

# 気象学 I (気象力学)

余田 成男

平成18年1月16日

余田 成男 (京都大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻)  
〒 606-8502 左京区北白川追分町 京都大学理学部 4号館地球物理  
e-mail: yoden@kugi.kyoto-u.ac.jp

# はじめに

気象学の対象である地球 (惑星) 大気に対する我々の基本的視点を紹介し, 今日の気象学の諸分野の在り様を概観する. そして, この講義の位置付けと構成を述べる.

## 大気システム

我々の興味は, 地球をはじめとする惑星の大気にある. 惑星大気の様子を知り理解しようとするとき, 大きく分けると物質, 放射, 運動 の三つの視点がある.

- 物質: 大気組成とその空間分布  
化学反応 (例,  $O_3$ ), 相変化 (例,  $H_2O$ )
- 放射: 基本的温度構造の決定  
太陽放射と地球放射  
吸収, 射出, 反射, 散乱
- 運動: 運動形態とその働き  
形態の記述と成因  
働きとしての輸送過程: 運動量 ( $\rightarrow$  大循環), 熱エネルギー ( $\rightarrow$  対流), 物質 ( $O_3, H_2O, etc.$ )

これらは, 大気システムを構成する素過程である. それぞれに独立した過程として扱える主題も多いが, 三要素の相互作用が重要となる局面もある (図 1).

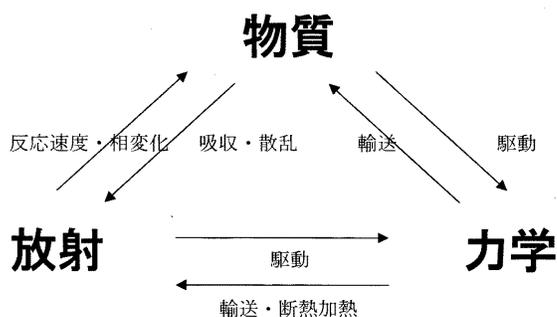


図 1: 大気システムの概念図

## 学問分野・領域

惑星大気 (大気システム) を研究するには、いくつかのアプローチがある。前節に述べたように、大気システムを構成する三つの素過程により分野を分けることができるが、その目指すところをもとに我々の学問領域を分けることもできる。それぞれの目標をもとに次の四つに分けて、整理してみよう。

- 大気現象学 (meteorology) :  
大気“現象”を人間が認識することから出発する現象学  
アリストテレスの“気象学”, 現象の記述
- 大気物理学/大気化学 (atmospheric physics/chemistry) :  
大気のままさまざまな様相 (=素過程) を記述できる言語体系の確立  
物質, 放射, 運動の物理的/化学的理解
- 地球システム科学 (earth system science) :  
地球システム (気候システム) の動態を調べるシステム科学  
サブシステムとして大気を位置付け, 素過程の結合に興味をもつ
- 災害科学・環境科学 (applied meteorology) :  
災害や環境変化の予測・予知能力の向上  
人間社会との関係を前提とした応用科学

また、地球惑星科学の諸分野と同様に研究手法はつぎの三つに大別でき、今の時代に特有の状況となっている。

- 観測・解析： 研究対象は現実に存在する大気である。その諸量をはかりデータを整理することにより、現象の記述を行なう。巨大科学化して観測と解析の分業化が進んでいる領域がある。
- 理論： 現実大気の状態を理想化抽象化して問題をたて、数理物理的諸手法によりこれを解き、現象の理解をする。線型手解析だけで完結する話題が減り、数値実験との境界があいまいになりつつある。
- 室内実験・数値実験： 現実大気の状態を理想化抽象化して、室内またはコンピュータで実験を行なうことにより、現象の理解を深める。基本的に、物理学分野の実験と同様の論理展開をする。しかし、巨大モデルの一発実験では、現象の地学的記述を専らとすることもある。

## 気象学 I

気象学 I では、大気物理学の立場から素過程としての大気運動をとり上げる。気象力学 (dynamic meteorology) と呼ばれる領域に相当する。動機づけは、あくまで観測・解析の結果としての大気現象にあるが、ここでは、おもに理論と数値実験結果に基づいた現象の理解に重点を置く。流体力学の基礎知識を前提とし、「地球連続体力学」、「連続体力学」、「地球流体力学」は履修したものととして、講義を進める。

講義の構成は流体力学の枠組みに従う。すなわち、その大枠は次のとおりである：

- 基礎方程式とスケール解析
- 渦の力学
- 波の力学
- 流れと安定性
- 乱流

# 第1章 流体力学の基礎方程式

回転流体力学の基本は流体力学である。まず、流体力学の基礎方程式系を導出する。流体力学の教科書(今井, 1973; 巽, 1982, 1995 など)や地球流体力学・大気力学の教科書(Lindzen, 1990; Cushman-Roisin, 1994; 松井 孝典・他, 1996 など)では、それぞれに流体力学(また、弾性体を含めた連続体力学)の基礎方程式系を導出をしているが、ここではおもに巽(1982, 1995)およびLindzen(1990)を参考にしてこの導出を行なう。

## 1.1 流体の運動

まず、基本単語を列記する。

- 流体：液体と気体とは変形しやすいという共通点をもつために、運動の仕方も互いによく似ている。それでこれらを総称して流体という。(理化学辞典第3版)
- 弾性体：物体に力を加えたときの釣合いや運動を論ずる際に、物体が、弾性限度内にあるときをとくに考える場合、これを弾性体という。ふつうは固体についていう。(理化学辞典第3版)
- 連続体：流体と弾性体の総称名。これらは、いずれも空間内に連続的な広がりを持ち、内部で運動や変形を起こすことが可能である。変形する物体ともいう。(巽, 1995)

連続体は、質点や剛体と同様に、一定の力学的法則(ニュートンの運動法則)に従うものとする。連続体では、そのすべての部分が互いに独立に運動するので、無限の自由度をもつ力学系である。この意味で、連続体は無限個の質点からなる質点系と似ているが、物質の連続的な広がりを考える連続体は、場としての性格をもつ。その支配方程式は、電磁気学における電磁場や統計力学における位相空間など各種の場の方程式と数学的に似た構造となっている。

流体の運動は流体内のすべての点における速度、圧力、密度、温度、およびその他の熱力学的変数を、時間の関数として与えることによって完全に決定される。これらの諸変数を支配する基礎方程式系は、一般の物理現象と同様に、質量、運動量、およびエネルギーの保存則から導かれる：

- 質量の保存則  $\Rightarrow$  連続方程式
- 運動量の保存則  $\Rightarrow$  運動方程式
- エネルギーの保存則  $\Rightarrow$  エネルギー方程式
- 流体の特性を指定  $\Rightarrow$  状態方程式

流体の運動は、これらの方程式の適当な初期条件、境界条件のもとでの解として定まる。

流体の運動を各種の物理量と力学変数を用いて記述する場合、流体粒子の運動を時間的に追跡するラグランジュ記述と各時刻における流体の場全体の様子を見渡すオイラー記述とがある。

- 流体粒子：流体は粒子状ではなく連続体として空間に密に存在していると考えているが、流体とともに動く点を固定点と区別してこのように呼ぶ。

次節以降では、まず一般の連続体の基礎方程式系を導出する。それに続いて、ニュートン流体を考えて、その基礎方程式系を導出する。

## 1.2 オイラー座標系とラグランジュ座標系

空間をデカルト座標  $(x_1, x_2, x_3)$  で表す。これをオイラー座標系として参照する。 $x_i$  方向の単位ベクトルを  $\hat{e}_i$  とする。一方、ある時刻  $t = 0$  に連続体を見て、連続体の各粒子にその時の位置  $x_i(t = 0)$  でラベル  $X_i$  をつける。これをラグランジュ座標系として参照する。これらをまとめると、

| 座標系    | 独立変数   | 座標系間の関係                    |
|--------|--------|----------------------------|
| オイラー   | $x, t$ | $x = x(X, T), \quad t = T$ |
| ラグランジュ | $X, T$ | $X = X(x, t), \quad T = t$ |

ここで、座標系間の関係は、連続体の粒子  $X$  と時刻  $T$  を決めればその関数として位置  $x$  が決まり、他方、位置  $x$  と時刻  $t$  を決めればその関数としてそこにある連続体の粒子  $X$  が決まる、ということを示している。この様子を図 1.1 に示す。

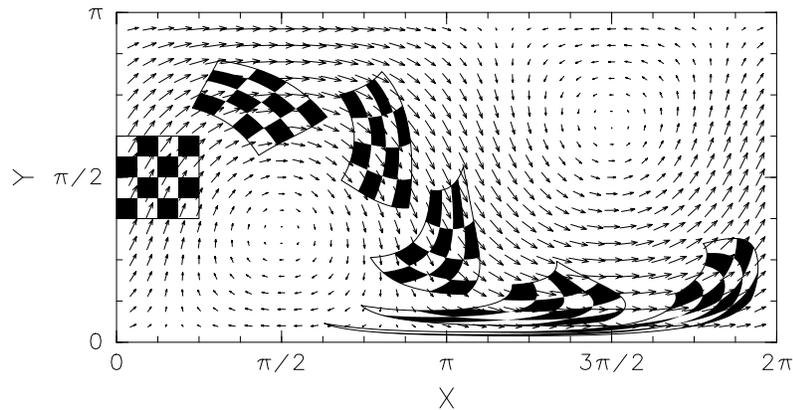


図 1.1: 定常な流れ場に於て初期に格子状に配色した流体が運動にともなって変形していく様子。ラグランジュ座標系では格子点が独立変数で、それが動いていった先の空間位置、およびその格子点の持つ物理量を従属変数として見る。一方、オイラー座標系では空間の位置が独立変数で、その位置に来ている格子点の持つ物理量を従属変数として見る。

2 つの座標系間の変換は次の変換行列、

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial T} & \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial T} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial T} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} dt & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix}^T = S \begin{pmatrix} dT & dX_1 & dX_2 & dX_3 \end{pmatrix}^T, \quad (1.2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T = (S^{-1})^T \left( \frac{\partial}{\partial T} \quad \frac{\partial}{\partial X_1} \quad \frac{\partial}{\partial X_2} \quad \frac{\partial}{\partial X_3} \right)^T, \quad (1.3)$$

および、これらの逆変換であらわされる。ここで、これらの座標変換が意味を持つためには、 $S$  が逆行列を持つこと、および  $x$  が  $X, T$  で、逆に  $X$  が  $x, t$  で微分可能なことが必要である。このことは、最初別の場所にあった連続体の粒子がある時刻に同じ場所を共有したり、同じ場所にあった連続体の粒子がある時刻に複数の場所にあるようなことは許されず、また最初にひとかたまりであった連続体が二つに分裂するようなことも許されないことを意味する。図 1.1 で見ると、このチェッカーフラッグが伸び縮みすることは許されるが、ちぎれたり重なったりすることを許していない。このことは連続体力学の根本に関わる問題なので何時も心に留めておく必要がある。

次に、速度と加速度を定義する。連続体の粒子の速度  $\mathbf{u} = u_i \hat{e}_i$  は、ラグランジュ座標系で記述して、

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, T) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, T)}{\partial T}, \quad (1.4)$$

で与えられる。この  $\hat{e}_i$  成分は、

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial T}, \quad (1.5)$$

である。ここで、 $\hat{e}_i$  はデカルト座標での単位ベクトルだからその微分は 0 である。同様に、連続体の粒子の加速度  $\mathbf{a} = a_i \hat{e}_i$  は、

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, T) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, T)}{\partial T^2}, \quad (1.6)$$

$$a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial T^2}, \quad (1.7)$$

で与えられる。

一方、これらをオイラー座標系で記述するときには、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{a}$  をその時刻その位置にある連続体の粒子の速度 (1.4) および加速度 (1.6) を使ってオイラー座標の関数とみる：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), T = t), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), T = t). \quad (1.9)$$

一般に、ラグランジュ座標系での時間微分はオイラー座標系での時間微分と一致しない。座標変換 (1.3) で変換行列  $S$  の第 1 列を速度 (1.4) で表現すると、各座標系での時間微分を変換できて、

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.10)$$

と書けることがわかる。ここで、最右辺は総和規約に基づく表記法で、同じ項において空間座標の指標が繰り返されるときは、その指標について 1 から 3 までの総和をとるものとする。以下では、慣例に従って  $\partial/\partial T$  をラグランジュ微分と呼び、 $D/Dt$  と表記する。一方、 $\partial/\partial t$  はオイラー微分と呼ぶ。また、右辺第 2 項は移流項と呼ぶ。

勾配の微分演算子を

$$\text{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (1.11)$$

で表すと、式 (1.10) は、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}), \quad (1.12)$$

となる。ここで、ベクトル量のラグランジュ微分を考えるとときには、 $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})$  のところで注意が必要である。すなわち、直角座標系ならばこれをスカラー積とみなしてもよいが、直交曲線座標系の場合には、単位ベクトル  $\hat{e}_i$  が場所によって方向を変えるので、その勾配も考えなければいけない。この場合、ベクトル量の各成分については上の関係式が成り立たない。次のベクトル不変形にしておくといふ：

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) + \text{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{A} + \text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{u} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{A}) + \mathbf{u} \text{div} \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{div} \mathbf{u} \}. \quad (1.13)$$

ただし、 $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  は、それぞれ発散、回転の微分演算子である。すなわち、 $\text{div} \mathbf{A}$  は、任意のベクトル  $\mathbf{A}$  に対して勾配ベクトル (1.11) を内積の形に作用させたものであり、 $\text{rot} \mathbf{A}$  はベクトル積の形で作用させたものである：

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{A} = \text{grad} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \\ \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \end{cases} \quad (1.14)$$

### 1.3 保存則

それぞれの保存量に対して保存則をある領域で適用することにより各支配方程式を導くことができる。そのような導出法をとる教科書もあるが、ここでは一般的な保存則の形を最初に示し、個々の保存則はそれから導くことにする。

#### 1.3.1 一般的な保存則 (その 1)

基本的に物理の法則は、単位質量あたりの場の量  $f(\mathbf{x}, t)$  の粒子を追いかけた時間微分、すなわちラグランジュ微分  $D/Dt$  に対する保存で書かれる。ここで、空間内である面  $S$  に囲まれた体積を  $V(S)$  として、この閉曲面内での保存則を考える。連続体の密度を  $\rho$ ,  $f$  の生成・消滅する量を  $\psi$ , 流入・流出する量 (フラックス) を  $\mathbf{A}$  として、

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \int_V \psi \rho dV + \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.15)$$

である。ここで、体積  $V$  の体積要素を  $dV$ , 面  $S$  の面要素を  $dS$ , 外向き法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とした。いま、積分領域はラグランジュ座標で固定した領域にとっている。つまり、面  $S$  は連続体とともに動く面であるので、連続体自身の流入に伴う保存量の流入を考える必要がない。ガウスの発散定理を用いると、式 (1.15) は、

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \int_V \psi \rho dV + \int_V \text{div} \mathbf{A} dV, \quad (1.16)$$

となる。ここで、 $\text{div}$  は発散の微分演算子であり、ガウスの発散定理とは、

$$\int_V \text{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.17)$$

というベクトル関係式である。

ここで、積分変数もラグランジュ座標に変換する。式 (1.16) の左辺は、

$$\frac{D}{Dt} \int_V f \rho dV = \frac{D}{Dt} \int_V f \rho d^3 x = \frac{D}{Dt} \int_V f \rho J d^3 X = \int_V \frac{D}{Dt} (f \rho J) d^3 X, \quad (1.18)$$

となる。ここで、 $J$  はヤコビ行列式、

$$J = \left| \frac{\partial(x_i)}{\partial(X_j)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

である。また、積分領域はラグランジュ座標で固定した領域だったので、微分と積分の順序の入れ替えが可能となっている。同様に式 (1.16) の右辺の 2 項も変換できるので、結局、

$$\int_V \frac{D}{Dt}(f\rho J)d^3X = \int_V \psi\rho Jd^3X + \int_V \operatorname{div} \mathbf{A}Jd^3X, \quad (1.20)$$

となる。ここで、体積  $V$  は任意にとれるので、最終的に

$$\frac{D}{Dt}(f\rho J) = \psi\rho J + \operatorname{div} \mathbf{A}J, \quad (1.21)$$

を得る。

### 1.3.2 質量保存則

質量の保存則については、式 (1.21) で  $f = 1$  とすると得られる。質量が生成・消滅することはないので  $\psi = 0$  である。また、面  $S$  はラグランジュ座標で固定しているの、面  $S$  を通しての質量の流出入はなく  $\mathbf{A} = 0$  である。したがって、

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0, \quad (1.22)$$

となる。これは、ラグランジュ記述による連続体の質量保存則を表しており、ラグランジュの連続方程式と呼ばれる。

ここで、

$$\frac{D\rho}{Dt}J + \rho \frac{DJ}{Dt} = 0, \quad (1.23)$$

とし、両辺を  $J$  で割って、さらに次の関係式、

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{DJ}{Dt} &= \frac{\frac{\partial(u_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}}{\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}} + \frac{\frac{\partial(x_1, u_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}}{\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}} + \frac{\frac{\partial(x_1, x_2, u_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}}{\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

を使うと、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.25)$$

を得る。さらに、式 (1.12) および次のベクトル関係式、

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \rho, \quad (1.26)$$

を使うと、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.27)$$

を得る. 式 (1.25) または (1.27) は, オイラー記述による連続体の質量保存則を表しており, オイラーの連続方程式と呼ばれる.

一般に, 式 (1.25) のような表現をラグランジュ形式, 式 (1.27) のような表現をフラックス形式という. ラグランジュ形式は, 物理量の時間変化をラグランジュ微分により表現するものであり, フラックス形式は, 物理量の時間変化を空間に固定した微小体積への流入・流出により表現するものである. 式 (1.27) の場合,  $F_\rho \equiv \rho u$  を質量フラックス (ベクトル) として, その収束発散  $\text{div} F_\rho$  が単位体積あたりの質量の局所時間変化をもたらすことを表している.

ここで, 圧縮率および熱膨張率がゼロの抽象化した流体, 非圧縮性流体を考えてみよう. 密度は運動によって変化しないから,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

であり, 非圧縮性流体の連続方程式は, (1.25) より次のように簡単化される:

$$\text{div} \mathbf{u} = 0.$$

### 1.3.3 一般的な保存則 (その 2)

一般的な保存則に戻る. 前小節のラグランジュの連続方程式 (1.22) を使うと,

$$\frac{D}{Dt}(f\rho J) = \frac{Df}{Dt}\rho J + f\frac{D(\rho J)}{Dt} = \frac{Df}{Dt}\rho J, \quad (1.28)$$

となるので, これを式 (1.21) に代入し, 両辺を  $J$  で割って,

$$\rho \frac{Df}{Dt} = \rho\psi + \text{div} \mathbf{A} = \rho\psi + \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \quad (1.29)$$

となる. これが一般的な保存則の表式である. 記号の意味を再掲すると,  $f(x, t)$ : 単位質量あたりの場の量,  $\rho$ : 連続体の密度,  $\psi$ :  $f$  の生成・消滅量,  $\mathbf{A}$ :  $f$  のフラックス, である.

