (c)では次元2が全く読みとれなかった。ここでは、まずその理由について考えてみる。

第一に考えられるのが、ノイズの影響である。実験(b), (c)では線スペクトル的な信号に、比較的周波数帯の広いノイズが重なったようなデータになっている。スペクトル解析においては、仮にノイズ全体のエネルギーが信号のエネルギーよりも大きくても、ノイズの周波数帯が広ければその分エネルギー密度は下がるので、線スペクトル的な信号を認識するのは容易である。それに対して、相関次元を求める方法では、ノイズと信号の振幅そのものが問題となるので、ノイズと信号を区別することが難しい。実験(b)のフラクタル次元解析では、実験(a)と比較してノイズレベルに大きな差がないのに、比較的大きなスケールからランダムノイズのような特徴が出ている。これは、フラクタル次元解析では、信号のレベルがランダムノイズに比べてかなり高くないと、信号の成分までランダムノイズのような特徴を示してしまうことを表している。

相関次元がうまく求まらなかったもう一つの理由としては、アトラクタ上のデータ点の分布が一様ではないことが考えられる。第4図からもわかるように、実験で得られたデータ点の分布にはかなりの偏りがある。このような場合にはAppendix Cで示すように、スケールの大きな部分(グラフの右側)において本来の次元になかなか近づかない。この傾向はデータの数

を増やしてもほとんど変わらない。したがって、データ点の分布が不均一であるような場合には、Ruelle (1990)の条件よりもかなり多くの点を精度よく測定する必要がある。

これらのことを考えると、線スペクトル的な特徴を持つ時系列に対して、フラクタル次元を正確に求めるためには、精密な測定を長時間行って多数のデータを取る必要がある。もともと、回転台上の実験では水槽自身が動いているため、ベナール対流の実験などに比べてノイズが入りやすく制御も難しい。さらに、解析に必要な計算時間も今回のデータではスペクトル解析(2秒程度)に対してかなりの時間(6000秒程度)がかかる。このようなことを考慮すると、定常波動やバシレーションの解析としてはフラクタル次元解析はあまり適当な方法ではなさそうである。

しかしながら、実験(d)のようにかなり乱れた非定常波動に関しては、スペクトル解析とは独立な解析結果として意味のある情報が得られそうな印象を受ける。今回の実験では正確な次元を求めるまでには至らなかったが、少なくともバシレーションに比べれば収束性のよい結果を得ている。今回の実験が傾斜対流実験として特に精度のよい実験ではないことを考えると、今後の実験技術の改良により、スペクトル解析と並んで非定常な流れを解析する方法として実用的に使えるのではないと思われる。

もともと、多くの自由度を持つ非定常な流れに対して、スペクトル解析だけでは情報量が極端に少ないので、それとは独立に全く異なるアルゴリズムで求められる情報は貴重である。理想的な乱流であれば、非常に大きな次元を持つことが予想されるが、スペクトルにべき乗則がみられるような場合でも、一般にその次元は不明であり、流れの性質によって大きく異なる。今回得られた次元が3.5と比較的小さいということは、乱れてはいるものの、それほど乱流的ではない、ということを示しており、バシレーションから非定常流に至る乱流化の過程を調べる際には有用な情報となり得る。

#### 5. まとめ

傾斜対流実験で得られた温度時系列データに対してフラクタル次元解析を行ない、これまで伝統的に行われてきたスペクトル解析の結果と比較してみた。全体として、実験の精度等の問題は残るものの、不規則波動領域の流れのように、もともとの時系列データの

スペクトルにかなりの幅があるような場合には、ある程度の精度でフラクタル次元が求まることがわかった。今回の実験の不規則波動流では $D \sim 3.5$ と比較的小さい次元が求まっており、Ruelle (1990) の条件 ( $D < 8$ ) を考慮しても十分収束性の良い値である。これに対して、バシレーションのようにスペクトル解析において線スペクトルになるようなデータ、すなわち、フラクタル次元が整数値であることが期待されるようなデータに対しては、スペクトル解析に比べてノイズに弱く、フラクタル次元解析を行うためには、よりノイズの少ない実験を行わなければならないことがわかった。

