レイリー・ベナール対流の線形安定性解析

藤田 駿

2025 年 7 月 16 日

支配方程式は水平-鉛直 2 次元のブシネスク方程式 (圧力変化に伴う密度の変化を無視し、温度変化に伴う密度変化のみを考えた近似的な方程式系):

$$
\begin{aligned}
x \text{ 方向運動方程式}: &\quad \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u \\
y \text{ 方向運動方程式}: &\quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}g + \nu\nabla^2 u \\
\text{連続の式}: &\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\
\text{状態方程式}: &\quad \rho = \rho_0\{1-\alpha(T-T_0)\} \\
\text{熱拡散方程式}: &\quad \frac{DT}{Dt} = \kappa\nabla^2 T
\end{aligned}
$$

これらに対し、流線関数 ψ と渦度 ζ を導入する:

$$
u = -\frac{\partial\psi}{\partial z},\ v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \zeta = \nabla^2\psi
$$

このとき、支配方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{D\zeta}{Dt} &= \alpha g\frac{\partial T}{\partial x} + \nu\nabla^2\zeta, \\
\frac{DT}{Dt} &= \kappa\nabla^2 T
\end{aligned}
$$

と書ける。境界条件は、x 方向には $[0, L_x]$ で周期境界条件とする。z 方向には $z = 0, L_z$ に温度が T_1, T_2 で固定された壁があるとして

$$
\begin{aligned}
T(x,0,t) = T_1, &\quad T(x,L_z,t) = T_2, \\
v(x,0,t) = v(x,L_z,t) = 0, &\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,0,t)} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,L_z,t)} = 0
\end{aligned}
$$

とする。

計算の便宜のため、これらの方程式を無次元化する。無次元の量を $*$ 付きで表す。長さスケールは L として、時間スケールは熱拡散によって決まっているとすれば

$$
t = \frac{L^2}{\kappa}t_*
$$

また、基本葉の温度の鉛直シアーを $\Gamma = \dfrac{\partial\bar{T}}{\partial z}$ として、温度を

$$
T = L\Gamma T_*
$$

と無次元化すれば、支配方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{D\zeta_*}{Dt_*} &= Pr\cdot Ra\frac{\partial T_*}{\partial x_*} + Pr\nabla_*^2\zeta_*, \\
\frac{DT_*}{Dt_*} &= \nabla_*^2 T_*
\end{aligned}
$$

と書ける。ここで無次元量 $Pr,\ Ra$ はそれぞれプラントル数とレイリー数で、

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{\alpha g \Gamma L^4}{\kappa \nu}$$

とかける。これらはそれぞれ、粘性と熱拡散の比、浮力と熱拡散の比を表している。

以下、無次元量の $*$ を省略して表記する。温度は鉛直方向に線形に変化する基本場 $\bar{T}(y)$ と、そこからの摂動 T' に

$$T(x,z,t) = \bar{T}(y) + T'(x,z,t) = T_1 - y + T'(x,z,t)$$

と分離すると、結局支配方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right) &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\psi\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2\psi\right) + Pr\cdot Ra\frac{\partial T'}{\partial x} + Pr\nabla^4\psi \\
\frac{\partial T'}{\partial t} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T'}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2 T'
\end{aligned}$$

と書ける。

この支配方程式に対して、線形安定性解析を行う。ψ, T' はいずれも微小であるとして、微小量の二次以上の項は無視して線形化をすると支配方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right) &= Pr\cdot Ra\frac{\partial T'}{\partial x} + Pr\nabla^4\psi \\
\frac{\partial T'}{\partial t} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2 T'
\end{aligned}$$

と書ける。いま、$[0, Lx]\times[0, L_z]$ の領域を考えているので

$$\psi = \hat{\psi}\sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right)\exp\left(\frac{2\pi i k x}{L_x}\right)e^{-i\omega t}, \quad T' = \hat{\tau}\sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right)\exp\left(\frac{2\pi i k x}{L_x}\right)e^{-i\omega t}$$

の形の解を仮定する。とくに簡単のため、

$$n' := \frac{n\pi}{L_z}, \quad k' = \frac{2\pi k}{L_x}$$

とおく。これらの式を線形化した支配方程式に突っ込むことで

$$\begin{aligned}
-i\omega(-n'^2 - k'^2)\hat{\psi} &= Pr\cdot Rai k'\hat{\tau} + Pr(n'^2 + k'^2)\hat{\psi} \\
-i\omega\hat{\tau} &= ik'\hat{\psi} - (n'^2 + k'^2)\hat{\tau}
\end{aligned}$$

$K^2 := n'^2 + k'^2$ とした上でこれらの式から $\hat{\tau}$ を消去すれば

$$\omega^2 K^2 + i\omega(Pr+1)K^4 + k'^2 Pr\cdot Ra - PrK^6 = 0$$

成長率を考えたいので $\omega = \sigma + i\gamma;\ \ \sigma,\gamma\in\mathbb{R}$ とおけば

$$e^{-i\omega t} = e^{-i(\sigma+i\gamma)t} = e^{-i\sigma t}e^{\gamma t}$$

であるので、γ が成長率に対応する ($\gamma<0$ であれば減衰、$\gamma>0$ であれば成長)。これをさっきの式にぶち込んで

$$(\sigma^2-\gamma^2)K^2 + 2\sigma\gamma K^2 i + i\sigma(Pr+1)K^4 - \gamma(Pr+1)K^4 + k'^2 Pr\cdot Ra - PrK^6 = 0$$