### 1.3.4 運動量保存則

一般的な保存則 (1.29) において  $f = \mathbf{u}$  とおくと,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{f} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial x_j}, \quad (1.30)$$

となる. この  $\hat{e}_i$  成分は,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.31)$$

である. ここで  $f_i$  は  $\hat{e}_i$  方向の運動量の単位質量当たりの生成量,  $\sigma_{ij}$  はその  $\hat{e}_j$  方向の流出入量を表している. これが連続体の運動方程式である. コーシーの第 1 運動法則と呼ばれることもある. しかし, 圧力傾度の項は右辺第 2 項に埋まっており, まだ見慣れた流体の運動方程式にはなっていない. ところで, ニュートンの第 2 法則によれば運動量の時間変化は加えられた力に等しいので, 上で見た運動量の生成とは単位質量当たりの体積力であり, 運動量の流出入とは面  $S$  を通して周囲の連続体から加えられる面積力である. つまり,  $\sigma_{ij}$  は応力テンソルと呼ばれるものである.

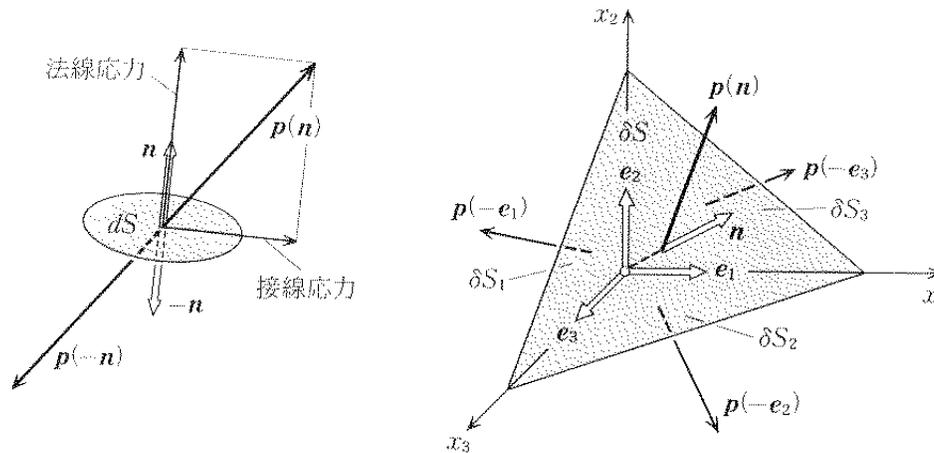


図 1.2: 応力の説明図 (巽, 1995 p.23 より). (左) 面要素と応力, (右) 応力の釣合い.

応力テンソル  $\sigma_{ij}$  は,  $\hat{e}_j$  に垂直な面に働く応力の  $\hat{e}_i$  方向の成分を表す (図 1.2 参照). したがって, その対角成分  $\sigma_{ii}$  は,  $\hat{e}_i$  に垂直な面に働く法線応力を表し, 非対角成分  $\sigma_{ij} (i \neq j)$  は,  $\hat{e}_j$  に垂直な面に働く接線応力を表す. 法線応力が正 ( $\sigma_{ii} > 0$ ) のとき, これは面を引っ張る方向に作用するので, 張力と呼ばれ, 一方, 負 ( $\sigma_{ii} < 0$ ) のときは, 面を圧する方向に作用するので, 圧力と呼ばれる.

運動方程式 (1.31) はまた, 連続方程式 (1.27) に  $u_i$  をかけた方程式を加えて, ベクトル関係式  $\rho \mathbf{u} \cdot \text{grad} u_i + u_i \text{div}(\rho \mathbf{u}) = \text{div}(u_i \rho \mathbf{u}) = \partial(\rho u_i u_j) / \partial x_j$  を使うと,

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1.32}$$

と, フラックス形式に書ける.

運動方程式 (1.31) または (1.32) は, 連続方程式 (1.25) または (1.27) とともに, 連続体の力学の基礎方程式を構成している. しかし, これらの方程式だけでは, 未知変数である密度  $\rho$ , 速度  $\mathbf{u}$ , および応力テンソル  $\sigma_{ij}$  を決定するには不十分である. 方程式系を閉じるには, 応力テンソルを連続体の運動と関係づけることが必要である.

### 1.3.5 角運動量保存則

ここで, 角運動量の保存則を考えることにより, 応力テンソル  $\sigma_{ij}$  が対称テンソルであることを示すことにする. 一般的な保存則 (1.29) において  $\mathbf{f} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$  とおくと,

$$\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \rho \mathbf{N} + \frac{\partial M_l}{\partial x_l} \tag{1.33}$$

となる. ここで,  $\mathbf{N}$  は単位体積当たりの角運動量の生成,  $M_l$  は角運動量の流出入を表している.

いま, 体積力, 面積力に伴うトルク以外の内部トルクはないと仮定 (電磁流体の場合には, 場そのものと角運

動量をやりとりするためこの仮定は満たされない) すると,  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{M}_l = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_l$  となるので,

$$\underbrace{\rho \frac{D}{Dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{u})}_A = \underbrace{\rho \mathbf{r} \times \mathbf{f}}_B + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_l)}_C, \quad (1.34)$$

となる. 右辺第 2 項が  $\mathbf{r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_l}{\partial x_l}$  にならずこのようになるのは, 領域  $V$  での保存則 (1.15) に戻って考えればよい. 対応する項は,

$$\int_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_l) \hat{e}_l \cdot \mathbf{n} dS,$$

と書け, これにガウスの発散定理を使うと,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_l) d^3x$$

となる. あとは一般的な保存則を導出したときと同様に, 積分変数をラグランジュ座標に変換し, 積分領域の任意性から積分をはずして  $J$  で割れば,

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_l)$$

が面積力によるトルクとなることがわかる.

式 (1.34) の各項を次のように変形していく:

$$A = \rho \left( \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \times \mathbf{u} + \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) = \rho \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \quad (1.35)$$

$$B = \mathbf{r} \times \left( \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_l}{\partial x_l} \right) = \rho \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \hat{e}_i, \quad (1.36)$$

$$C = \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} \hat{e}_i) = \epsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} \hat{e}_i + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \hat{e}_i. \quad (1.37)$$

ここで,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ,  $\epsilon_{ijk}$  は置換記号であり, それぞれ次のように定義される:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

(このような表記を使うと, 二つのベクトル  $\mathbf{A} = A_j \hat{e}_j$ ,  $\mathbf{B} = B_k \hat{e}_k$  のベクトル積が,  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_j B_k \hat{e}_j \times \hat{e}_k = A_j B_k \epsilon_{ijk} \hat{e}_i$  と書けるので, 上のような計算が簡便にできる.) これらを式 (1.34) に代入して整理すると,

$$\epsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \hat{e}_i = 0, \quad (1.38)$$

となり, 結局,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (1.39)$$

を得る. すなわち, 内部トルクがないときには応力テンソルが対称であることを示せたわけである. これをコーシーの第 2 運動法則と呼ぶことがある.

### 1.3.6 エネルギー保存則

今度は、全エネルギーの保存則を考える。一般的な保存則 (1.29) において、単位質量あたりの全エネルギーは運動エネルギー  $\frac{1}{2}u_i u_i$  と内部エネルギー  $e$  の和である (電極場のエネルギーは含めない) ことを考慮して、

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i + e \right) = \rho P + \frac{\partial J_j}{\partial x_j}, \quad (1.40)$$

となる。ここで、 $P$  はエネルギーの生成、 $J_j$  はエネルギーの流入を表している。エネルギーは、力による仕事、加熱、および熱流により供給されるので、 $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + Q = f_i u_i + Q$ 、 $J_j = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j - K_j = u_i \sigma_{ij} - K_j$  と書ける。すなわち、 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  は体積力による仕事、 $Q$  は加熱に関する項であり、 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j$  は面積力による仕事、 $K_j$  は熱流に関する項である。したがって、

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i + e \right) = \rho f_i u_i + \rho Q + \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial K_j}{\partial x_j}, \quad (1.41)$$

を得る。これが、全エネルギー方程式である。

一方、運動方程式 (1.31) に  $u_i$  をかけて  $i$  でたしあわせると、

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right) &= \rho f_i u_i + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ &= \rho f_i u_i + \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

を得る。これが運動エネルギー方程式であり、右辺第 1,2 項は全エネルギー方程式 (1.41) でみたとおりである。右辺第 3 項は説明を要するが、あとでわかるように、運動エネルギーから内部 (熱) エネルギーに変換される部分、および体積変化による仕事である。

結局、全エネルギー方程式 (1.41) から運動エネルギー方程式 (1.42) を引いて、次の内部エネルギー方程式を得る：

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial K_j}{\partial x_j} + \rho Q. \quad (1.43)$$

### 1.3.7 連続体の基礎方程式系

結局、質量保存則から導かれた連続方程式 (1.25)、運動量保存則から導かれた運動方程式 (1.30)、エネルギー保存則から導かれた内部エネルギー方程式 (1.43)、および角運動量保存則から導かれたコーシーの第 2 運動法則 (つまり応力テンソルに対する制限) (1.39) が、連続体に対する基礎方程式系となる。ここで、もう一度これらをまとめて書いておく：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.44)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial x_j}, \quad (1.45)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} - \operatorname{div} \mathbf{K} + \rho Q, \quad (1.46)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.47)$$

## 1.4 ニュートン流体

前節で連続体の基礎方程式系を導出したが、応力テンソル  $\sigma_{ij}$  や熱流ベクトル  $K$  といった量はまだ未知のパラメータである。これらの特性は、一般に分子運動あるいは乱流混合に基づき議論される。この節ではこれらの量に条件を課し、方程式を変形する。これにより連続体あるいは流体の性質を特定することになる。

### 1.4.1 熱流の等方性

まず、熱流ベクトルに関して、

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\rho, e, \frac{\partial e}{\partial x_i}), \quad (1.48)$$

と仮定し、 $\partial e / \partial x_i$  についてテイラー展開して、その 1 次の項までをとる：

$$K_j = K_j(\rho, e, 0) + A_{ij}(\rho, e) \frac{\partial e}{\partial x_i}. \quad (1.49)$$

ここで、温度勾配がない時は熱フラックスがないとして  $K_i(\rho, e, 0) = 0$  とする。さらに、熱流の等方性を仮定すると、

$$A_{ij} = -k(\rho, e) \delta_{ij}, \quad (1.50)$$

でなければならないことが示される。結局、

$$K_j = -k(\rho, e) \frac{\partial e}{\partial x_j}, \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{K} = -k(\rho, e) \text{grad } e, \quad (1.51)$$

となる。これは熱伝導法則で、 $k(\rho, e)$  が伝導率である。

### 1.4.2 ニュートン流体

応力テンソル  $\sigma_{ij}$  についても同様に、

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, e, \frac{\partial u_k}{\partial x_l}), \quad (1.52)$$

と仮定し、テイラー展開してやはり 1 次の項までとると、

$$\sigma_{ij} = B_{ij}(\rho, e) + C_{ijkl}(\rho, e) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (1.53)$$

を得る。ここで、 $B_{ij}$  と  $C_{ijkl}$  はそれぞれ 2 階と 4 階の定数テンソルで、静止状態における応力および運動によって引き起こされる応力を表している。このように、 $\sigma_{ij}$  が  $\partial u_k / \partial x_l$  の 1 次の項までの展開で書けるような流体をニュートン流体と呼ぶ。(Lindzen(1990) では、ニュートン流体の定義は  $\sigma_{ij}$  が  $\rho, e, \partial u_k / \partial x_l$  の関数で書けることとなっている。また、巽(1982, 1995) では、応力テンソル  $\sigma_{ij}$  が 歪み速度テンソル  $(\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) / 2$  の 1 次関数として表される流体をニュートン流体と呼んでいる。)

また、等方な物質を仮定すると  $B_{ij}$  と  $C_{ijkl}$  が等方テンソルでなければならない、

$$B_{ij} = -p(\rho, e) \delta_{ij}, \quad (1.54)$$

$$C_{ijkl} = \lambda(\rho, e) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\rho, e) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \nu(\rho, e) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (1.55)$$

と書ける。ここで、 $C_{ijkl}$  の第 2 項 ( $\mu$  のかかった項) と第 3 項 ( $\nu$  のかかった項) はそれぞれ  $i, j$  に関して対称および半対称で分けている。応力テンソルの対称性 (1.39) により、 $\nu = 0$  であることが要求される。これ

は、一般に線型等方弾性体に成り立つ関係である。  $\lambda$  と  $\mu$  を実定数としたときこれらをラメの弾性定数という。

結局、ニュートン流体の応力テンソルは、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (1.56)$$

となる。ここで、 $p$  が流体の圧力である。  $\lambda$  と  $\mu$  は流体の変形に対する抵抗すなわち粘性を表す定数で、 $\mu$  をずれ粘性率または単に粘性率といい、 $\lambda$  を第 2 粘性率という。また、これら右辺の第 2 項と第 3 項を合わせて  $\tau_{ij}$  と表記し、粘性応力テンソルという。

さらに流体の性質を限定する方法がいくつかある。まず、粘性応力テンソルが全くない、すなわち  $\lambda = \mu = 0$  の場合には、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.57)$$

となる。つまり、応力テンソルは圧力を成分とする対角テンソルとなり、いわゆる完全流体の表式となる。完全流体を非粘性流体ともいう。この場合、流体は境界面に対して接線応力を及ぼさないから、逆に境界面から流れに逆らう抵抗を受けることもない。

応力テンソル (1.56) の対角和をとれば、

$$\sigma_{ii} = 3\left\{-p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\operatorname{div}\mathbf{u}\right\} = 3(-p + \chi\operatorname{div}\mathbf{u}), \quad (1.58)$$

となる。  $\chi = \lambda + 2\mu/3$  は流体の体積変化に対する抵抗を表す定数である。これを体積粘性率という。ここで、法線応力の平均が  $-p$  に等しい場合には、

$$\chi = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0, \quad (1.59)$$

となる。これはストークスの関係と呼ばれ、球形の分子の場合にはこの関係が導かれる。

また、非圧縮流体の場合には、連続方程式 (1.25) より  $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$  であるので、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (1.60)$$

となり、第 2 粘性率  $\lambda$  は関与しなくなる。

### 1.4.3 ナビエ-ストークスの運動方程式

前小節の続きとして、最後に、 $\lambda, \mu$  が定数の場合を考える。運動方程式 (1.31) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right), \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta u_i, \end{aligned} \quad (1.61)$$

となる。結局、ニュートン流体で粘性が等方的に働き、 $\lambda, \mu$  が定数であると仮定すると、運動方程式 (1.30) は、両辺を  $\rho$  で割って、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p + \frac{1}{\rho}(\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{u}, \quad (1.62)$$

となる。これがよく見かける粘性流体の運動方程式で、ナビエ-ストークス方程式と呼ばれる。右辺第 1 項は重力などの体積力、第 2 項が圧力傾度力、第 3, 4 項が粘性項である。時には、右辺第 3 項をゼロ ( $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ) とし動粘性率 (新たに  $\nu = \mu/\rho$  とする) を用いた場合の表式を、ナビエ-ストークス方程式と呼ぶこともある。ここで、粘性率  $\lambda = \mu = 0$  とおけば、当然のことながら、完全流体の運動方程式 (オイラー方程式) が得られる。

## 1.5 ニュートン流体のエネルギー方程式と状態方程式

前節で得た運動方程式 (1.62) は、連続方程式 (1.25) または (1.27) とともに、流体の運動を支配する流体の基礎方程式を構成するが、これらの方程式だけでは閉じていない。これらが 1 個のベクトル方程式と 1 個のスカラー方程式であるのに対して、未知変数は 1 個のベクトル  $\mathbf{u}$  と 2 個のスカラー  $\rho, p$  であるからである。流体の運動を決定するには、密度や圧力などの熱力学的変数を支配する物理法則が必要となる。

このためにエネルギー保存則を用いるのが最も一般的であるが、すでに見たように、内部エネルギー方程式 (1.43) は内部エネルギー  $e$  を新たな変数として含んでいる。基礎方程式系を閉じさせるためには、これらの変数を支配するさらに新たな関係式が必要となる。そこで、流体の熱力学的平衡を仮定するのが普通である。熱力学的変数を支配する何らかの状態方程式を用いることになる。

### 1.5.1 ニュートン流体のエネルギー方程式

内部エネルギー方程式 (1.43) の右辺第 1 項は、応力テンソルを含む項であった。この項は、ニュートン流体の場合には式 (1.56) を用いて、

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \Phi, \quad (1.63)$$

と書ける。ここで、 $\Phi \equiv \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  であり、粘性により運動エネルギーから熱エネルギーに変換される部分を表している。 $\Phi > 0$  のための必要十分条件は、 $\mu > 0, \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$  であることが示される。

結局、ニュートン流体の内部エネルギー方程式は、

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} e) + \rho Q + \Phi, \quad (1.64)$$

となる。これは運動する流体粒子に適用した熱力学の第 1 法則にほかならない。すなわち、(内部エネルギーの時間変化) + (流体による仕事率) = (熱拡散) + (加熱率) + (粘性による変換率) である。左辺第 2 項は熱エネルギーと運動エネルギーのマクロな変換項であり、右辺第 3 項はミクロな変換項である。

ところで、内部エネルギー  $e$  はふつう温度  $T$  の形で測定される。常温では  $e$  と  $T$  の間には比例関係があり、定積比熱を  $c_v$  とし  $e = c_v T$  と書ける。これを使って式 (1.64) を書きなおすと、

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(k' \operatorname{grad} T) + \rho Q + \Phi, \quad (1.65)$$

となる。ただし、 $k' = c_v k$  である。

これまで、熱力学的状態変数として内部エネルギー  $e$  や温度  $T$  を用いてきたが、式 (1.64), (1.65) で、これらはラグランジュ的な保存量となっていない。すなわち、右辺を 0 としても、 $De/Dt = 0, DT/Dt = 0$  とな

らない。ここで、熱力学の変数としてエントロピーを用いると、内部エネルギー方程式はラグランジュ的保存形で書ける。熱力学の第1法則はエントロピー  $s$  を用いて、

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v dT - \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (1.66)$$

と変形できるので、内部エネルギー方程式 (1.65) の左辺は次のように変形できる：

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho T \frac{Ds}{Dt}. \quad (1.67)$$

ここで、連続方程式 (1.25) を用いている。結局、内部エネルギー方程式は、次のエントロピー  $s$  のラグランジュ的保存をあらわす形に変形できる：

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho T} \{ \operatorname{div}(k' \operatorname{grad} T) + \rho Q + \Phi \}. \quad (1.68)$$

ここで、適当な状態方程式を用いると  $T = T(\rho, s)$  と書くことができるので、エントロピー  $s$  に対する内部エネルギー方程式が得られたことになる。

### 1.5.2 状態方程式

最後に、 $\rho, e (= c_v T)$  の関数である  $p$  について考える。熱力学によれば、平衡状態をあらわす独立な状態変数は2つであることが知られている。したがって、熱力学の圧力  $p$ 、内部エネルギー  $T$ 、密度  $\rho$  の3つの物理量は独立ではなく、それらを結び付ける方程式、

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad (1.69)$$

が存在する。これが状態方程式で、流体の性質に合わせて選択されるべき方程式である。ここで、熱力学の圧力とこれまでに定義した流体の圧力が一致することは自明ではないが、通常範囲内では一致する (巽, 1982, p.42-43)。

ここで、いくつかの流体について、状態方程式の具体的な形をあげておく：

$$\text{理想気体} : p = \rho RT, \quad (1.70)$$

$$\text{ブシネスク流体} : \rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \quad (1.71)$$

$$\text{非圧縮性流体} : d\rho = 0. \quad (1.72)$$

$R$  は理想気体の気体定数である。ブシネスク流体とは、ほとんど非圧縮な流体であるが、浮力項でのみ密度変化を考慮する仮想的な流体である。密度は温度の線型関数であるとし、体積膨張率を  $\alpha$  とする。

### 1.5.3 エントロピーと温位

エントロピー  $s$  のラグランジュ的保存則 (1.68) は、 $k = \text{一定} (= \kappa)$ ,  $\Phi = 0$  の場合、

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\kappa c_v \Delta T + Q), \quad (1.73)$$

と書ける。ここで、大気を念頭において理想気体を考えることにする。式 (1.67) と状態方程式 (1.70) より、

$$\begin{aligned} \frac{Ds}{Dt} &= \frac{c_v}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{c_v}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{\rho} \left( \frac{1}{RT} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\rho}{T} \frac{DT}{Dt} \right) \\ &= \frac{c_v + R}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{p} \frac{Dp}{Dt} = c_p \frac{D \ln T}{Dt} - R \frac{D \ln p}{Dt}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

と書ける. ただし,  $c_p = c_v + R$  は定圧比熱である.