まれる点の数を  $n$  とする。  $N$  が十分大きい場合には、点の数の比  $n/N$  はそれらの占める面積の比とほぼ等しいと考えられる。

$$\frac{n}{N} \sim \frac{a(r, l)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \tag{A.2}$$

ここで、 $a(r, l)$  は円盤と半径  $r$  の円との共通部分の面積を表している。 2体相関関数の積分  $C(r)$  はその定義式より「アトラクタ上のすべての点の組に関する2点間距離の累積分布関数」と言うことができる。したがって、いまの場合の  $C(r)$  は次のように表すことができる。

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum \frac{a(r, l)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} N$$

$$= \frac{\Delta S}{\pi^2(R_2^2 - R_1^2)^2} \sum a(r, l) \tag{A.3}$$

ここで、 $\sum$  はすべての点についての和を表している。この式は  $N \rightarrow \infty$  の極限をとると積分で表すことができる。円盤の中心を極とする平面極座標  $(l, \theta)$  を導入すれば、この円盤の2体相関関数の積分  $C(r)$  は次のようになる。

$$C(r) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{a(r, l)}{\pi^2(R_2^2 - R_1^2)^2} l \, dld\theta$$

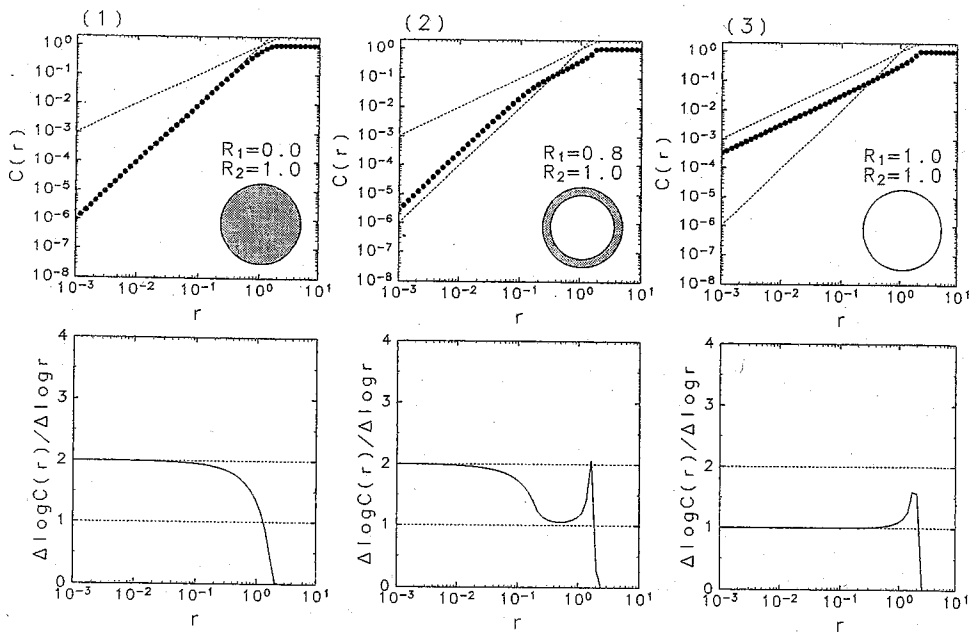
Appendix

A 穴のある同心円盤の相関次元

内半径  $R_1$ 、外半径  $R_2$  の同心円盤を考える。この円盤上に  $N$  個の点が一様に分布しているとすると、1個の点の占める面積  $\Delta S$  は次のように表される。

$$\Delta S = \frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)}{N} \tag{A.1}$$

この円盤上の、中心から  $l (R_1 \leq l \leq R_2)$  だけ離れた任意の点を考え、その点を中心とする半径  $r$  の円内に含



第A図 穴のある同心円盤の2体相関関数の積分とその傾き。円盤の形状を上段の図中に示す。  $R_1, R_2$  はそれぞれ内半径、外半径である。上段の図の点線は傾き1と2の直線を、下段の図の点線は傾き1と2を示している。

$$= \frac{2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} a(r, l) l \, dl \quad (A.4)$$

$a(r, l)$  は内半径と外半径の比  $R_1/R_2$  と円の半径  $r$ , 積分変数  $l$  の3変数の相互関係によって場合わけをすれば, 初等幾何から求められる.