これが恒等的に成り立つためには、左辺の実部と虚部がそれぞれ 0 でなければならないため、

$$\begin{aligned}
&\text{実部:}\quad (\sigma^2-\gamma^2)K^2 + -\gamma(Pr+1)K^4 + k'^2 Pr\cdot Ra - PrK^6 = 0 \\
&\text{虚部:}\quad 2\sigma\gamma K^2 i + i\sigma(Pr+1)K^4 = 0
\end{aligned}$$

がそれぞれ成り立つ。虚部の方の式から

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(\gamma + \frac{1}{2}(Pr+1)K^2\right) = 0, \\
\therefore \qquad &\sigma = 0 \quad \text{もしくは} \quad \gamma = -\frac{1}{2}(Pr+1)K^2
\end{aligned}$$

後者の解は時間方向に減衰する解なのでどーでもいい。そこで前者 (i.e., x 方向に動かないモード) の解を考えると、実部の方の式から

$$-\gamma^2 K^2 - \gamma(Pr+1)K^4 + k'^2 Pr \cdot Ra - PrK^6 = 0$$
$$\therefore \quad \gamma = \frac{-(Pr+1)K^4 \pm \sqrt{(Pr+1)^2K^8 + 4K^2(k'^2 Pr \cdot Ra - PrK^6)}}{2K^2}$$

となる。したがって、

$$k'^2 Pr \cdot Ra - PrK^6 > 0$$
$$\text{i.e.,} \quad Ra > \frac{K^6}{k'^2} = \frac{(k'^2+n'^2)^3}{k'^2} = \left(\frac{L_x^2}{4\pi^2 k^2}\right)\left(\frac{4\pi^2 k^2}{L_x^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}\right)^3$$

のときに成長モードが生じうる。そうでなければすべてのモードが減衰モードになる。したがって、ある x 方向波数 k の擾乱は、レイリー数 Ra が

$$Ra_c = \left(\frac{L_x^2}{4\pi^2 k^2}\right)\left(\frac{4\pi^2 k^2}{L_x^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}\right)^3$$

より大きい場合に不安定になる。($Ra = Ra_c$ の曲線を左図の赤線で示している)。さらにこれらのことから、成長モードがある時、その成長率は

$$\gamma = \frac{-(Pr+1)K^4 + \sqrt{(Pr+1)^2K^8 + 4K^2(k'^2 Pr \cdot Ra - PrK^6)}}{2K^2}$$

となる。(グラフ左図のカラーマップ)

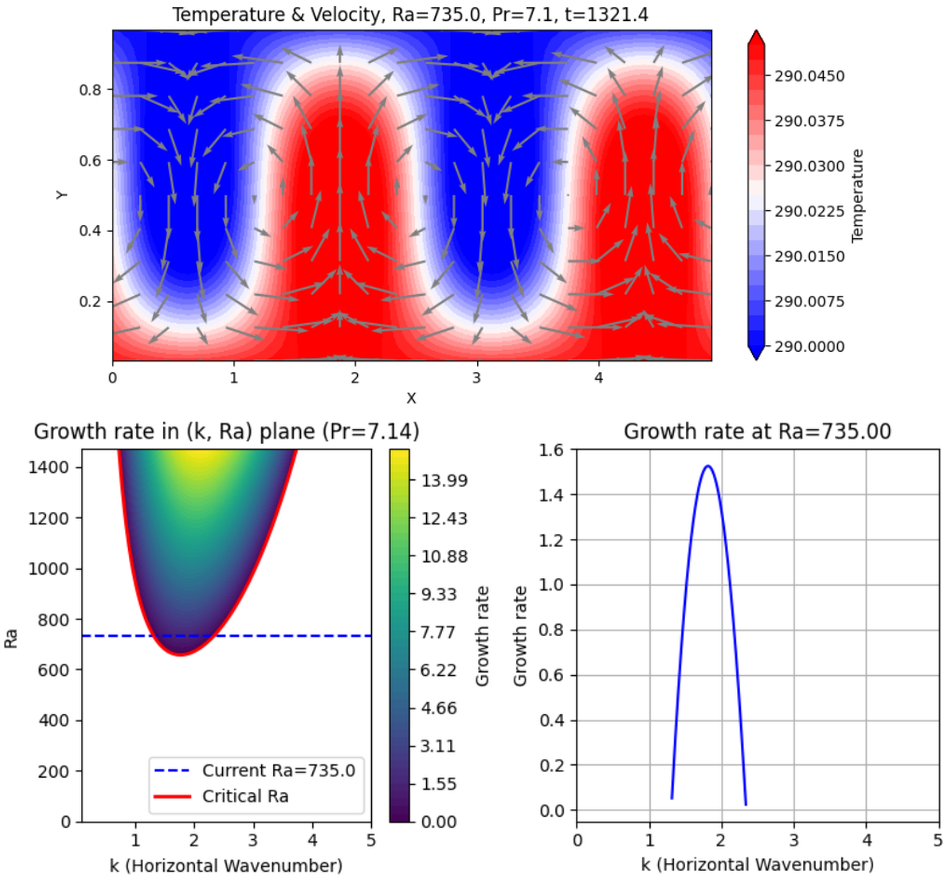

図 1　(上図):$Ra = 735.0, Pr = 7.1$ のときの対流セルの時間発展。(左下図):k, Ra 平面での成長率 (カラーマップ), $Ra = Ra_c$ の曲線 (赤線), 現在のレイリー数 (青点線)。(右下図):$Ra = 735.0$ における成長率。波数 $k = 2$ の波の成長率が最も高いことがわかる。これは時間発展の結果とも整合的。