ここで, 圧力  $p$ , 温度  $T$  の気塊を, 断熱的 ( $Ds/Dt = 0$ ) に標準気圧  $p_s$  のもとに置くことを考えて, そのときの温度  $\theta$  を温位 (あるいは, ポテンシャル温度) という. すなわち,  $c_p \ln T - R \ln p = c_p \ln \theta - R \ln p_s$  より, 温位は

$$\theta = T \left( \frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad (1.75)$$

で与えられる.

$ds = c_p d(\ln \theta)$  より, エネルギー方程式 (1.73) は温位を用いて次のように書ける:

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = \frac{1}{c_p T} (\kappa c_v \Delta T + Q). \quad (1.76)$$

定義より当然のことであるが, エントロピーと同様に温位  $\theta$  もラグランジュ的な保存量である.

## 1.6 流体力学の基礎方程式系 (まとめ)

ニュートン流体の運動を支配する基礎方程式系は次である:

- 連続方程式: 式 (1.25)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.77)$$

- 運動方程式 (ナビエ-ストークス方程式): 式 (1.62)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}, \quad (1.78)$$

- 内部エネルギー方程式: 式 (1.68)

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho T} \{ \operatorname{div}(k' \operatorname{grad} T) + \rho Q + \Phi \}, \quad (1.79)$$

- 状態方程式: 式 (1.69)

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad (\text{および, } T = T(\rho, s)). \quad (1.80)$$

ここで, 未知変数は, 速度  $\mathbf{u}$ , 圧力  $p$ , 密度  $\rho$ , エントロピー  $s$  (および温度  $T$ ) である.

これらは, ラグランジュ形式の表現であるが, 連続方程式を用いてフラックス形式に変換することも可能である.

## 1.7 流れの場と境界条件

### 1.7.1 座標系と境界条件・初期条件

一般に, 具体的に考える流れの場に応じて, それに適した座標系を用いる. 直交直線座標または直交曲線座標を使うのが普通である. 後者には, 平面極座標, 円柱座標, 球座標などがある. 直交曲線座標では, 勾配  $\operatorname{grad}$ , 発散  $\operatorname{div}$ , 回転  $\operatorname{rot}$ , ラプラシアン  $\Delta$ , などの微分演算子の表現に注意がいる (第 1.7.2 節参照).

流体の運動が基礎方程式の解として決定されるためには、流体領域の境界面において適当な境界条件が指定されなければならない。具体的な境界としては、固体境界面や、ある長さ毎の周期性を仮定した周期境界、また、無限遠方などを考えることが多い。

非定常な場合には、時間軸上での境界条件、初期条件もあわせて指定されなければならない。基礎方程式は時間に関して1階微分を含むだけであるから、初期条件としては、ある時刻での流れの場を表すのに必要な諸物理量を空間座標  $r$  の関数として与えればよい。

## 1.7.2 直交曲線座標の諸公式

(1) 円柱座標： $(r, \varphi, z)$

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.81)$$

$$\text{grad}\Phi = e_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + e_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1.82)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (1.83)$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = e_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + e_\varphi \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + e_z \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right\}, \quad (1.84)$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} &= \text{grad div}\mathbf{A} - \text{rot rot}\mathbf{A} \\ &= e_r \left( \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + e_\varphi \left( \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) + e_z \Delta A_z. \end{aligned} \quad (1.86)$$

ナビエ-ストークス方程式：

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu(\Delta\mathbf{u})_r + K_r, \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_\varphi + \frac{u_r u_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu(\Delta\mathbf{u})_\varphi + K_\varphi, \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu(\Delta\mathbf{u})_z + K_z. \quad (1.89)$$

(2) 球座標 (緯度経度座標)： $(\lambda, \phi, r)$

$$\nabla = e_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + e_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + e_r \frac{\partial}{\partial r}, \quad (1.90)$$

$$\text{grad}\Phi = e_\lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + e_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + e_r \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1.91)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos \phi A_\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r), \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{A} &= e_\lambda \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) \right\} + e_\phi \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\lambda) - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} \right\} \\ &\quad + e_r \frac{1}{r \cos \phi} \left\{ \frac{\partial A_\phi}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos \phi A_\lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &= \mathbf{e}_\lambda \left( \Delta A_\lambda - \frac{A_\lambda}{r^2 \cos^2 \phi} - \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial A_\phi}{\partial \lambda} + \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} \right) \\ &+ \mathbf{e}_\phi \left( \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \cos^2 \phi} + \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \\ &+ \mathbf{e}_r \left( \Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial \cos \phi A_\phi}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (1.95)$$

ナビエ-ストークス方程式：

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\lambda - \frac{u_\lambda u_\phi \tan \phi}{r} + \frac{u_\lambda u_r}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu (\Delta \mathbf{u})_\lambda + K_\lambda, \quad (1.96)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi + \frac{u_\lambda^2 \tan \phi}{r} + \frac{u_\phi u_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu (\Delta \mathbf{u})_\phi + K_\phi, \quad (1.97)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\lambda^2 + u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu (\Delta \mathbf{u})_r + K_r. \quad (1.98)$$

## 参考文献

Cushman-Roisin, B., 1994: *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*, Prentice-Hall, 320pp.

今井 功, 1973: 「流体力学 (前編)」, 裳華房, 428pp.

Lindzen, R.S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 310.

松井 孝典・他, 1996: 「地球連続体力学」(岩波講座 地球惑星科学 6), 岩波書店, 319pp.

巽 友正, 1982: 「流体力学」, 培風館, 453pp.

巽 友正, 1995: 「連続体の力学」, 岩波書店, 334pp.

## 第2章 気象力学の基礎方程式

惑星大気の運動を念頭に置いて、回転球面上で重力場のなかに置かれた流体の運動を考える。地球流体力学に共通するが、系が回転していることと重力場のなかの流体運動であることが、一般の流体力学と比べて気象力学の特徴となっている。

まず、回転する直交直線座標系で質点の運動を記述する方程式を導出して、コリオリ力や遠心力を定義する。次に、回転球面上での運動方程式を考える。伝統的な近似により、球面上の浅い流体の運動方程式を導出し、さらに大規模な大気運動を念頭においたスケール解析により、プリミティブ方程式系、準地衡方程式系を導出する。

### 2.1 回転する直交直線座標系での運動方程式

#### 2.1.1 回転直交直線座標系での質点の運動

静止している直交直線座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  とそれに対して一定の角速度  $\Omega$  で回転する直交直線座標系  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  を考える。  $x_i$  方向の単位ベクトルを  $\hat{e}_i$  とし、  $x'_i$  方向の単位ベクトルを  $\hat{e}'_i$  とする。後者は  $\Omega$  で回転しているので、

$$\frac{d}{dt}\hat{e}'_i = \Omega \times \hat{e}'_i, \quad (2.1)$$

である。

回転座標系では基底ベクトルが時々刻々向きを変えているので、この時間依存する座標系への座標変換では、時間微分を含む項をちゃんと考えておく必要がある。すなわち、速度や加速度の項である。質点の位置ベクトルを  $x$  とし、両座標系で表示すると、

$$x = x_i \hat{e}_i = x'_i \hat{e}'_i, \quad (2.2)$$

である。速度  $u$  は  $x$  の時間微分であるから、

$$\begin{aligned} u &= \frac{d}{dt}x = \frac{dx_i}{dt}\hat{e}_i, \\ &= \frac{dx'_i}{dt}\hat{e}'_i + x'_i \frac{d\hat{e}'_i}{dt}, \\ &= \frac{dx'_i}{dt}\hat{e}'_i + x'_i \Omega \times \hat{e}'_i, \\ &= u' + \Omega \times x', \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ここで、  $u' = u'_i \hat{e}'_i = \frac{dx'_i}{dt}\hat{e}'_i$  は、回転系から見た速度、相対速度である。

加速度は速度をさらに時間微分したもののなので,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \mathbf{u} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_i, \\
 &= \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}'_i + 2 \frac{dx'_i}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_i}{dt} + x'_i \frac{d^2 \hat{\mathbf{e}}'_i}{dt^2}, \\
 &= \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}'_i + 2 \frac{dx'_i}{dt} \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_i + x'_i \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_i, \\
 &= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}',
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる. ここで,  $\mathbf{a}' = a'_i \hat{\mathbf{e}}'_i = \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}'_i$  は, 回転系から見た加速度, 相対加速度である.

単位質量に働く外力を  $\mathbf{f}$  として, それぞれの座標系での運動方程式は,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}, \tag{2.5}$$

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \mathbf{f}' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}', \tag{2.6}$$

となる. 回転座標系は非慣性系であり, この系で運動量保存則を表すには (2.6) 式の右辺の第 2 項と第 3 項が必要である. 第 2 項はコリオリ力と呼ばれ, 第 3 項は遠心力と呼ばれる. これらは静止座標系 (慣性系) から回転座標系 (非慣性系) に変換することにより現れる項であり, みかけの力と呼ばれる. コリオリ力は相対速度の大きさ  $|\mathbf{u}'|$  に比例し, 相対速度と直交する. 遠心力は回転軸からの距離  $|\mathbf{x}'|$  に比例し,  $\mathbf{x}'$  の向きである.

これらの力を回転軸に直交する平面内での運動に対して具体的に考えてみよう.  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ ,  $\mathbf{x}' = (x', y', 0)$ ,  $\mathbf{u}' = (u', v', 0)$  で,  $\Omega > 0$  (反時計回り) とする. 地球のイメージでは北極点での接平面である. コリオリ力は  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}'$  であり, 運動方向  $\mathbf{u}'$  に対して 90 度右向きに働く. 一方, 南極点のイメージで  $\Omega < 0$  (時計回り) の回転とすると, コリオリ力は相対速度に対して 90 度左向きに働く. 遠心力は  $-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}'$  であり, つねに回転軸から外向きに働く.

回転座標系では運動量保存の式に 2 つのみかけの力が加わったのだから, この系でエネルギー保存や角運動量保存を考えるといくつかの付加項が出てくる. 運動方程式 (2.6) の両辺で  $\mathbf{u}'$  との内積をとると, 運動エネルギー方程式が得られる:

$$\frac{d}{dt} \frac{|\mathbf{u}'|^2}{2} = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}' - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}') \cdot \mathbf{u}'. \tag{2.7}$$

ここで, コリオリ力の項が落ちたのは, コリオリ力が相対速度と直交しているからである. 右辺第 2 項はポテンシャルエネルギーとの変換項と類似した形で, 回転軸に向かう運動か外向きの運動かで符号が変わる. また,  $\mathbf{x}' \times (2.6)$  として角運動量の式を求めると,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}' \times \mathbf{u}') = \mathbf{x}' \times \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \mathbf{x}' \times \mathbf{f}' - 2\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}', \tag{2.8}$$

となる. ここで, 遠心力の項が落ちたのは, 遠心力はつねに回転軸から外向きだからである. 一般に, 非慣性系ではこれらの保存則が慣性系と同じでないことに留意しておこう.

### 2.1.2 回転直交座標系での流体の運動方程式

回転直交座標系での加速度は (2.4) 式で表わされるので, そのような系でのナビエ-ストークス方程式は, 系の回転によるコリオリ力と遠心力の項を加えて,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u}, \tag{2.9}$$

となる。ただし、粘性項では  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  を仮定し、動粘性率を新たに  $\nu \equiv \mu/\rho$  として導入している。また、 $x', u'$  の ' は省略した。回転系では、慣性系での運動法則にこれらの 2 項を加えると同じ運動法則が記述できるわけである。わざわざ余分な項を加えて運動を考える理由は、ひとえに、我々は地球という回転系によって大気や海洋の流れ、つまり“相対速度”を観察するからである。地球の回転の時間スケールに対して十分に短時間で終るような現象であれば、慣性系（静止座標系）での記述が良いが、より長い時間スケール（たとえば、数日）にわたる大気や海洋の流れを慣性系で記述することを想像してみると、その困難さ、見通しの悪さが容易にわかるであろう。

次節でみるように、地球の自転による遠心力項はジオポテンシャルに含めてしまうのが普通である（伝統的な近似のもとでは、この項は運動方程式の鉛直成分に重力加速度として陰に残るのみである）。また、回転台を用いた室内実験でも、地球流体に関する実験では遠心力が重要でない状況を設定するのが普通である。例えば、直径が 40 cm の円筒容器に水を入れて 2 秒で 1 回転 (30 rpm; revolutions per minute) させると、水面は回転放物面となるが、その高低差はたかだか 2 cm 程度である。遠心分離機のようにビュンビュン回せば当然重力よりも遠心力が支配的となるが、そのような実験を地球流体を念頭に置いた実験として行なうことはない(たぶん)。

## 2.2 回転球面上での運動方程式

### 2.2.1 回転座標系

惑星大気の運動を念頭に置いて、回転球面上で重力場のなかに置かれた流体の運動方程式を導出しておく（詳細は、小倉, 1978; 栗原, 1979; Holton, 1992 などを参照のこと）。

静止した球座標系  $(\lambda, \phi, r, t)$  でのナビエ-ストークス方程式 (1.96), (1.97), (1.98) に対して、両極 ( $\phi = \pm 90^\circ$ ) を回転軸が通り一定角速度  $\Omega$  で回転する座標系  $(\lambda', \phi', r', t')$  でのナビエ-ストークス方程式は、 $\lambda' = \lambda - \Omega t, \phi' = \phi, r' = r, t' = t$  という変換を行なえば得られる。静止系での速度を  $(u, v, w) \equiv (u_\lambda, u_\phi, u_r)$ 、回転系での速度を  $(u', v', w') \equiv (r' \cos \phi' D\lambda'/Dt', r' D\phi'/Dt', Dr'/Dt')$  とすると、 $u' = u - r\Omega \cos \phi, v' = v, w' = w$  となる。 $\partial/\partial t = \partial/\partial t' - \Omega \partial/\partial \lambda'$  であることに注意して、回転座標系での運動方程式を求めると次になる：

$$\frac{\tilde{D}u}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{r} + \frac{uw}{r} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = -\frac{1}{\rho r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu(\Delta \mathbf{u})_\lambda, \quad (2.10)$$

$$\frac{\tilde{D}v}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{r} + \frac{vw}{r} + 2\Omega u \sin \phi + r\Omega^2 \cos \phi \sin \phi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu(\Delta \mathbf{u})_\phi, \quad (2.11)$$

$$\frac{\tilde{D}w}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \phi - r\Omega^2 \cos^2 \phi = -g_a - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu(\Delta \mathbf{u})_r, \quad (2.12)$$

ここで、' は省略した。また、体積力としては惑星の引力だけ考えている ( $\mathbf{K} = -g_a \mathbf{r}/r$ )。さらに、微分記号  $\tilde{D}/Dt$  は次である：

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.13)$$

運動方程式 (2.10), (2.11), (2.12) の左辺で分母が  $r$  の各項は球面座標系特有の項でメトリック項と呼ばれる。回転系は非慣性系であるから、みかけの力としてコリオリ力 (左辺で  $\Omega$  の 1 次の項) と遠心力 (左辺で  $\Omega$  の 2 次の項) が現れている。

回転座標系での運動方程式 (2.10), (2.11), (2.12) をベクトルの形で書くと、 $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi)^T$  と

して,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{\rho}\text{grad}p + \nu\Delta\mathbf{u}, \quad (2.14)$$

となる. ただし, ジオポテンシャル  $\Phi$  は  $\Phi = g ar - r^2\Omega^2 \cos^2 \phi/2$  であり, 回転による遠心力の効果がここに含まれている. また,  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  がコリオリ力である. メトリック項は  $D\mathbf{u}/Dt$  のなかに含まれている. ここで, メトリックのベクトル  $M = (-\dot{\phi}, \dot{\lambda} \cos \phi, \dot{\lambda} \sin \phi)^T = (-v/r, u/r, u \tan \phi/r)^T$  を導入すると, ベクトル表式 (2.14) は  $\tilde{D}/Dt$  を使って,

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{u}}{Dt} + (M + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{u} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{\rho}\text{grad}p + \nu\Delta\mathbf{u}, \quad (2.15)$$

とも書ける (鍵本, 1998).

## 2.2.2 伝統的な近似

ジオポテンシャル  $\Phi$  には遠心力の効果が含まれており, ジオイド (等ジオポテンシャル面) は回転楕円体であるが, 気象学の分野では伝統的に, この遠心力が引力に比べて十分に小さいとして, 地球半径が  $a$  の球面近似を行ってきた. また, 同時に, 独立変数  $r$  の代わりに “地表面” からの高さ  $z \equiv r - a$  を用い, 大気層の厚さが  $a$  に比べて十分小さい ( $|z| \ll a$ ) という仮定を置いてきた. これらの近似のもとで, 運動方程式 (2.10), (2.11), (2.12) は次のように書くことが多い. 例えば, Holton(1979, 1992; (2.19)-(2.21) 式), Lindzen(1990; (6.18)-(6.20) 式):

$$\frac{\bar{D}u}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = -\frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu(\Delta\mathbf{u})_\lambda, \quad (2.16)$$

$$\frac{\bar{D}v}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu(\Delta\mathbf{u})_\phi, \quad (2.17)$$

$$\frac{\bar{D}w}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \phi = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu(\Delta\mathbf{u})_z, \quad (2.18)$$

ここで,  $g$  は重力加速度であり, 運動方程式の鉛直成分のみにジオポテンシャル項が残っている.  $\bar{D}/Dt$  も次のようになる:

$$\frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.19)$$

ここで注意すべきは, この近似ではエネルギーの保存則は成り立つが, 角運動量の保存則が破れていることである. もともと成り立っていた角運動量保存則を新たな近似系でも成り立たせるためには, (2.16)~(2.18) でさらに,  $uw/a$ ,  $vw/a$ ,  $(u^2 + v^2)/a$ ,  $2\Omega w \cos \phi$ ,  $2\Omega u \sin \phi$ , の各項を落す必要がある. 帯状平均全角運動量  $M \equiv \Omega a^2 \cos^2 \phi + \bar{u} a \cos \phi$  ( $\bar{u}$  は帯状平均東西流) の時間変化に対する式をつくり吟味すれば良い.