第A図は3つの異なるデータ分布に対する2体相関関数の積分  $C(r)$  とその傾きを示す. 分布モデルは, (1): 円盤, (2): 穴のある同心円盤, (3): 閉曲線である. 円盤の  $C(r)$  は (A.4) 式において  $R_1=0$  とおいたものに等しい. 閉曲線の  $C(r)$  は (A.4) 式において  $R_1 \rightarrow R_2$  の極限をとったものであるが, ここでは, 円周上に  $N$  個の点が一様に分布しているとして前述の方法と同様に計算している.

第A図(1), (3)では分布モデルの構造(円盤および閉曲線)に対応して, それぞれ, フラクタル次元2, 1が得られている. これに対して, (2)では見るスケールに

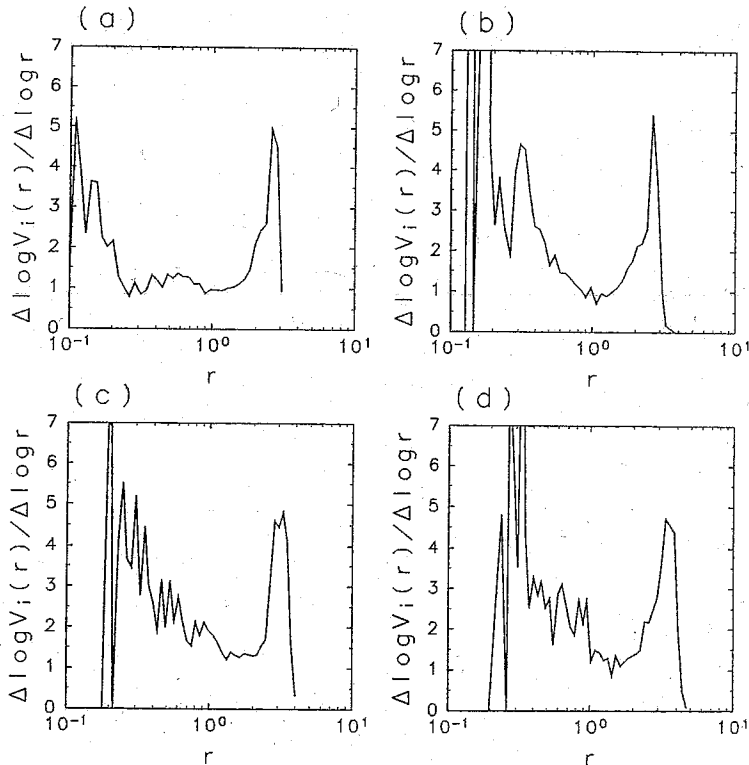
よって得られる次元が異なっている. 時系列データが準周期変動をしている場合にはアトラクタがトーラスとなり, このような場合にも, 見るスケールによって次元が異なる.

第A図(2), (3)では, グラフの右端で相関次元がスパイク状に高くなっている. 穴のない円盤(1)ではこのような特徴が見られないことから, これはアトラクタが穴のあいた構造を持つ場合に特有な特徴であることがわかる.

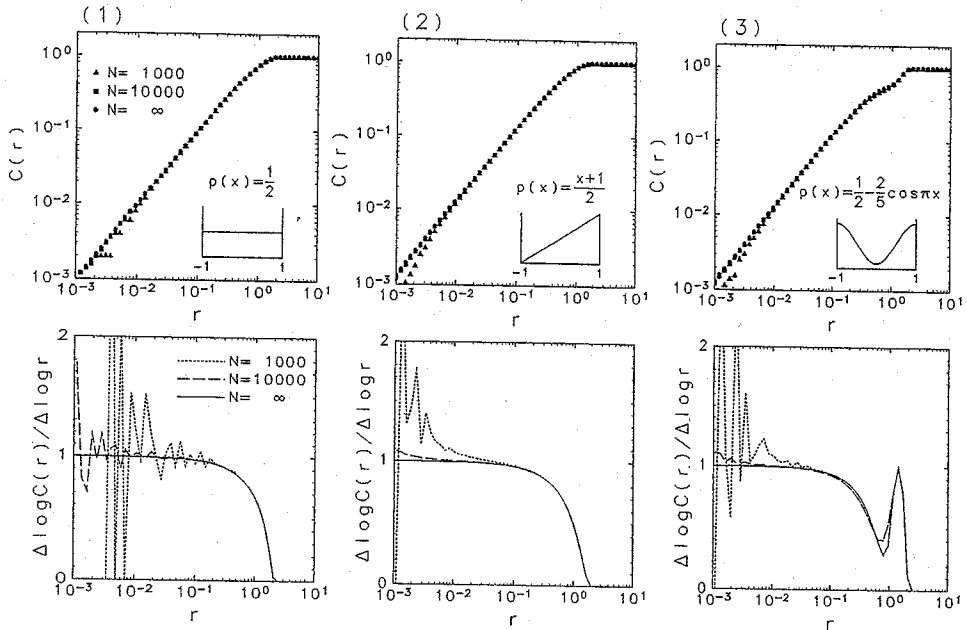
### B Guckenheimer and Buzyna (1983) のフラクタル次元