他の惑星大気で自転角速度が大きな場合や大気層が厚い場合には, このような伝統的な近似が必ずしも妥当ではないので, もとの運動方程式 (2.10), (2.11), (2.12) に戻って考える必要がある. 地球内部や太陽内部などの流体を扱うときにも同様の注意が必要である.

## 2.3 スケール解析

### 2.3.1 力学的近似モデル

ここで考えるいろいろな流体は、あくまで一つの物理的性質を備えた力学的モデルであって、現実の物質に一つ一つに対応するものではない(巽, 1982; p.48). たとえば、空気や水は、音速のオーダーの特徴的速度をもつ現象に対しては圧縮性が重要であり、圧縮性流体として取り扱わなければならないが、音速よりも十分に遅い現象に対しては、非圧縮性流体としても問題ない。単純に空気は圧縮性流体で水は非圧縮性流体と思っ  
てはいけない。

流体運動の解析には、流体現象に最も影響ある物理的性質だけを取り出して考慮し、その他の諸性質は思い切って捨象することが肝要である(巽, 1982; p.49). 現象に関係する可能性のある諸性質を取り入れていたずらに厳密な取り扱いをしようとする、多くの場合、解析が困難になり結果は複雑となって、何の結論も得られないことになる。むしろ、かなり思い切った近似を行ない、あるいは単純化を導入するところに理論の真価がある。

### 2.3.2 スケール解析

ある現象に対して適当な近似方程式系を求めようとするとき、一般に次のような手続きをとる。

1. 現象の観測：  
(i) 物理量の大きさ ( $A$ ), (ii) 物理量の変動の大きさ ( $\delta A$ ), (iii) 時間・空間スケール ( $T, L, H$ )
2. 基礎方程式の各項の大きさの見積り
3. 小さな項を省略して方程式を簡略化

このような手続きをスケール解析という。つまり、スケール解析は解(現象)を既に知っていることを前提としている(Lindzen, 1990; p.97). それでは、遠く離れた惑星の大気のように、現象が完全に観測できない場合にはどうすればよいか? 理論的研究の場合、観測できない物理量の大きさをパラメータとして残し、考えられる範囲でその値を変化させてシラミ潰しに調べていくしかない。また、数値モデルを作る場合には、なるべく近似をしないものを用いることになるであろう。

### 2.3.3 静力学的平衡の近似

スケール解析の実例として、まず運動方程式の鉛直成分(2.18)を取り上げる。中緯度地帯の天気図に見られる移動性高・低気圧などの総観規模現象を具体的な現象として考えると、その特徴的なスケールは次で与えられる：

|        |  |                           |
|--------|--|---------------------------|
| 水平流速：  | $U \sim 10\text{ms}^{-1}$ , $\delta U \sim 10\text{ms}^{-1}$ |                           |
| 鉛直流速：  | $W \sim 0$ , $\delta W \sim 10^{-2}\text{ms}^{-1}$           | ：直接観測はあまりない               |
| 地上気圧：  | $P_s \sim 10^5\text{Pa} = 10^5\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$  |                           |
| 地上密度：  | $\rho_s = 1.23\text{kgm}^{-3} \sim 1\text{kgm}^{-3}$         |                           |
| 重力加速度： | $g = 9.8\text{ms}^{-2} \sim 10\text{ms}^{-2}$                |                           |
| 水平規模：  | $L \sim 10^6\text{m}$  |                           |
| 鉛直規模：  | $H \sim 10^4\text{m}$  | ：対流圏の厚さ                   |
| 時間規模：  | $T \sim 10^5\text{s}$  | ：水平移流の時間規模 ( $\sim L/U$ ) |
| 地球半径：  | $a = 6.37 \times 10^6\text{m} \sim 10^7\text{m}$             |                           |
| 地球回転：  | $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi \sim 10^{-4}\text{s}^{-1}$    |                           |
| 分子粘性：  | $\nu \sim 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$                    |                           |

これらの値をもとに式 (2.18) の各項の大きさを見積もると、次のようになる：

$$\frac{\bar{D}w}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \phi = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu(\Delta \mathbf{u})_z$$

$$\frac{\delta W}{T}, \frac{U\delta W}{L}, \frac{U^2}{a}, \tilde{f}U, g, \frac{P_s}{\rho_s H}, \frac{\nu\delta W}{L^2}, \frac{\nu\delta W}{H^2}$$

$$10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10, 10, 10^{-19}, 10^{-15} \quad [\text{ms}^{-2}]$$

したがって、気圧傾度力と重力の項が圧倒的に大きく、式 (2.18) は次のように近似できる：

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.20)$$

この関係を静力学的平衡と呼ぶ。運動がなければ ( $\mathbf{u} = 0$ )、式 (2.20) が完全に成り立つ。総観規模現象では、これらの項が他の項に比べて  $10^4$  以上大きく、静力学的平衡が十分に良い近似で成り立っている。また、より小規模の現象でも静力学的平衡の近似が妥当である。例えば、積乱雲が発達する状況では、 $T \sim 1\text{h}$ 、 $\delta W \sim 30\text{ms}^{-1}$  であり、 $dw/dt \sim 10^{-2}\text{ms}^{-2}$  となる。この値は総観規模現象での見積りよりも 5 桁も大きいですが、式 (2.20) の 2 項に比べると 3 桁小さな値である。

## 2.4 プリミティブ方程式系

### 2.4.1 静力学的平衡

前節では、気圧傾度力と重力がつりあう静力学的平衡の式 (2.20) が、中緯度の総観規模現象に対するスケール解析の結果として得られたが、伝統的な近似のもとで水平に一樣で静止した流体を考えると、厳密に静力学的平衡が成り立っている。すなわち、

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ p = \bar{p}(z), \\ \rho = \bar{\rho}(z), \end{cases} \quad (2.21)$$

は、基礎方程式系 (2.16)~(2.18) を満たしており、運動方程式の鉛直成分 (2.18) は次になる：

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\bar{\rho}g. \quad (2.22)$$

式 (2.22) をある高さ  $z$  から大気の上端 (無限遠方) まで積分すると,

$$\bar{p}(z) = \int_z^\infty \bar{\rho} g dz, \quad (2.23)$$

となり, ある高さでの気圧は, それより上にある単位面積あたりの大気の重さに等しい. また, 等温理想気体 ( $\bar{p} = \bar{\rho} R T_{00}$ ) の場合には, 式 (2.22) は,

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\frac{\bar{p}g}{RT_{00}}, \quad (2.24)$$

となる. こゝでは,  $g$  は一定として  $z = 0$  からある高度  $z$  まで積分すると, そこでの気圧が次で与えられる:

$$\bar{p}(z) = \bar{p}(0)e^{-gz/RT_{00}} = \bar{p}(0)e^{-z/H}. \quad (2.25)$$

等温理想気体の場合, 気圧は高さとともに指数関数的に減少する. ここで, 気圧や密度が  $1/e$  になる高度  $H \equiv RT_{00}/g$  をスケールハイトと呼ぶ.  $1/e^2 \simeq 0.135$  なので, およそ  $2 \times$  スケールハイトで, 気圧・密度が一桁小さくなる.  $R = 287 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$  であるから,  $T_{00} = 210\text{K}$  では  $H = 6.2\text{km}$ ,  $T_{00} = 290\text{K}$  では  $H = 8.5\text{km}$  である.

## 2.4.2 プリミティブ方程式系

伝統的な近似をした方程式系をもとに, さらに運動方程式の鉛直成分を静力学的平衡で近似した系をプリミティブ方程式系という. 何故 primitive (根本の, 原始の) というかは, 数値天気予報の発展の歴史と関係がある (小倉, 1978; p.109): 1950 年頃に数値天気予報が始まったとき, 当時の計算機環境でもそれを可能にしたのは準地衡方程式系という近似方程式系 (次節参照) が導出されたからである. 準地衡方程式系では静力学的平衡に加えてさらに流れがほぼ地衡流的であるという仮定を課すが, プリミティブ方程式系では静力学的平衡を仮定するだけなので, より “根本的な” 方程式系という意味でこのように呼ばれるようになった.

伝統的な近似をした運動方程式 (2.16)~(2.18) で鉛直成分を静力学的平衡 (2.20) で置き換えるとき, 同時に水平成分の (2.16) 式でも  $2\Omega w \cos \phi$  の項を省く必要がある. エネルギー的に一貫性を持たせるためである. すなわち, 運動エネルギーを  $(u^2 + v^2)/2$  で近似して, その時間変化を与える式が伝統的な近似系での運動エネルギーの式に対応するためには, この項も省かなければならない. もともと鉛直成分の  $-2\Omega u \cos \phi$  の項と対応してエネルギー成分間の交換を表していたので, 片方を省くともう一方も省くことが必要なのである. 同様に, 鉛直成分の式で  $(u^2 + v^2)/a$  を省くのと一貫するために, 水平成分の  $uw/a$  と  $vw/a$  も省略しなければならない. 結局, 静力学的平衡の近似をした運動方程式は次になる:

$$\frac{\bar{D}u}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu(\Delta \mathbf{u})_\lambda, \quad (2.26)$$

$$\frac{\bar{D}v}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu(\Delta \mathbf{u})_\phi, \quad (2.27)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.28)$$

鉛直速度  $w$  を予報する式がなくなり, 熱力学的状態量である  $p$  と  $\rho$  の関係式が一つ増えたことになる.

栗原 (1979) のラグランジュの方程式を用いた運動方程式の導出に従えば, この辺の一貫性に関する手続きをきれいな形で行なうことができる. すなわち, 回転座標系での運動方程式 (2.10), (2.11), (2.12) は, 質点の運動エネルギーを  $T = [\{r \cos \phi (\dot{\lambda} + \Omega)\}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{r}^2]/2$  とし系統的に導出されたが, これを  $T_{PE} = [\{a \cos \phi (\dot{\lambda} + \Omega)\}^2 + (a\dot{\phi})^2]/2$  と置き直すだけで, 一貫性をもつ近似方程式系 (2.26), (2.27) を系統的に導出することができる.

同様に伝統的な近似をした球面上の連続方程式とエネルギー方程式は、

$$\frac{\bar{D}\rho}{Dt} + \rho \left\{ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\bar{D}}{Dt} \ln \theta = \frac{Q}{c_p T}, \quad (2.30)$$

と書ける。ただし、エネルギー方程式で熱拡散の項は省略している。

方程式 (2.26), (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) に、状態方程式 (理想気体の場合は (1.69) 式) と温位の定義式 (1.75) を加えると、とりあえず従属変数  $(u, v, w, p, \rho, T, \theta)$  で閉じた方程式系ができる。これがプリミティブ方程式系の一表現である。静力学的平衡の仮定をしたことで、方程式系から基本的に音波が除去されている (具体的な波の解析は後の章で行なう)。大規模な大気運動では一般に音波は重要な役割をしないので、理論的な考察をすすめたり数値的に時間発展解を求めたりするときには、このようなプリミティブ方程式系を用いると有効である。

### 2.4.3 気圧座標系

静力学的平衡が成り立つならば気圧  $p$  は高さ  $z$  の単調減少関数になるので、 $p$  を鉛直座標として高さを従属変数  $z(x, y, p, t)$  とみなすことが可能である ( $x, y$  は水平座標)。このような座標系は気圧座標系または  $p$  座標系と呼ばれ、気象学の分野ではよく使われている。基礎方程式系が  $z$  座標系より簡単な形に書けること、高層気象観測では各物理量が気圧の関数として測定されること、などの理由による。

$p$  座標系では水平座標は  $z$  座標系のそれと同じであるが、一般に等圧 ( $p = \text{一定}$ ) 面は水平 ( $z = \text{一定}$ ) 面と一致しないので、 $p$  座標系での“水平微分”は等圧面に沿って計算しなければならない。 $p$  座標系における任意の物理量  $A$  の  $x$  微分は  $z$  座標系でのそれと次のように対応づけられる：

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{y,p,t} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{y,z,t} + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{x,y,t} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p,t}. \quad (2.31)$$

添字は、これらを一定に保つての偏微分であることを意味する。ここで、静力学的平衡を仮定することにより

$$\left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{x,y,t} = \left( \frac{\partial A}{\partial p} \right)_{x,y,t} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{x,y,t} = -\rho g \left( \frac{\partial A}{\partial p} \right)_{x,y,t}, \quad (2.32)$$

となるので、(2.31) は右辺第 2 項を変形・移項して次のように書ける：

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{y,z,t} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{y,p,t} + \rho g \left( \frac{\partial A}{\partial p} \right)_{x,y,t} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p,t}. \quad (2.33)$$

これより、例えば、運動方程式の水平 ( $x$  方向) 気圧傾度力は  $p$  座標系で次のように書ける：

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z,t} = -g \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p,t} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y,p,t}. \quad (2.34)$$

ここで、 $\Phi \equiv gz$  はジオポテンシャルである。 $z$  座標系 (左辺) に比べると、 $p$  座標系では密度  $\rho$  の項がなくなつて非線型性が消えているので、解析が容易になっている。

高さまたは気圧の一個単調関数であればどんなものでも (2.31) と同様の関係式が成り立ち、それを鉛直座標に用いることができる。数値天気予報モデルでは、地上気圧  $p_s(x, y, t)$  で規格化した気圧  $[\sigma \equiv p(x, y, z, t)/p_s(x, y, t)]$  を独立変数とするシグマ座標系が広く使われている。こうすると下端境界条件で

地上の起伏 (山脈) が扱いやすくなるからである。中層大気力学では、しばしば対数気圧座標系 [ $z^* \equiv -H \ln(p(x, y, z, t)/p_0)$ , 定数  $H$  と  $p_0$  は、それぞれ標準的スケールハイトと基準気圧] が用いられる (Andrews, Holton and Leovy, 1987)。また、安定成層している大気では温位  $\theta$  は高さと共に単調に増大するので、やはり中層大気力学においては温位座標系もよく使われる。断熱の場合には温位がラグランジュ的保存量なので、温位座標系では断熱運動が「水平」2次元運動として記述できるという利点がある。

#### 2.4.4 気圧座標系でのプリミティブ方程式系

ここでは、気圧座標系でのプリミティブ方程式系を導出しておく。ある物理量  $A$  のラグランジュ式時間変化の気圧座標系での表記は、(2.31) 式の要領で次のように書ける：

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_z + (\mathbf{v} \cdot \nabla_z)A + w \frac{\partial A}{\partial z}, \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_p + (\mathbf{v} \cdot \nabla_p)A + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_p - (\mathbf{v} \cdot \nabla_p)z + w \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は速度  $\mathbf{u}$  の水平成分であり、 $\nabla_z$  と  $\nabla_p$  は、それぞれ、 $z$  座標系、 $p$  座標系での水平 (2次元) 微分演算子である。 $A = p$  として、

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_p - (\mathbf{v} \cdot \nabla_p)z + w \right\} = -\rho g \left\{ - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_p - (\mathbf{v} \cdot \nabla_p)z + w \right\}, \quad (2.36)$$

となり、これは空気粒子が等圧面から離れていく程度を示している。これを  $\omega (\equiv Dp/Dt)$  で表記し、気圧座標系における鉛直速度、鉛直  $p$  速度と呼ぶ。結局、式 (2.35) は  $\omega$  を用いて、

$$\frac{DA}{Dt} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_p + (\mathbf{v} \cdot \nabla_p)A + \omega \frac{\partial A}{\partial p}, \quad (2.37)$$

と書ける。また、式 (2.34) で見たように、運動方程式の水平気圧傾度力は  $-\nabla_p \Phi$  で与えられるので、気圧座標系での運動方程式の水平成分は次のように書ける：

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla_p \Phi + \mathbf{F}, \quad (2.38)$$

ここで、 $f$  はコリオリパラメータ ( $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ ) であり、 $\mathbf{k}$  は鉛直方向の単位ベクトルである。粘性項は単に  $\mathbf{F}$  と表記した。

鉛直方向の運動方程式を近似した静力学的平衡の式 (2.28) は、ジオポテンシャルを従属変数として、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p}, \quad (2.39)$$

と書ける。ここで、最右辺への変形は理想気体の状態方程式を用いている。

連続方程式を気圧座標系であらわすには、やはり関係式 (2.33) を用いて変形していけば良い。 $\text{div} \mathbf{u} = \nabla_z \cdot \mathbf{v} + \partial w / \partial z$  であり、 $w = Dz/Dt$  であるので、(1.25)/ $\rho$  は次のように書ける：

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla_p \cdot \mathbf{v} + \rho g \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \cdot \nabla_p z - \rho g \frac{\partial}{\partial p} \frac{Dz}{Dt} = 0. \quad (2.40)$$

ここで、左辺の第4項はさらに次のように変形できる：

$$-\rho g \frac{\partial}{\partial p} \frac{Dz}{Dt} = -\rho g \left( \frac{D}{Dt} \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \cdot \nabla_p z + \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\partial z}{\partial p} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \rho g \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \cdot \nabla_p z + \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (2.41)$$

ここでも、静力学的平衡の関係式  $\partial z/\partial p = -1/(\rho g)$  を用いている。これを (2.40) に代入して、気圧座標系での連続方程式を得る：

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2.42)$$

もとの  $z$  座標系での連続方程式と比べると非線型性がなくなり、非圧縮性流体の仮定をした場合の  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  と同じ形になっている。これが、大規模な大気運動を解析するときに気圧座標系がよく用いられる理由の一つである。

気圧座標系でのエネルギー方程式は、理想気体での最初の式 (1.73), (1.74) に戻って考えると簡単である。熱拡散がない ( $\kappa = 0$ ) として、

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = Q, \quad (2.43)$$

となる。ここで、状態方程式 (1.70) および  $\omega = Dp/Dt$  より、

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{c_p p} \omega = \frac{Q}{c_p}, \quad (2.44)$$

を得る。

### 2.4.5 気圧座標系でのプリミティブ方程式系 (まとめ)

気圧座標系でのプリミティブ方程式系は次である：

- 水平方向の運動方程式：式 (2.38)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla_p \Phi + \mathbf{F}, \quad (2.45)$$