Guckenheimer and Buzyna (1983) が用いた方法に基づいてフラクタル次元を求める.

1つの時系列  $T(t)$  に対して, 時間遅れ  $\tau$  の整数倍の時間をずらしたデータを  $d$  個作り,  $d$  次元ベクトル  $T = (T(t), T(t+\tau), \dots, T(t+(d-1)\tau))$  の時系列



第B図 実験(a)~(d)で得られた温度時系列(サーミスタ6)から  $d=7$  の埋め込み次元で各実験のアトラクタを再構成し, Guckenheimer and Buzyna (1983) の方法に基づいて求めたフラクタル次元  $D' = \Delta \log V_i(r) / \Delta \log r$ .  $V_i(r)$  は, アトラクタ上の任意の点  $T_i$  から距離  $r$  以内にある点の個数の, アトラクタを構成する点の総数に対する割合を表す. 埋め込みの方法としては時間遅れを用いる.  $\tau=10$ 秒.



第C図 長さ2の線分の2体相関関数の積分とその傾き. 線分上における点の存在確率密度関数  $\rho(x)$  を上段の図中に示す.

(アトラクタ)を構成する. このアトラクタ上に任意の点  $T_i$  を選び, 点  $T_i$  とアトラクタ上の  $T_i$  以外のすべての点との距離  $r$  を求める. ここで, 2点  $T_i, T_j$  間の距離  $\|T_i - T_j\|$  は次のように定義する.

$$\|T_i - T_j\| = \max \{ |T(i\Delta t + kr) - T(j\Delta t + kr)|, 0 \leq k \leq d-1 \} \quad (\text{B.1})$$

求めた距離  $r$  を大きさの順に並べ, 小さい方から  $n$  番目の距離  $r_n$  に対して,

$$V_i(r_n) = \frac{n}{N} \quad (\text{B.2})$$

とする. ここで,  $N$  はデータ点の総数である.  $V_i(r)$  は点  $T_i$  から距離  $r$  以内にある点の個数の,  $N$  に対する割合を表す. つぎに,  $V_i(r)$  は点  $T_i$  の選び方によらないと仮定すると, フラクタル次元  $D'$  は, この  $V_i(r)$  のある有限区間での回帰直線の傾きで与えられる. すなわち,  $V_i(r) \sim r^{D'}$  のとき,  $D'$  をフラクタル次元とする.

実験で得られた時系列から求めたフラクタル次元  $D'$  を第B図に示す. ここで, 時間遅れ  $\tau=10$ 秒, 埋め込み次元  $d=7$  である. また, 点  $T_i$  はすべての実験において第4図の左下にくるように選んでいる. 実験(a)では, およそ  $0.2 < r < 2$  の範囲で  $D' \sim 1.0$  を与え

る. 実験(b)では  $r \sim 1$  付近で  $D' \sim 1.0$ , 実験(c)では  $r \sim 2$  付近で  $D' \sim 1.3$  となるが, 実験(a)に比べて次元を与えるスケールの幅はかなり狭い. また, 実験(b), (c)とも,  $r < 1$  のスケールでは特定の次元を読みとることができない. これに対して, かなりばらつきはあるものの, 実験(d)では  $r \sim 0.5$  付近で実験(b), (c)よりは一定に近い値 (2~3) を与えている.