- 静力学的平衡の式：式 (2.39)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (2.46)$$

- 連続方程式：式 (2.42)

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2.47)$$

- エネルギー方程式：式 (2.44)

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{c_p p} \omega = \frac{Q}{c_p}. \quad (2.48)$$

ここで、未知変数は、水平速度  $\mathbf{v}$ 、鉛直  $p$  速度  $\omega$ 、ジオポテンシャル  $\Phi$ 、および温度  $T$  であり、これらに対して閉じた方程式系となっている。

## 2.5 準地衡方程式系

### 2.5.1 地衡風

中緯度域の移動性高・低気圧で代表される総観規模現象を具体例として、運動方程式の水平成分のスケール解析を行なう。第 2.3.3 節で与えた特徴的スケールを用いて伝統的な近似をした運動方程式の各項の大きさを見積もると、次のようになる：

|       |                                |         |  |
|-------|--------------------------------|---------|--|
| 水平流速： | $U \sim 10\text{ms}^{-1}$      | 水平気圧変化： | $\delta P/\rho \sim 10^3\text{m}^2\text{s}^{-2}$ |
| 鉛直流速： | $W \sim 10^{-2}\text{ms}^{-1}$ | 地球半径：   | $a \sim 10^7\text{m}$                            |
| 水平規模： | $L \sim 10^6\text{m}$          | 地球回転：   | $f_0 \sim \tilde{f}_0 \sim 10^{-4}\text{s}^{-1}$ |
| 鉛直規模： | $H \sim 10^4\text{m}$          | 分子粘性：   | $\nu \sim 10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$        |

$$\frac{\bar{D}u}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = - \frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu(\Delta \mathbf{u})_\lambda$$

$$\frac{\bar{D}v}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} + 2\Omega u \sin \phi = - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu(\Delta \mathbf{u})_\phi$$

|                 |                 |                |           |              |                           |  |
|-----------------|-----------------|----------------|-----------|--------------|---------------------------|--|
| $\frac{U^2}{L}$ | $\frac{U^2}{a}$ | $\frac{UW}{a}$ | $fU$      | $\tilde{f}W$ | $\frac{\delta P}{\rho L}$ | $\frac{\nu U}{L^2}, \frac{\nu U}{H^2}$   |
| $10^{-4}$       | $10^{-5}$       | $10^{-8}$      | $10^{-3}$ | $10^{-6}$    | $10^{-3}$                 | $10^{-16}, 10^{-12}$ [ms <sup>-2</sup> ] |

したがって、このスケールでは気圧傾度力とコリオリ力がほぼ釣り合っていることがわかる。水平運動方程式でこれらの項だけを残すと、第一近似として次の関係式が得られる：

$$-fv \approx -\frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad fu \approx -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi}. \quad (2.49)$$

これらは診断型の方程式で、中緯度総観規模における水平速度場と気圧場との近似的関係を与えるものである。

ここで、(2.49) 式を厳密に満たす (仮想的な) 風を地衡風 ( $u_g, v_g$ ) として定義する：

$$u_g = -\frac{1}{f\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi}, \quad v_g = \frac{1}{f\rho a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (2.50)$$

これらを用いると、非粘性のプリミティブ方程式の水平方向の運動方程式は、

$$\frac{\bar{D}u}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} = f(v - v_g), \quad (2.51)$$

$$\frac{\bar{D}v}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -f(u - u_g), \quad (2.52)$$

と書ける。慣性力 (左辺) がゼロの地衡風は、この方程式を満たす平衡解であり、厳密に地衡風平衡が成り立つが、曲率のある場合には必ずしもそうではない (傾度風平衡の節を参照)。これらは予報型の方程式で、実際の風 ( $u, v$ ) と地衡風 ( $u_g, v_g$ ) の差に比例して加速が起こり、流れが時間とともに変化することを表している。上記のスケールでは、加速度項はコリオリ項に比べて一桁小さかったわけで、地衡風からの小さなズレが総観規模場の時間変化をもたらしているのである。

ここで、加速度項のコリオリ項に対する大きさの指標として、特徴的なスケールを用いた次の無次元数  $Ro$  を定義する：

$$Ro \equiv \frac{U^2/L}{f_0 U} = \frac{U}{f_0 L}. \quad (2.53)$$

この無次元数は、気象学者 C.G. Rossby (1898–1957) にちなんでロスビー数と呼ばれている。ロスビー数の小ささは水平風を地衡風で近似することの妥当性を示す指標である。

## 2.5.2 準地衡方程式系

気圧座標系でのプリミティブ方程式系, (2.45)~(2.48) を出発点 (中間点) として, さらに, 水平の流れが卓越して ( $W/U \sim 10^{-3}$ ), それが地衡風に近い ( $v \sim v_g$ ) という仮定の下に, 準地衡方程式系を導出する. 歴史的には, Charney(1947) がこのような方程式系を導出して温帯低気圧の成因に関する傾圧不安定理論を構築したのが始まりで, 当時黎明期であった数値天気予報の基礎方程式としても用いられた. ここでは, Holton(1992) の教科書に従って導出する. より系統的な微小パラメータ展開法による導出は Charney(1973), 小倉 (1978), Pedlosky(1979) などにあるので, 参考にするとよい.

まず, 水平風を地衡風成分と非地衡風成分に分ける :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{v}_g = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi. \quad (2.55)$$

ここで, 南北の水平規模は地球半径に比べて小さい ( $L/a < 1$ ) と仮定して, コリオリパラメータを一定  $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$  とした. このように定義した地衡風は水平非発散である ( $\nabla_p \cdot \mathbf{v}_g = 0$ ).

つぎに, 運動方程式がどのように近似できるかを考える. 流れが地衡風に近い ( $|\mathbf{v}_g| \gg |\mathbf{v}_a|$ ;  $|\mathbf{v}_a|/|\mathbf{v}_g| \sim O(Ro)$ ) という仮定より,  $\mathbf{v}$  は地衡風  $\mathbf{v}_g$  で近似でき, ラグランジュ式時間微分に関わる水平風も  $\mathbf{v}_g$  で置き換えられる. また, 鉛直流は非地衡風成分から生じるだけなので, それによる移流項は省略できる. 結局, 運動方程式の水平成分 (2.45) の左辺は,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \sim \frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt}, \quad \frac{D_g}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_p, \quad (2.56)$$

と近似できる.

運動方程式のコリオリ項では, コリオリパラメータの扱いに注意がいる. 地衡風の定義ではこれを一定値  $f_0$  としたが, ここでは, コリオリパラメータの緯度依存性の力学的効果を残しておく.  $f$  を基準となる緯度  $\phi_0$  のまわりでテイラー展開し, 最初の 2 項だけを残すことにする :

$$f = f_0 + \beta y, \quad \beta \equiv \left( \frac{df}{dy} \right)_{\phi_0} = \frac{2\Omega \cos \phi_0}{a}. \quad (2.57)$$

ここで,  $y = a(\phi - \phi_0)$  である. この近似は, 一般に中緯度ベータ平面近似と呼ばれている. 中緯度総観規模現象に対しては, 第 1 項と第 2 項の比がロスビー数の程度 ( $\beta L/f_0 \sim L/a \sim O(Ro)$ ) であり, 地衡風の近似 (2.55) ではコリオリパラメータを一定値  $f_0$  と置いてよいことを示している.

運動方程式 (2.45) の右辺は, 粘性項  $F$  を省略し, さらに次のように近似する :

$$\begin{aligned} -\nabla_p \Phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{v} &= f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g - (f_0 + \beta y) \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a), \\ &\approx -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g. \end{aligned} \quad (2.58)$$

結局, このように近似した運動方程式は次のように書ける :

$$\frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g. \quad (2.59)$$

この式の各項は気圧傾度力に対して  $O(Ro)$  の大きさであり,  $O(Ro^2)$  より小さな項は省略されている.

連続方程式 (2.47) は, (2.55) で定義した地衡風が非発散なので,

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2.60)$$

となり,  $\omega$  が水平風の非地衡風成分だけで決まっていることを表わしている.

エネルギー方程式 (2.48) の準地衡近似では, ラグランジュ式時間微分を  $D_g/Dt$  で置き換えるだけでは不十分である. 静的安定度 ( $\partial T/\partial p$ ) が大きいので,  $\omega$  自体は小さくても, この鉛直運動に伴う断熱加熱・冷却項を無視できない. ここでは, 温度場  $T(x, y, p, t)$  をある標準状態  $T_0(p)$  とそれからのズレ  $T'(x, y, p, t)$  に分割することにより, 簡単化する.  $|dT_0/dp| \gg |\partial T'/\partial p|$  なので, 鉛直運動に伴う項では前者だけを考慮すればよい. 結局, 準地衡近似をしたエネルギー方程式は,

$$\frac{D_g T'}{Dt} - S_{p0}(p)\omega = \frac{Q}{c_p}, \quad S_{p0}(p) \equiv \frac{RT_0(p)}{c_p p} - \frac{\partial T_0(p)}{\partial p}, \quad (2.61)$$

となる. ここで  $S_{p0}$  は標準状態の静的安定度パラメータであり, 対流圏中層ではおよそ  $5 \times 10^{-4} \text{ K Pa}^{-1}$  程度の値となる.

### 2.5.3 気圧座標系での準地衡方程式系 (まとめ)

気圧座標系での準地衡方程式系は次である:

- 水平方向の運動方程式: 式 (2.59)

$$\frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g, \quad (2.62)$$

- 地衡風平衡の式: 式 (2.55)

$$\mathbf{v}_g = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi. \quad (2.63)$$

- 静力学的平衡の式: 式 (2.46)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (2.64)$$

- 連続方程式: 式 (2.60)

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2.65)$$

- エネルギー方程式: 式 (2.61)

$$\frac{D_g T'}{Dt} - S_{p0}(p)\omega = \frac{Q}{c_p}, \quad S_{p0}(p) = \frac{RT_0(p)}{c_p p} - \frac{\partial T_0(p)}{\partial p}, \quad (2.66)$$

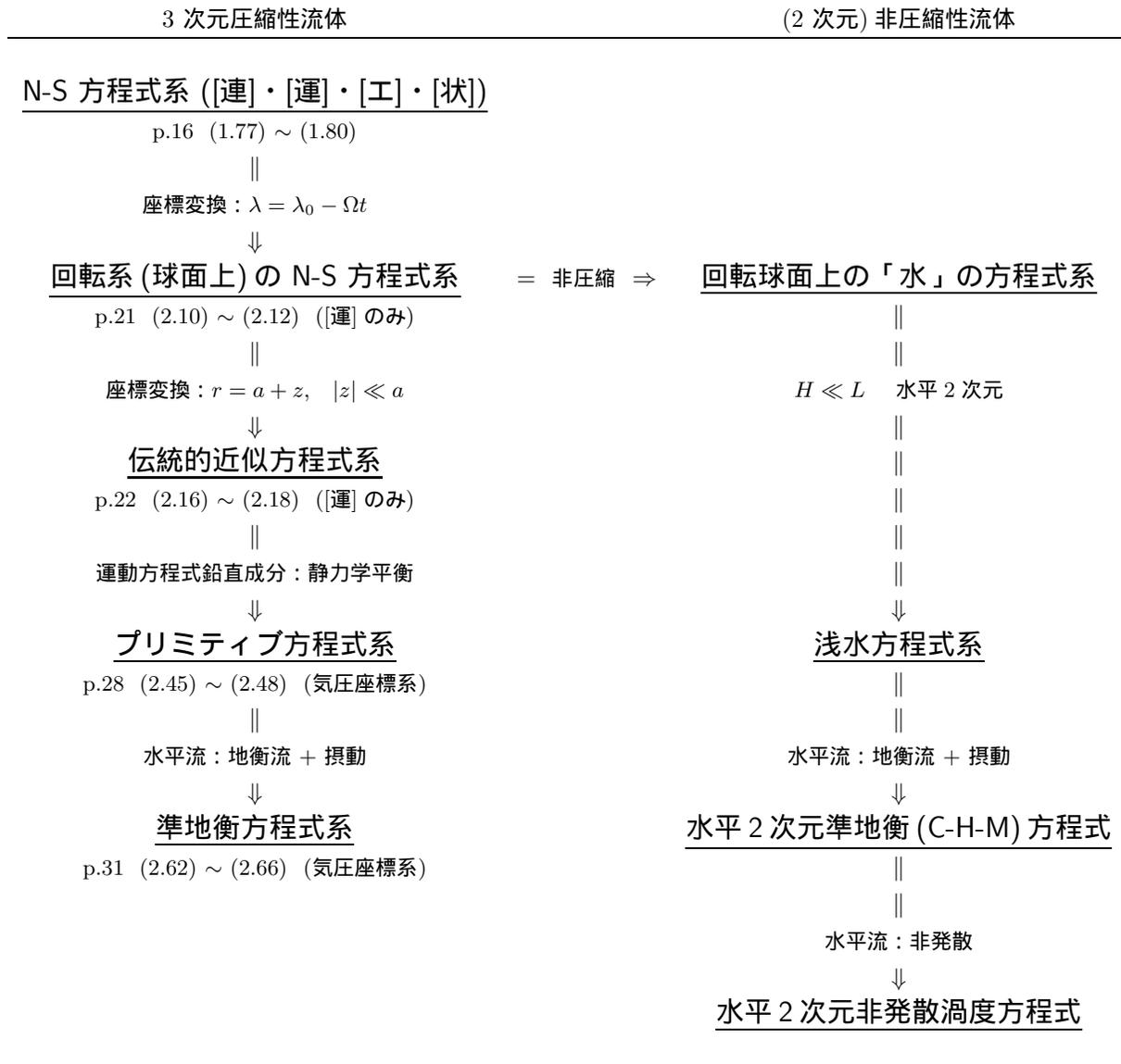
ここで, 未知変数は, 水平風の地衡風成分  $\mathbf{v}_g$ , 非地衡風成分  $\mathbf{v}_a$ , 鉛直  $p$  速度  $\omega$ , ジオポテンシャル  $\Phi$ , および温度  $T$  であり, これらに対して閉じた方程式系となっている. ラグランジュ式時間微分は (2.56) であり, 地衡風成分による水平移流だけであるのが特徴である. 実際の (1970 年代までの) 数値天気予報モデルや理論的な解析では, これらをもとにさらに変数を消去した方程式系が使われてきた. それらの詳細については, 後の章で具体的に触れることにする.

## 2.6 近似方程式系の総まとめ

この章では, スケール解析により気象力学の基礎方程式系を段階的に近似してきた. ここでは, それらの一覧表を示しておく. 左側が座標変換および 3 段階の近似の流れである. 回転球面上のナビエ-ストークス (N-S) 方程式系で非圧縮性を仮定すると, 回転球面上の「水」の方程式系となる. そこで, 水深  $H$  が水平ス

ケールよりも十分小さいとすると、水平 2 次元の浅水方程式系となる。これは、プリミティブ方程式系の 2 次元版である。さらに、並行して近似をすすめると、水平 2 次元準地衡方程式となり、水平 2 次元非発散渦度方程式に至る。これは、近似の極みの方程式であるが、渦運動が支配的な回転流体の力学的エッセンスを残す最も簡略化した方程式といえる。

表 2.1: 近似方程式系の総まとめ



## 参考文献

- Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, 489pp.
- Charney, J.G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135–163.
- , 1973: Planetary Fluid Dynamics, P. Morel Ed., *Dynamic Meteorology*, D.Reidel Pub. Co.,

97–351.

林 祥介, 1996: 流体力学, 岩波講座地球惑星科学 6 「地球連続体力学」第 2 章, 39–97.

Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, 507pp.

鍵本 崇, 1998: GFD セミナー・ノート.

栗原 宣夫, 1979: 「大気力学入門」, 岩波全書 317, 244pp.

Lindzen, R.S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 310pp.

小倉 義光, 1978: 「気象力学通論」, 東京大学出版会, 249pp.

Pedlosky, J., 1979: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 624pp.

巽 友正, 1982: 「流体力学」, 培風館, 453pp.



## 第3章 循環と渦度

地球流体力学の興味の対象のうち、多くのものは渦運動によって特徴づけられる。大気中には、竜巻、台風、温帯低気圧から成層圏の周極渦まで、さまざまな渦があり、海洋中にも、鳴門の渦から湾流リング、北太平洋ジャイヤ（亜熱帯循環系）までのさまざまな渦がある。

渦運動成分の有無は、流体運動を大別する基準のひとつである。一般に、速度場はスカラーポテンシャル（速度ポテンシャルという）の勾配とベクトルポテンシャルの回転の和として表されるが、スカラーポテンシャルだけで書ける流れを渦なし流と呼び、逆に、ベクトルポテンシャルのある流れを渦あり流と呼ぶ（巽 1982; p.184）。上記のような渦運動を解析するとき、理想化して速度ポテンシャルがない状況を考えると、その基本的な力学的特性を抽出して考察できる。これからの数章では渦運動のさまざまな側面を述べていく。ここでは、まず渦運動の基本概念を整理しておく。

### 3.1 基本用語

完全流体においては、質点系の力学における角運動量保存則に対応する保存法則が成り立つ。まずこの節で流体力学の基本用語を定義しておいて、次節ではその保存則を導出する。

#### 3.1.1 速度と渦度

ある速度場  $u(x, t)$  に対して、流線や流管をつぎのように定義する（巽 1982; 第 2-1, 2-2 節）。

速度  $u(x, t) \equiv Dx/Dt$

流線 曲線上の各点において  $u$  が曲線の接線になるような曲線

流線の線要素を  $dx$  として、 $dx \parallel u(x, t)$

流管 1 つの閉曲線  $C$  上の各点を通る流線によって形成される曲面

流管の法線ベクトルを  $n$  として、 $n \perp u(x, t)$

渦度とは速度場の回転成分である。渦度  $\omega$  に対しても、流線や流管と同様に渦線や渦管が定義できる。また、渦管の極限として渦糸を考えることができる（巽 1982; 第 2-4 節）。

渦度  $\omega(x, t) \equiv \text{rot}u(x, t)$

渦線 曲線上の各点において  $\omega$  が曲線の接線になるような曲線

渦線の線要素を  $dx$  として、 $dx \parallel \omega(x, t)$

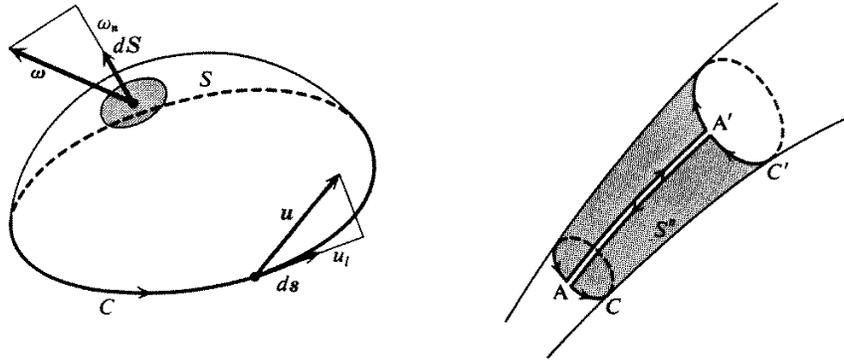


図 3.1: (左) 循環, (右) 渦管の循環. (巽 1982; 図 2.10 と図 2.11).