なお, 点  $T_i$  の選び方によっては, やや異なる結果が得られる場合もあるが, これらの結果は, Grassberger and Procaccia (1983) の相関次元 (第6図) と定性的に同じ結果となっている.

### C 有限線分の相関次元

長さ  $L$  の線分上に無限個の点が不均一に存在する場合を考える. この線分上にその中点を原点とするような座標軸  $x$  をとり, 位置  $x$  における点の存在確率密度関数を  $\rho(x)$  とする.

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{L}{2} \\ \rho(x) & |x| \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-L/2}^{L/2} \rho(x) dx = 1 \quad (\text{C.2})$$

このとき, 線分上の任意の点  $x$  を中心とした半径  $r$  の

円内に含まれる点の割合  $a(x)$  は次のように表される:

$$a(x) = \int_{x-r}^{x+r} p(t) dt \quad (C.3)$$

したがって、2体相関関数の積分  $C(r)$  は次のようになる。

$$C(r) = \int_{-L/2}^{L/2} p(x) a(x) dx \quad (C.4)$$

次に点の数が有限で  $N$  個の場合を考える。点の存在確率密度関数  $p(x)$  から確率分布関数  $F(x)$  を求める。

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-L/2}^x p(t) dt \quad (C.5)$$

ここで  $i$  番目の点  $x_i$  に注目すれば、点が離散的に分布していることから次式が成立している。

$$F(x_i) = \int_{-L/2}^{x_i} p(t) dt = \frac{i}{N} \quad (C.6)$$

この式を  $x_i$  について解くことによって点列  $x_i (i=1, 2, 3, \dots, N)$  が求められる。したがって、この点列から定義式に基づいて2体相関関数の積分  $C(r)$  を求めることができる。

第C図は3つの異なる  $p(x)$  に対する2体相関関数の積分  $C(r)$  とその傾きを示す。 $p(x)$  は、(1): 定数関数, (2): 1次関数, (3): 三角関数である。図中の記号▲, ■, ●および点線, 破線, 実線はそれぞれ  $N=1000, 10000, \infty$  で求めた結果であることを示す。

第C図(2), (3)より、データ点の分布が偏っている場合には、大きいスケール(グラフの右端)において本来の次元になかなか近付かないことがわかる。この傾向はデータ数を増やしても変わっていない。したがって、このような場合には十分多くのデータ点を取り、不均一分布の影響を受けていない小さいスケールで次元を求める必要がある。

## 参考文献

- Buzyna, G., R. L. Pfeffer and R. Kung, 1984 : Transition to geostrophic turbulence in a rotating differentially heated annulus of fluid, *J. Fluid Mech.*, 145, 377-403.
- Fraedrich, K., 1986 : Estimating the dimensions of weather and climate attractors, *J. Atmos. Sci.*, 43, 419-432.
- Gollub, J. P., and S. V. Benson, 1980 : Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.*, 100, 449-470.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983 : Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica*, 9D, 189-208.
- Guckenheimer, J., and G. Buzyna, 1983 : Dimension measurements for geostrophic turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 51, 1438-1441.
- Hide, R., and P. J. Mason, 1975 : Sloping convection in a rotating fluid, *Adv. in Phys.*, 24, 47-100.
- Keppen, C. L., and C. Nicolis, 1989 : Global properties and local structure of the weather attractor over Western Europe, *J. Atmos. Sci.*, 46, 2356-2370.
- Lorenz, E. N., 1963 : Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- Malraison, B., P. Atten, P. Berge and M. Dubois, 1983 : Dimension of strange attractors : an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems, *J. de Phys. Lett.*, 44, 897-902.
- Mandelbrot, B. B., 1982 : *The fractal geometry of nature*, Freeman ; 広中平祐監訳, 1984 : フラクタル幾何学, 日経サイエンス社.
- Ruelle, D., 1990 : The Claude Bernard Lecture, 1989, *Deterministic chaos : the science and the fiction*, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A, 241-248.
- 佐野雅己, 1987 : カオスの構造とフラクタル, 「フラクタル科学」(高安秀樹編著), 朝倉書店, 58-116.
- 佐野雅己・沢田康次, 1982 : 熱対流系のカオスと乱流, *数理科学*, 233, 51-61.
- 高安秀樹, 1986 : フラクタル, 朝倉書店.