渦管 1 つの閉曲線  $C$  上の各点を通る渦線によって形成される曲面

渦管の法線ベクトルを  $n$  として,  $n \perp \omega(x, t)$

渦糸 無限小の断面積を持つ極めて細い渦管

### 3.1.2 循環

図 3.1(左) に示すように流体中に任意の閉曲線  $C$  をとり,  $C$  に沿って速度  $u$  の接線成分  $u_l$  を一周線積分した量

$$\Gamma = \oint_C u_l ds = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}, \quad (3.1)$$

を閉曲線  $C$  に沿う循環と呼ぶ. ここで,  $l$  を曲線  $C$  の接ベクトルとして,  $d\mathbf{s} = l ds$  は  $C$  の線要素を表す.

閉曲線  $C$  を外縁とする任意の曲面  $S$  を考える.  $S$  上の 1 点における曲面の微小部分の面積  $dS$  とその点での法線ベクトル  $n$  から作られるベクトル  $d\mathbf{S} = n dS$  を面要素と呼ぶ. このとき, ストークス (Stokes) の定理

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.2)$$

より, 循環は

$$\Gamma = \int_S \text{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \omega_n dS, \quad (3.3)$$

となる. すなわち, 閉曲線  $C$  に沿う循環は,  $C$  で囲まれる任意の曲面上での渦度の法線成分  $\omega_n$  の面積分に等しい.

ここで, 図 3.1(右) のようにある 1 本の渦管をとり, これを一周する 1 つの閉曲線  $C$  に沿う循環を考えると, 循環の値は  $C$  のとり方によらず渦管に固有の不変量であることがわかる:  $C$  とは別に, これと交わらずに渦管を一周するもう 1 つの閉曲線  $C'$  を考える.  $C, C'$  上にそれぞれ点  $A, A'$  をとり, 線分  $ACA, AA', A'C'A', A'A$  によって作られる閉曲線  $C''$  に沿う循環を考える.  $C''$  に囲まれた渦管面  $S''$  の上では  $n \perp \omega$  なので,

$$\int_{S''} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{かつ,}$$

$$\int_{S''} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C''} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \left( \oint_C + \int_{A'}^A - \oint_{C'} + \int_A^{A'} \right) (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}),$$

$$= \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{C'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}.$$

したがって、渦管を一周する任意の閉曲線  $C$  に沿う循環  $\Gamma$  は  $C$  のとり方によらず、

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \text{一定}, \quad (3.4)$$

である。この循環  $\Gamma$  を渦管の強さという。

## 3.2 循環定理

### 3.2.1 ビャークネスの循環定理

完全流体の運動方程式をある閉曲線  $C$  に沿って一周積分して、 $C$  に沿う循環の時間変化を考える。まず、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) - \mathbf{u} \cdot \frac{D}{Dt}(d\mathbf{s}) = \frac{D}{Dt}(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) - d\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right)$$

であり、この両辺の一周積分をとると最右辺の第 2 項が消えるので、

$$\oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \frac{D}{Dt}(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \frac{D\Gamma}{Dt}, \quad (3.5)$$

となる。ここで、2 番目の等号は、 $C$  の線要素  $d\mathbf{s}$  が流体とともに運ばれることによる。外力が保存力 ( $-\text{grad}\Phi$ ) である場合には、完全流体の運動方程式をこれに代入して、

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \text{grad}p \cdot d\mathbf{s} - \oint_C \text{grad}\Phi \cdot d\mathbf{s}, \\ &= - \oint_C \frac{1}{\rho} dp, \end{aligned} \quad (3.6)$$

を得る。右辺はソレノイド項と呼ばれるもので、循環の時間変化はソレノイド項に等しい。これをビャークネス (V.Bjerknes) の循環定理という。

### 3.2.2 循環定理の応用：海陸風の強化

Holton(1992; p.91) に従い、ビャークネスの循環定理を海陸風に当てはめてみる (図 3.2)。式 (3.6) で理想気体の状態方程式を使い、図の閉曲線に沿って一周積分をする：

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= - \oint RT d\ln p, \\ &= -R \left( \bar{T}_2 \int_{p_0}^{p_1} d\ln p + \bar{T}_1 \int_{p_1}^{p_0} d\ln p \right), \\ &= R \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

すなわち、図のように陸上の温度 ( $\bar{T}_2$ ) が海上の温度 ( $\bar{T}_1$ ) よりも高い場合には、 $D\Gamma/Dt > 0$  となり、(反時計回りの) 循環が強められる。陸側が海側より暖かいので、これは当然予期されることである。 $p_0 = 1000\text{hPa}$ ,  $p_1 = 900\text{hPa}$ ,  $\bar{T}_2 - \bar{T}_1 = 10\text{K}$ ,  $L = 20\text{km}$ ,  $h = 1\text{km}$  とすると、この経路にそって平均した流速の時間変化は、 $25\text{m/s/h}$  となる。実際には、地面付近で粘性が働いてこのような加速を推える。また、循環が強くなると、温度移流により海陸の温度差が小さくなり、加速が押えられて、ある平衡状態に達すると考えられる。

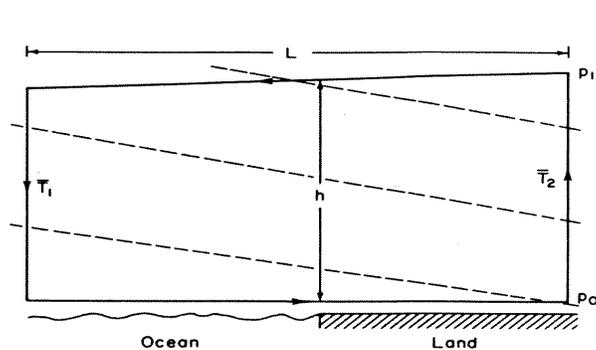


図 3.2: 循環定理を用いて海陸風の強化の見積もる問題 (Holton 1992; Fig. 4.3). 実線で示す閉曲線で矢印の向きに循環を考える. 破線は, 等比容線.

### 3.2.3 傾圧ベクトル

ビャークネスの循環定理 (3.6) の右辺に現れたソレノイド項について考察を加える. 比容  $\alpha = 1/\rho$  を用いると, ソレノイド項は次のように変形できる:

$$-\oint_C \alpha \text{grad} p \cdot ds = -\int_S \text{rot}(\alpha \text{grad} p) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S (\text{grad} \alpha \times \text{grad} p) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.8)$$

ここで, ストークスの定理を用い, さらに, ベクトル公式  $\text{rot}(\Phi \mathbf{A}) = \text{grad} \Phi \times \mathbf{A} + \Phi(\text{rot} \mathbf{A})$  と  $\text{rot} \text{grad} \Phi = 0$  を用いた. (3.8) 式の  $\mathbf{B} \equiv \text{grad} p \times \text{grad} \alpha$  を傾圧 (baroclinic) ベクトルと呼ぶ. 傾圧ベクトルは, 比容の勾配および気圧の勾配に直交するベクトルである. 結局, ビャークネスの循環定理 (3.6) は,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.9)$$

となる.

傾圧ベクトルが存在する大気を傾圧大気という. つまり, 比容の勾配と気圧の勾配が存在し, それらが平行でなければ, 傾圧大気である. これに対して, いたるところで傾圧ベクトルが 0 の大気を順圧 (barotropic) 大気という. 等比容面 (当密度面) と等圧面が平行な場合や, 密度または気圧が一定の場合に相当する. ときには, 前者に限って, つまり  $\rho = \rho(p)$  である場合を順圧大気ということもある.

### 3.2.4 ケルビンの循環定理

ビャークネスの循環定理で, 傾圧ベクトル  $\mathbf{B}$  が 0 であるとすると, 循環  $\Gamma$  が運動にしたがって保存する:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (3.10)$$

これをケルビン (Kelvin) の循環定理という. ケルビンの循環定理は, より一般的に保存力場のもとでの完全流体の連続的な運動で成り立つ (巽 1982; 第 5-3-1 節). 気圧傾度力の項は, 圧力関数を用いて, その勾配として書けるからである.

ケルビンの循環定理から, 一つの渦管は流体運動を通じて常に一つの渦管として保たれることがわかる. また, (3.4) 式で示したように渦管の強さ  $\Gamma$  は一定であるので, 次のヘルムホルツ (Helmholtz) の渦定理が成り立つ:

保存力のもとでの完全流体の連続的な運動においては、一つの渦管は常に一つの渦管として保たれ、その渦管の強さ  $\Gamma$  は時間的に一定である。

ヘルムホルツの渦定理より、ある時刻において渦なし ( $\omega = 0$ ) であった流体はその後常に渦なしであり、逆に、ある時刻において渦あり ( $\omega \neq 0$ ) であった流体はその後も渦ありである。すなわち、次のラグランジュの渦定理が成り立つ：

保存力のもとでの完全流体の連続的な運動においては、渦度は発生することも消滅することもない。

これは渦の不生不滅の定理ともいわれる。

循環がラグランジュ的に保存される状況を、具体的な例をもとに見ておこう (木田, 1994; 第 2 章)。川の水面上から底まで届く鉛直に伸びた渦管が水深のより深いところに流されるとき、渦の回転運動がどう変化するかを考える。非圧縮完全流体で回転軸対称な円柱状の渦管を仮定し、その半径を  $r_1$ 、長さ (水深) を  $l_1$  とすると、渦回転の速さは  $v_1 = \Gamma/2\pi r_1$  である。この渦がより深いところに流されて渦管の長さが  $l_2 (> l_1)$  になったとすると、非圧縮の仮定より渦管の体積は一定なので、半径は  $r_2 = r_1 \sqrt{l_1/l_2} < r_1$  と小さくなる。循環は保存されるので、渦回転の速さが  $v_2 = \Gamma/2\pi r_2 = (\Gamma/2\pi r_1) \sqrt{l_2/l_1} = v_1 \sqrt{l_2/l_1} > v_1$  となり、より速く回転することになる。この場合、循環は渦の半径と回転速度の積に比例するので、循環の保存は質点系の力学における角運動量保存則に対応するものである。

### 3.3 渦度方程式

#### 3.3.1 渦度と速度

速度場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  に対して、渦度は

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3.11)$$

で与えられる。逆に、渦度場  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  が与えられたときに、速度がどう決まるかを考える (巽 1982; 第 9-1 節)。

一般に、任意のベクトル場は、スカラーポテンシャル  $\Phi$  の勾配 ( $\text{grad} \Phi$ ) とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の回転 ( $\text{rot} \mathbf{A}$ ) の和として書けるので、速度場  $\mathbf{u}$  を渦なしの部分  $\mathbf{u}_1$  と渦ありの部分  $\mathbf{u}_2$  とに分けて、次のように表す：

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\ \mathbf{u}_1 = \text{grad} \Phi, \quad \mathbf{u}_2 = \text{rot} \mathbf{A}. \end{cases} \quad (3.12)$$

ただし、 $\mathbf{A}$  は  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  を満たすものとする。  $\text{rot} \text{grad} \Phi = 0$  であることに留意して、  $\text{rot}$  (3.12) をとることにより、

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}, \quad (3.13)$$

となる。結局、 $\mathbf{A}$  はポアソン (Poisson) 方程式 (3.13) の解として次のように与えられる：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'. \quad (3.14)$$

よって、速度場  $\mathbf{u}_2$  は、

$$\mathbf{u}_2 = \text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}', \quad (3.15)$$

のように表せる.

渦運動成分の有無は, 流体運動を大別する基準のひとつである. 速度場を (3.12) 式で分解して, スカラーポテンシャルだけで書ける流れを渦なし流と呼び, 逆に, ベクトルポテンシャルのある流れを渦あり流と呼ぶ (巽 1982; p.184).

### 3.3.2 慣性系における渦度方程式

まず, 慣性系での渦度方程式を導出しておく. 第 2.1.2 節と同様に, 粘性項では  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  を仮定し, 動粘性率を  $\nu$  とすると, ナビエ-ストークス方程式は次のように書ける:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (3.16)$$

ここで, 移流項はベクトル不変形 (??) で書いている.  $\operatorname{rot}$  (3.16) をとり,  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$  であることを使うと, 次の渦度方程式を得る:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \operatorname{rot} \mathbf{f} + \mathbf{B} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (3.17)$$

ここで,  $\mathbf{B}$  は傾圧ベクトルである. ベクトル公式より左辺第 2 項は (符合をつかえて) 次のように変形できる:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (3.18)$$

ただし,  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$  なので右辺第 3 項は 0 である. 結局, 粘性流体 (ニュートン流体) の渦度方程式は, 次のように書ける:

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \right) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{f} + \mathbf{B} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (3.19)$$

渦度  $\boldsymbol{\omega}$  のラグランジュ的な時間変化が右辺の各項によって引き起こされることを表わしている.

まず,  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  は, 外力の回転成分, 捻る力である. 流体は捻られると渦度が生ずる. 外力が重力のように保存力で, ポテンシャル  $\Phi$  の勾配で表わされるならば,  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$  となるので, それは捻る力ではない (渦度は変化しない).

傾圧流体ならば  $\mathbf{B} \neq 0$  であり, 渦度が生ずる. 例えば, 密度成層した流体をイメージして, 直線直交座標系  $(x, y, z)$  で  $\operatorname{grad} \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z$ ;  $\frac{\partial \alpha}{\partial z} > 0$  とし,  $x$  軸の正の向きに圧力が高くなっている  $\left( \operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x$ ;  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0 \right)$  とすると,  $\mathbf{B} = -\frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y$  となり,  $y$  軸に垂直な面内に負の渦度が生じる. これは, 同じ圧力傾度力がかかるとき重い流体よりも軽い流体のほうが加速されやすいことを思えば,  $\frac{\partial \omega_y}{\partial t} < 0$  となる捻る力が流体に働くことがイメージできる. 一方, 順圧流体では  $\mathbf{B} = 0$  であり, 圧力傾度力によって渦度が変化することはない. これらの様子は, ビャークネスの循環定理 (3.9) を微小な流体要素に当てはめたものといえる.

運動方程式で粘性により運動量が散逸したように, 渦度方程式では同じ形で渦度が散逸する. 非粘性流体 ( $\nu = 0$ ) であれば, 渦度の粘性散逸はない.

以上でみたように, 非粘性順圧流体で外力が保存力である場合には, 渦度方程式 (3.19) の右辺第 3 項以下は 0 となる. しかし, そのような場合でも渦度はラグランジュ的な保存量ではない. ふつう, 右辺の第 1 項と第

2項が残ってしまう. 具体的に, やはり直線直交座標系  $(x, y, z)$  でこれらの項の鉛直 ( $z$ ) 成分を考えると,

$$\begin{aligned}\hat{e}_z \cdot \{(\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \text{div}\mathbf{u}\} &= \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right) w - \omega_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ &= \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),\end{aligned}\quad (3.20)$$

となる. (3.20) 式の右辺の第1項と第2項は, 鉛直流  $w$  の水平シアーにより渦度の水平成分が起き上がって  $\omega_z$  成分を変化させようとする傾向であり, 起き上がり項と呼ばれる. 一般に, 渦度ベクトルと直交する流れが渦度ベクトル方向に変化すれば, 渦度ベクトルが傾いて渦度の時間変化をうむ. (3.20) 式の右辺第3項は, 渦度の鉛直成分  $\omega_z$  が水平収束により強められる項で, 水平収束項と呼ばれる. 一般に, 渦度ベクトルと直交する平面上で流れの場に収束があれば, 渦度はかき集められて強められる.

非圧縮流体の場合には  $\text{div}\mathbf{u} = 0$  であり, (3.20) 式の水平収束項は  $\omega_z \frac{\partial w}{\partial z}$  となる. これは, 渦が  $z$  方向に伸長 ( $\partial w / \partial z > 0$ ) することにより  $\omega_z$  成分を強化させる項であり, 伸び縮み項と呼ばれる. これは, 第3.2.4節でみたケルビンの循環定理の微分表現に相当する.

### 3.3.3 ベルヌーイの定理 (おまけ)

前小節ではベクトル不変形の運動方程式から出発したので, 少しわき道に入るがベルヌーイ (Bernoulli) の定理を見ておこう. (昔はなぜか高校の物理で習った流体力学の定番問題である.) 非圧縮 ( $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ ) 完全 ( $\nu = 0$ ) 流体を考えると, 運動方程式 (3.16) は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \mathbf{u} \times \text{rot}\mathbf{u} = -\text{grad}\Phi - \frac{1}{\rho_0} \text{grad}p, \quad (3.21)$$

と書ける. ここで, 外力は保存力であるとして, ポテンシャル  $\Phi$  の勾配で表している. さらに整理すると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho_0} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Phi \right) + \mathbf{u} \times \text{rot}\mathbf{u}, \quad (3.22)$$

となる. この表式より, 次のベルヌーイの定理が成り立つことがわかる (巽, 1982; p.67):

定常流 ( $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ ) では, 流線または渦線に沿って  $\frac{p}{\rho_0} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Phi$  は一定となる.

渦度  $\boldsymbol{\omega}$  は速度の  $\text{rot}$  として定義される ( $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot}\mathbf{u}$ ) ので, 定常流で式 (3.22) の左辺が0の場合, 右辺第1項の  $\text{grad}$  は  $\mathbf{u}$  および  $\boldsymbol{\omega}$  の方向成分をもたない. すなわち, 流線 ( $\mathbf{u}$  の方向) または渦線 ( $\boldsymbol{\omega}$  の方向) に沿って  $\frac{p}{\rho_0} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Phi$  の勾配が0であるので, 上の定理が成り立つ. ただし, 一定となる値は, 一般に流線または渦線ごとに異なる.

保存外力が重力である場合には,  $p + \frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{u}|^2 + \rho_0gz = \text{一定}$ , となり, 大きな容器に入れた液体が小さな孔から流出する場合の流速を求めることができる. また, 流速を測るピトー管やベンチュリー管もこのベルヌーイの定理を応用したものである.

### 3.3.4 回転系における渦度方程式

一定角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  で回転する座標系では, 遠心力項を重力項 ( $\mathbf{f}$  の一部) に含めることによりナビエ-ストークス方程式が

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \mathbf{u} \times (\text{rot}\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (3.23)$$

と書ける。慣性系の (3.16) 式と各項を対比すればわかるように、慣性系での渦度方程式 (3.19) の渦度  $\omega$  を回転系での相対渦度  $\omega$  と惑星渦度  $2\Omega$  の和で置き換えるだけで、回転系の渦度方程式が得られる：

$$\frac{D\omega_a}{Dt} = (\omega_a \cdot \text{grad})\mathbf{u} - \omega_a \text{div}\mathbf{u} + \text{rot}\mathbf{f} + \mathbf{B} + \nu\Delta\omega, \quad (3.24)$$

$$\omega_a \equiv \omega + 2\Omega. \quad (3.25)$$

ここで、 $\omega_a$  は絶対渦度と呼ばれている。

### 3.4 ポテンシャル渦度の保存則 —理想気体—

ケルビンの循環定理は有限の閉曲線 (有限の大きさの渦管) に対して得られたラグランジュ的保存則であったが、その微小要素版にあたる渦度方程式は、そのようなラグランジュ的保存則を表していない。この節では、断熱の完全流体ではラグランジュ的保存量となるポテンシャル渦度を導入し、二つの道筋でポテンシャル渦度方程式を導出しておく (栗原, 1979; 第 6.4 節を参照)。従来、potential vorticity という単語は渦位と訳されてきたが、“potential” を「位」の文字で表すことに抵抗があるので、あえてポテンシャル渦度と表記する。同じように、温位 (potential temperature) はポテンシャル温度というほうが一貫性がある。

#### 3.4.1 ポテンシャル渦度

ビャークネスの循環定理 (3.6) で閉曲線の中をソレノイドが貫かないように  $C$  をとると、そのときの循環の時間変化は 0 である。このようにして循環の保存を課し、さらに質量保存則を組み合わせることによって、ポテンシャル渦度と呼ばれる保存量を定めることができる。

第 3.2.3 節で考えたように、傾圧ベクトルは、

$$\mathbf{B} = -\text{grad}\alpha \times \text{grad}p = -c_p \text{grad}(\ln\theta) \times \text{grad}T, \quad (3.26)$$

で与えられるので、当比容 (密度) 面、等圧面、等温位面、または等温面上で閉曲線  $C$  をとればソレノイドはその中を貫かない。さらに、断熱過程であれば  $D(\ln\theta)/Dt = 0$  なので、この閉曲線は同じ温位面上に留まり続けることになる。したがって、温位面上に微小面積  $\Delta S$  をもつ閉曲線をとって、その絶対渦度を  $\omega_a$  とすると (図 3.3)、ケルビンの循環定理 (3.10) および循環の定義 (3.3) より、

$$\omega_a \cdot \mathbf{n}\Delta S = \omega_a \cdot \frac{\text{grad}\theta}{|\text{grad}\theta|} \Delta S = \text{一定}, \quad (3.27)$$

である。つぎに、微小面積  $\Delta S$  を系の従属変数で表すことにする。等温位面  $\theta$  とわずかに離れた  $\theta + d\theta$  面の間にはさまれ、 $\Delta S$  の底面をもつ微小な筒を考えると、この筒の中の質量は不変であるので、

$$\rho\Delta S \frac{d\theta}{|\text{grad}\theta|} = \text{一定}, \quad (3.28)$$

である。ここで、 $d\theta/|\text{grad}\theta|$  は筒の長さにあたる。 $d\theta$  も一定なので、(3.27)、(3.28) より  $\Delta S$  を消去して、

$$P \equiv \frac{\omega_a \cdot \text{grad}\theta}{\rho} = \text{一定}, \quad (3.29)$$

となる。この量  $P$  をポテンシャル渦度と呼ぶ。渦度はベクトル  $\text{rot}\mathbf{u}$  であるが、ポテンシャル渦度はスカラーであることに注意すべきである。結局、ラグランジュ式時間微分を用いて、ポテンシャル渦度の保存則は、

$$\frac{DP}{Dt} = 0, \quad (3.30)$$

と表される。

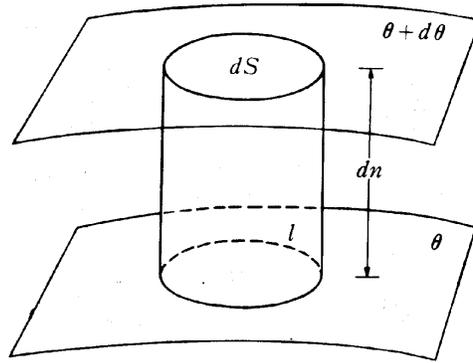


図 3.3: 等温面に挟まれた気柱の断熱変化 (小倉 1978; 図 1.14).

### 3.4.2 エルテルのポテンシャル渦度

上記のように定義したポテンシャル渦度がラグランジュ的保存量であることは、エルテル (Ertel, 1942) によって与えられたので、エルテルのポテンシャル渦度と呼ぶことがある。この小節では、小倉 (1978; p.32) を参考にして、エルテルのポテンシャル渦度保存則のベクトル演算による導出法をまとめておく。

回転系での渦度方程式 (3.24) で、外力がなく、粘性もない保存的な状況を考える。連続方程式 (1.25) もあわせて書くと、

$$\frac{D\omega_a}{Dt} = (\omega_a \cdot \text{grad})\mathbf{u} - \omega_a \text{div}\mathbf{u} + \mathbf{B}, \quad (3.31)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}\mathbf{u} = 0, \quad (3.32)$$

である。これらから、 $\text{div}\mathbf{u}$  を消去して整理すると、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega_a}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \{ (\omega_a \cdot \text{grad})\mathbf{u} + \mathbf{B} \}, \quad (3.33)$$

となる。一方、エネルギー方程式で断熱の仮定より、温位  $\theta$  はラグランジュ的保存量である ( $D\theta/Dt = 0$ )。この式の勾配をとると、 $\text{grad}\theta$  についての式が、

$$\frac{D}{Dt}(\text{grad}\theta) = -\nabla\mathbf{u} \cdot \text{grad}\theta, \quad (3.34)$$

と書ける。ここで、 $\nabla\mathbf{u}$  は変形速度テンソル ( $\partial u_i / \partial x_j$ ) である。式 (3.33) と  $\text{grad}\theta$  の内積をとったものと、式 (3.34) と  $\omega_a / \rho$  の内積をとったものを辺々加えると、ポテンシャル渦度保存則を得る：

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega_a \cdot \text{grad}\theta}{\rho} \right) = 0. \quad (3.35)$$

ここで、傾圧ベクトル  $\mathbf{B}$  は (3.26) 式のように書けるので、 $\text{grad}\theta \cdot \mathbf{B} = 0$  という関係式を用いている。

ポテンシャル渦度  $P$  は温位 (ポテンシャル温度)  $\theta$  とともに、気象力学、地球流体力学のもっとも重要な物理量である (Hoskins, McIntyre and Robertson, 1985; 岸保・佐藤, 1986; Hoskins, 1991)。重力場のなかで温位の分布が力学的に不安定な場合には対流が生じ、安定な場合には波動 (浮力を復元力とする重力波) が存在するように、ポテンシャル渦度の分布に依存して、流れが不安定となったり波動が伝播したりする。これらの具体的な流れの安定性解析や波動の伝播問題は、今後の章でひとつずつ取り上げていくことになる。

14/5/92 12GMT

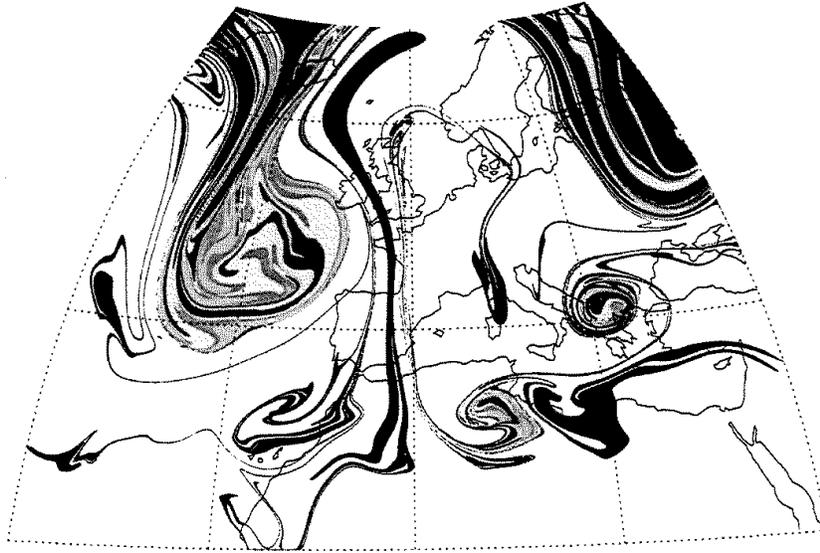


図 3.4: 対流圏界面付近 (320K 等温位面) 上での PV の移流実験結果 (Appenzeller et al., 1996 より). 陰影部は成層圏大気で, 温帯低気圧の発達時に対流圏大気と混ざり合う様子を示す.

ところで, 何らかの平衡条件が仮定できれば, ポテンシャル渦度より速度場や熱力学的状態変数を見積もることができる. すなわち, ポテンシャル渦度の分布がわかれば基本的に流れの様子が把握できることになる. ポテンシャル渦度分布の時間変化自体は, 得られた速度場をもとにラグランジュ的保存則 (3.35) により記述できるので, 流れの場の時間発展が求められることになる. 近年, 流れの場が不安定な場合の擾乱の発達や, 安定な場のなかの波動の伝播などを, ポテンシャル渦度の動態をもとに理解しようとする立場が提唱されている. これを, ポテンシャル渦度の英語の頭文字をとって “PV thinking” という. また, ポテンシャル渦度と温位を中心に様々な現象のデータ解析を行なうことを “PV- $\theta$  解析” という.

断熱完全流体の場合, ポテンシャル渦度と温位はラグランジュ的保存量であり, 流体につけた標識, トレーサーとみなすことができる. それらの分布自体が運動に影響を及ぼすので, 力学的トレーサーとか能動的 (active) トレーサーという. これに対して, 力学的影響のないトレーサー, 例えば, ある元素の放射性同位体などを受動的 (passive) トレーサーという. このようなトレーサーは, 流体運動に伴う物質の輸送過程を診断するのに有効である. 加熱や熱拡散, 粘性の影響が無視できるかぎり, 流体粒子は等 PV 面上, 等温位面上を動くので, ある等 PV 面上である等温位面上に位置する流体粒子は, これらの面の交線上を動くことになる (図 3.4). PV 分布と温位分布に加えてもうひとつ何らかのトレーサーの空間分布が分かれば, 原理的には, 3 次元的な流体粒子運動が完全に把握できることになる. Ertel(1942) の論文以前に, Rossby(1937) は, 先駆的に等温位面上の比湿 (凝結がなければラグランジュ的保存量) の分布図を描いて大気の大規模な水平混合過程を議論している.

### 3.5 浅水方程式系でのポテンシャル渦度の保存則

前節では陰に大気の運動を考えて、理想気体でのポテンシャル渦度の保存を議論した。これに対して、海洋のようなほとんど非圧縮な流体の運動を念頭に置けば、異なる表式のポテンシャル渦度保存則が得られる。ただし、渦度方程式がラグランジュ的保存則を表していないので、それにかわる物理量を探そうという動機は同じである。まず、自由表面のある均質非圧縮流体で運動の鉛直スケールが水平スケールに比べて非常に小さいと仮定することにより、水平 2 次元の浅水方程式系を導出する。そして、その系でのポテンシャル渦度の保存則を考える。

水平 2 次元の浅水方程式系は、大気の大規模運動の力学を考える上で有益であることが多い。3 次元大気運動の力学的本質のある部分が浅水方程式系にも含まれているからである。2 次元系のほうが解析が簡単なので、力学的本質を理解するために、この講義でも浅水系や 2 次元非圧縮流体系をとりあげることがある。ポテンシャル渦度の保存もそのような力学的本質の共通概念である。

#### 3.5.1 浅水方程式系

非圧縮で均質 ( $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ ) な流体 (ここでは水とよぶ) を考えると、従属変数  $p, \mathbf{u}$  に対して、連続方程式と運動方程式で支配方程式が閉じる。さらに粘性項を無視して完全流体とすると、これらの支配方程式系は次のように書ける：

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p. \quad (3.37)$$

ただし、系の回転は  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ 、外力は重力だけ  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  とする。

静止状態での水面を  $z = 0$  とし、平均的な水深を  $z = -D$ 、底面の起伏 ( $z = -D$  面から偏差) を  $\eta_B(x, y)$  とする。運動状態時の水面 (自由表面) の変位を  $\eta(x, y, t)$  とすると、ある深さ  $z$  での圧力は、運動方程式の鉛直成分で静力学的平衡 (2.20) の近似が成り立つとして、

$$p(x, y, z, t) = p(x, y, \eta, t) + \rho_0 g(\eta - z), \quad (3.38)$$

となる。ここで、水面での大気圧  $p(x, y, \eta, t)$  が一定であるとする、 $p$  の変化は  $z$  より上にある単位断面積の流体柱の重さによる (右辺第 2 項)。この仮定の下で圧力の水平勾配をとると、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_0 g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (3.39)$$

となり、これらが  $z$  に依存しないことがわかる。すなわち、水平の加速度が  $z$  に依存しないわけで、初期に運動が  $z$  に依存しなければ、水平速度はずっと  $z$  に依存しないままである。また、ロスビー数が小さい場合には水平速度がほとんど  $z$  に依存しない (これをテイラー-プラウドマン (Taylor-Proudman) の定理という；後章参照) ので、そのような状況を想定して水平速度が  $z$  に依存しないと仮定する：

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (3.40)$$

以上の仮定のもとに、運動方程式の水平成分は次のように書ける：

$$\frac{D_H u}{Dt} - f v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.41)$$

$$\frac{D_H v}{Dt} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (3.42)$$

ここで、コリオリパラメータ  $f = 2\Omega$  であり、水平 2 次元のラグランジュ微分の記号は、

$$\frac{D_H}{Dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.43)$$

である。一方、連続方程式で水平発散項は  $z$  に依存しないので、鉛直に  $-D + \eta_B$  から  $\eta$  まで積分すると、

$$w(z = \eta) - w(z = -D + \eta_B) = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_{-D + \eta_B}^{\eta} dz = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\eta + D - \eta_B), \quad (3.44)$$

となる。ここで、

$$w(z = \eta) = \frac{D_H \eta}{Dt}, \quad (3.45)$$

$$w(z = -D + \eta_B) = \frac{D_H \eta_B}{Dt} = \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta_B, \quad (3.46)$$

であるので、流体の深さを  $h(x, y, t) \equiv \eta(x, y, t) + D - \eta_B(x, y)$  で表わすと、(3.44) 式は、

$$\frac{D_H h}{Dt} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h = 0, \quad (3.47)$$

となる。あるいは、ラグランジュ形式をフラックス形式にかえると、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0, \quad (3.48)$$

となる。水平質量フラックスの収束発散により流体の深さが変化することを表わしている。運動方程式 (3.41), (3.42) は、右辺を  $h$  で表して、

$$\frac{D_H u}{Dt} - fv = -g \frac{\partial}{\partial x}(h + \eta_B), \quad (3.49)$$

$$\frac{D_H v}{Dt} + fu = -g \frac{\partial}{\partial y}(h + \eta_B), \quad (3.50)$$

と書けるので、これらと連続方程式 (3.47) または (3.48) とで、水平速度  $u(x, y, t), v(x, y, t)$  および深さ  $h(x, y, t)$  を従属変数とする閉じた方程式系となっている。これらを浅水方程式系という。

### 3.5.2 浅水系でのポテンシャル渦度

浅水方程式系の従属変数は  $z$  依存性がないので、渦度は鉛直成分のみを考えればよい。  $\frac{\partial}{\partial x}(3.50) - \frac{\partial}{\partial y}(3.49)$  より、渦度方程式の鉛直成分は、

$$\frac{D_H \zeta}{Dt} = -(\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3.51)$$

となる。ただし、 $\zeta$  は  $\zeta \equiv \hat{e}_z \cdot \boldsymbol{\omega} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  であり、相対渦度の鉛直成分である。回転系での渦度方程式 (3.24) でもみたように、浅水系においても  $\zeta$  はラグランジュ保存量にはならず、絶対渦度  $(\zeta + f)$  の水平収束項により時間変化することを表わしている。

渦度方程式 (3.51) および連続方程式 (3.47) から水平発散項を消去すると、

$$\frac{D_H}{Dt}(\zeta + f) = \frac{\zeta + f}{h} \frac{D_H h}{Dt},$$

となり、結局、

$$\frac{D_H}{Dt} \left( \frac{\zeta + f}{h} \right) = 0, \quad (3.52)$$

となる。浅水系でのポテンシャル渦度を  $P \equiv (\zeta + f)/h$  として、(3.52) 式はそのラグランジュ的保存を表わしている。第 3.4.1 節では、二つの等エントロピー面間にある渦管を考え、循環の保存と質量保存を使ってポテンシャル渦度の保存を導出した。ここでは、底面  $z = \eta_B$  と自由表面  $z = \eta$  を二つの物質面にとり、ポテンシャル渦度の保存を導出したことになる。また、第 3.2.4 節でのケルビンの循環定理を示す例題 (川のなかの鉛直渦管) は、(3.52) 式で  $f = 0$  とし積分表現にただけで、同じ内容を述べているのである。

底面に起伏がある浅水系で、系の回転が重要な場合を考えてみよう。ロスビー数が 1 に比べて十分小さい ( $Ro = U/(fL) \ll 1$ ) ならば、相対渦度 ( $\sim U/L$ ) が惑星渦度 ( $f$ ) に比べて無視できて、ポテンシャル渦度の保存則は、

$$\frac{D_H}{Dt} \left( \frac{f}{h} \right) = 0, \quad (3.53)$$

と近似できる。もしもコリオリパラメータ  $f$  が一定ならば、流れは深さ  $h$  を保存する流れでなければならない。もしも、自由表面の変位が底面の起伏に比べて十分小さく  $\eta \simeq 0$  とできるのであれば、流体塊は等深線 (あるいは起伏  $\eta_B$  の等高線) に沿って流れることになる。すなわち、底面に孤立した凸部または凹部があると流体はこれを避けて流れるので、凸部 (凹部) のうえに柱のように動かない部分ができる。これをテイラーの柱 (Taylor column) という。

## 参考文献

- Appenzeller et al., 1996: Fragmentation of stratospheric intrusions. *J. Geophys. Res.*, **101**, 1435–1456.
- Ertel, H., 1942a: Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. *Met. Z.*, **59**, 271–281.
- Ertel, H., 1942b: Über des Verhältnis des neuen hydrodynamischen Wirbelsatzes zum Zirkulationsatz von V. Bjerknes. *Met. Z.*, **59**, 385–387.
- 岸保 勘三郎・佐藤 信夫, 1986: 「新しい気象力学」, 東京堂出版, 204pp.
- Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, 507pp.
- Hoskins, B.J., 1991: Towards a PV- $\theta$  view of the general circulation. *Tellus*, **43AB**, 27–35.
- Hoskins, B.J., M.E. McIntyre and A.W. Robertson, 1985: On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quart. J.R. Met. Soc.*, **111**, 877–946.
- 木田 重雄, 1994: パリティックス「いまさら流体力学?」, 丸善, 197pp.
- 栗原 宣夫, 1979: 「大気力学入門」, 岩波全書 317, 244pp.
- 小倉 義光, 1978: 「気象力学通論」, 東京大学出版会, 249pp.
- Rossby, C.G. and Collaborators, 1937: Aerological evidence of large-scale mixing in the atmosphere. *Trans. American Geophys. Union*, **18**, 130–136.
- 巽 友正, 1982: 「流体力学」, 培風館, 453pp.



## 第4章 定常軸対称渦

この章では、完全流体中の孤立した渦の運動に注目して、慣性系および回転系での定常軸対称渦を解析する。まず、回転軸（鉛直）方向の依存性のない2次元運動を詳しく調べ、テイラーの定常軸対称渦実験や大気中の理想化した3次元定常軸対称渦の形態についても触れる。

### 4.1 慣性系での定常軸対称渦

#### 4.1.1 定常軸対称渦と旋衡風平衡

重力場  $g$  の中におかれた密度一定 ( $\rho = \rho_0$ ) の完全流体の連続方程式および運動方程式は次で与えられる：

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \mathbf{g}. \quad (4.2)$$

$z$  座標を鉛直上向きとする円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いて、鉛直方向依存性のない2次元運動 ( $\partial/\partial z = 0, w = 0$ ) を仮定すると、上の方程式系は次のようになる：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad (4.3)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v - \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (4.6)$$

ここで、速度  $\mathbf{u} = (u, v, 0)$  である。運動方程式の鉛直成分 (4.6) は静力学的平衡を表している。このとき、渦度の鉛直成分  $\zeta$  は次で与えられる：

$$\zeta = \mathbf{e}_z \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (4.7)$$

ここで、定常 ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ) で軸対称 ( $\partial/\partial \theta \rightarrow 0$ ) の仮定をおくと、連続方程式 (4.3) より  $\partial(ru)/\partial r = 0$  となる。 $r = 0$  で  $u$  が有限であるという条件より、結局、

$$u = 0, \quad (4.8)$$

となる。これを半径方向の運動方程式 (4.4) に代入して、

$$\frac{v^2}{r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4.9)$$

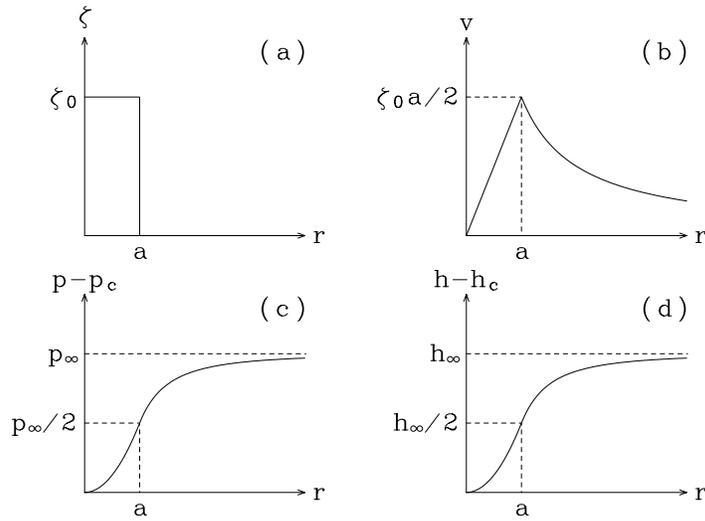


図 4.1: ランキン渦の構造. (a) 渦度の鉛直成分, (b) 接線方向速度, (c) 渦の中心との圧力差, (d) 渦の中心との自由表面高度差.

を得る. これは旋衡風平衡 (cyclostrophic wind balance) と呼ばれる状態で, 回転軸対称運動に伴う遠心力が気圧傾度力と釣り合っている. 遠心力は  $v^2$  に比例するので, 渦の回転の向きは時計回りと反時計回りの両方がともに可能である.

$u = 0$  なので, 渦度の鉛直成分  $\zeta$  は次になる:

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv). \quad (4.10)$$

たとえば, 角運動量 ( $rv$ ) が半径方向に一定の渦運動 (原点で発散するが) ならば, その渦度は 0 である. 一方, 角速度  $\omega_a$  で剛体回転している場合には,  $v = r\omega_a$  なので  $\zeta = 2\omega_a$  となり, 渦度は回転角速度の 2 倍である.

#### 4.1.2 ランキン渦

ある仮想的な渦度分布を与えて, それがどのような流れ場であるかを見る. 図 4.1(a) のように, 渦度が半径  $a$  の円内で一様 ( $\zeta_0$ ) に分布し, それより外側では 0 である円形渦を考える:

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_0 & (r \leq a), \\ 0 & (r > a). \end{cases} \quad (4.11)$$

$r \leq a$  では,  $\partial(rv)/\partial r = \zeta_0 r$  より,  $r = 0$  で  $v$  が有限であるという条件を用いて,

$$v = \frac{\zeta_0}{2} r, \quad (4.12)$$

となる. 前小節で述べたように, これは角速度  $\zeta_0/2$  の剛体回転である. 一方,  $r > a$  では,  $\partial(rv)/\partial r = 0$  より  $v = C/r$  となるが,  $r = a$  で  $v$  が連続であるとして定数  $C$  を定め,

$$v = \frac{\zeta_0 a^2}{2} \cdot \frac{1}{r}, \quad (4.13)$$

となる。すなわち、半径  $a$  の円の外側では、角運動量が一定 ( $= \zeta_0 a^2/2$ ) の渦運動である。これらの接線方向の速度場を図 4.1(b) に示す。

速度分布が与えられると、旋衡風平衡の式 (4.9) より圧力分布を求めることができる：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \frac{v^2}{r} = \begin{cases} \frac{\rho_0 \zeta_0^2}{4} r & (r \leq a), \\ \frac{\rho_0 \zeta_0^2 a^4}{4} \cdot \frac{1}{r^3} & (r > a), \end{cases} \quad (4.14)$$

を円の中心より半径方向に積分する。中心での圧力を  $p_c$  とし、 $r = a$  で  $p$  が連続であるとして、最終的に次を得る：

$$p - p_c = \begin{cases} \frac{\rho_0 \zeta_0^2}{8} r^2 & (r \leq a), \\ \frac{\rho_0 \zeta_0^2 a^2}{8} (2 - \frac{a^2}{r^2}) & (r > a). \end{cases} \quad (4.15)$$

この結果を図 4.1(c) に示す。ただし、無限遠方での圧力差  $p_\infty$  は  $p_\infty \equiv \rho_0 \zeta_0^2 a^2/4$  である。圧力は渦の中心で最も低く、 $r$  とともに単調に増加する。 $r = a$  では曲率の符号が変わっている。このような渦を定常円形渦という。

ここで、重力場のなかに置かれた定常円形渦を考える。流体は静力学平衡 (4.6) にあり、圧力はそれより上にある流体分布で決まっている。流体は自由表面  $z = h$  で圧力一定 ( $= p_a$ ) の大気に接しているとして、ある基準高度  $z = 0$  から  $z = h$  まで (4.6) を積分する：

$$p_a - p|_{z=0} = -\rho_0 g h. \quad (4.16)$$

渦の中心での自由表面の高さを  $h_c$  として、 $p|_{z=0}$  に (4.15) を代入すると、最終的に次を得る：

$$h - h_c = \begin{cases} \frac{\zeta_0^2}{8g} r^2 & (r \leq a), \\ \frac{\zeta_0^2 a^2}{8g} (2 - \frac{a^2}{r^2}) & (r > a). \end{cases} \quad (4.17)$$

すなわち、渦の内側 ( $r \leq a$ ) では回転放物面となり、外側では  $r^2$  に反比例したくぼみとなる (図 4.1(d))。このような渦をランキン (Rankine) の結合渦という。定常なランキン渦は完全流体の流れとしては存在可能であるが、粘性がある場合にはそのままでは保たれない。しかし、このような水面のくぼみはよく観察されるところであり、それを理想化した解となっている。

## 4.2 回転系での定常軸対称渦

慣性系での定常軸対称渦に対応して、ここでは  $\Omega$  で一様回転する系での定常軸対称渦を解析する。渦の空間・時間スケールによりいくつかの平衡状態が存在する。

### 4.2.1 定常軸対称渦

第 4.1.1 節の枠組みを  $\Omega$  で一様回転する系に拡張する。遠心力は重力ポテンシャルに込める「伝統的な近似」(第 2.2.2 節) の下で、密度一定 ( $\rho = \rho_0$ ) の完全流体の連続方程式および運動方程式は次で与えられる：

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \mathbf{g}. \quad (4.19)$$

$z$  座標を鉛直上向きとする円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いて、鉛直方向依存性のない 2 次元運動 ( $\partial/\partial z = 0, w = 0$ ) を仮定すると、上の方程式系は速度成分を  $(u, v, 0)$  として次のようになる：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad (4.20)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u - \frac{v^2}{r} - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.21)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v - \frac{uv}{r} + 2\Omega u = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (4.23)$$

ここで、定常 ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ) で軸対称 ( $\partial/\partial \theta \rightarrow 0$ ) の仮定をおくと、慣性系での場合と同様に、連続方程式 (4.20) より  $u = 0$  となる。これを半径方向の運動方程式 (4.21) に代入して、次式を得る：

$$\frac{v^2}{r} + 2\Omega v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (4.24)$$

これは傾度風平衡 (gradient wind balance) と呼ばれる状態で、遠心力 ( $Ce \equiv v^2/r$ )、コリオリ力 ( $Co \equiv 2\Omega v$ )、および、気圧傾度力 ( $Pr \equiv -\rho_0^{-1} \partial p / \partial r$ ) が釣り合っている。

#### 4.2.2 旋衡風平衡・傾度風平衡・地衡風平衡・慣性流

傾度風平衡 (4.24) は遠心力、コリオリ力、気圧傾度力の 3 つの力の釣り合いであるが、考える渦の時間・空間スケールによって異なる平衡状態となる。ここでは、遠心力とコリオリ力の比としてロスビー (Rossby) 数を導入する：

$$Ro \equiv \frac{Ce}{Co} = \frac{v(r_0)}{2\Omega r_0}. \quad (4.25)$$

ロスビー数は遠心力とコリオリ力の相対的な重要性をあらわす無次元数である。以下では、i)  $Ro \gg 1$ , ii)  $Ro \sim 1$ , iii)  $Ro \ll 1$  の 3 つの場合に分けて、それぞれの平衡渦の特徴を示し、現実大気中の対応物について実例を紹介する。

##### i) $Ro \gg 1$ ：旋衡風平衡

コリオリ力の効果が小さく座標系の回転の影響が無視できて、慣性系での定常軸対称渦と同様な釣り合い状態となる。速度  $v$  と気圧傾度力との関係は、

$$v = \pm \sqrt{\frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}}, \quad (4.26)$$

となり、適当な座標スケールの下に図 4.2 の点線であらわされる。すべて、渦の中心にいくほど低圧 ( $\partial p / \partial r > 0$ ) の低圧渦で、渦の回転の向き ( $v$  の符号) は時計回りと反時計回りの両方がともに可能である (図 4.3 の①と②)。

現実大気中の実例としては竜巻がある。その特徴的な速度は  $v \sim O(10 \sim 10^2) \text{ ms}^{-1}$  であり、特徴的な半径は  $r \sim O(10 \sim 10^2) \text{ m}$  であるので、 $2\Omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  として、ロスビー数は  $Ro \sim 10^4$  で与えられる。竜巻の回転の向きが両方とも同程度観測されることは、この規模の渦にとってコリオリ力が重要でないことを示している。

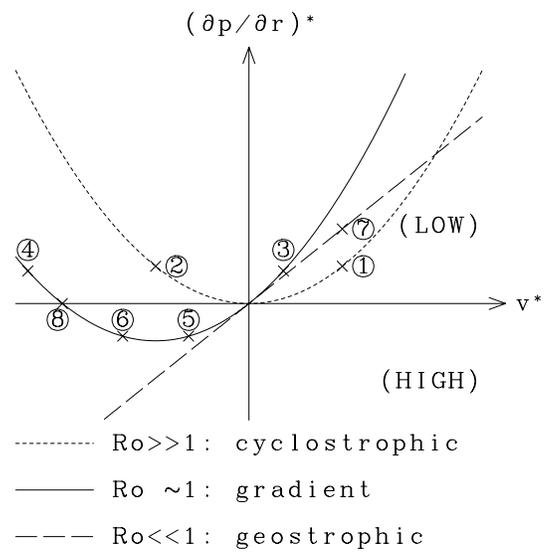


図 4.2: 旋衡風平衡・傾度風平衡・地衡風平衡. 渦の回転速度 (横軸) と気圧傾度力 (縦軸) との関係を示す。それぞれの場合毎に適当に無次元化して示す。

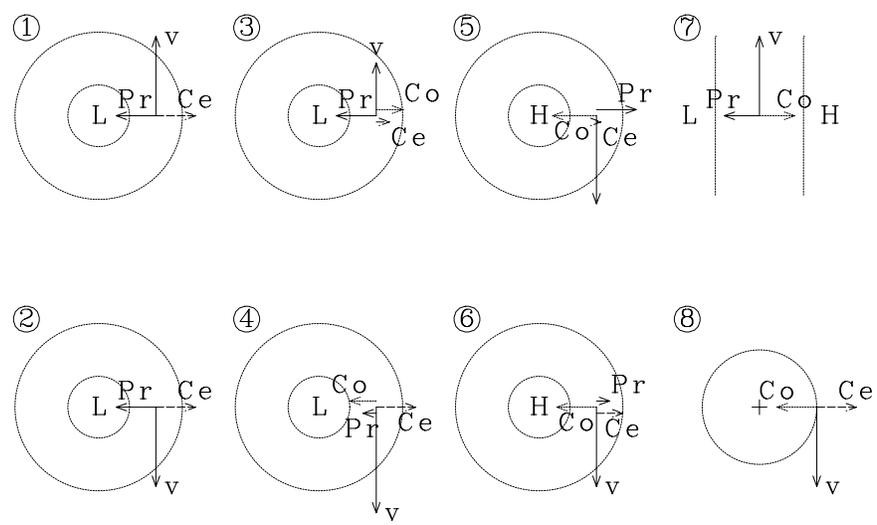


図 4.3: 旋衡風平衡・傾度風平衡・地衡風平衡. 図 4.2 で丸数字で示した 7 つの場合における力の釣合いの模式図。矢印の長さなどは比較できない。

ii)  $Ro \sim 1$ : 傾度風平衡

コリオリ力と遠心力が同程度で、気圧傾度力との 3 つの力の釣り合いとなる。速度  $v$  と気圧傾度力との関係は、

$$v = -r\Omega \pm \sqrt{r^2\Omega^2 + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}}, \quad (4.27)$$

となり、適当な座標スケールの下に図 4.2 の実線であらわされる。この場合には、低圧渦 (③と④) および高圧渦 (⑤と⑥) が可能で、それぞれ図 4.3 ような力の釣り合いとなる。

現実大気中の実例としては台風や総観規模の高気圧・低気圧などがある。それらの特徴的な速度は  $v \sim O(10) \text{ ms}^{-1}$  であり、特徴的な半径は  $r \sim O(10^5 \sim 10^6) \text{ m}$  であるので、ロスビー数は  $Ro \sim O(1 \sim 10^{-1})$  で与えられる。観測されるものは図の③と⑤のような力の釣り合いであり、④や⑥のような釣り合いの低圧渦・高圧渦は観測されない。軸対称定常解としてはともに存在可能であるが、後者 2 つは力学的に不安定な釣り合いにあると考えられる。

iii)  $Ro \ll 1$ : 地衡風平衡

流れの曲率が小さく遠心力が無視できる場合には、コリオリ力が気圧傾度力と釣り合う地衡風平衡 (geostrophic wind balance) となる。速度  $v$  と気圧傾度力との関係は、

$$v = \frac{1}{2\Omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.28)$$

となり、適当な座標スケールの下に図 4.2 の破線であらわされる。 $Ro \rightarrow 0$  の極限では遠心力 (曲率) が 0 となり、渦ではなく平行な等圧線 (図 4.3 の⑦のような状況) となる。

現実大気中の実例としては、地球規模の周極渦がこの状況に近い。その特徴的な速度は  $v \sim 10 \text{ ms}^{-1}$  であり、特徴的な半径は  $r \sim 5 \times 10^6 \text{ m}$  であるので、ロスビー数は  $Ro \sim O(10^{-2})$  となり、ほとんど遠心力の効果は無視できる。

以上がロスビー数の大小をもとにした釣り合い状態の分類であるが、最後に、特別な場合として、気圧傾度力が 0 の状態を考えておく。

iv)  $Pr \rightarrow 0$ : 慣性流

傾度風平衡の式 (4.24) で気圧傾度力を 0 とする (図 4.2 で⑧の場合) と、遠心力とコリオリ力が釣り合う状態となる (図 4.3 の⑧) :

$$\frac{v^2}{r} + 2\Omega v = 0, \quad (4.29)$$

これより  $v$  を求めると、

$$v = -2\Omega r, \quad (4.30)$$

となり、角速度が一定 ( $\omega = v/r = -2\Omega$ ) の回転運動となる。流れにのった流体粒子の回転周期は  $T = 2\pi r/|v| = \pi/|\Omega|$  であり、場の回転周期  $2\pi/|\Omega|$  の半分である。

この章では回転軸対称な流れを仮定したので、慣性流も同心円の「渦」運動の解となったが、一般に気圧傾度力がない流れを求めると「板」の回転運動も可能である。そのときもやはり、流れにのった流体粒子の回転周期は  $T = 2\pi r/|v| = \pi/|\Omega|$  となる (余田, 1987)。

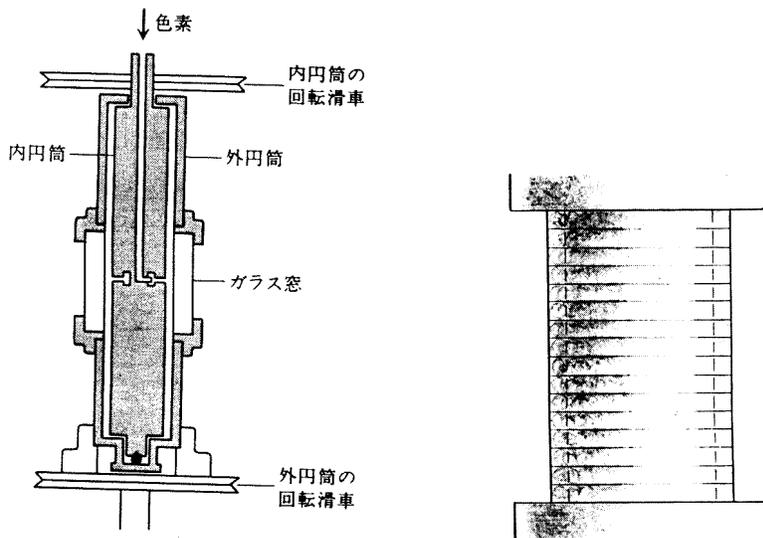


図 4.4: テイラーの実験装置の概略図 (左) とテイラー渦 (右). (巽 1982; 図 16.3 と図 16.4)

### 4.3 定常軸対称渦の安定性

#### 4.3.1 テイラーの実験

これまで見てきたような基本的に回転軸 ( $z$  軸) 方向に構造を持たない 2 次元的な定常渦運動に関して, Taylor(1923) が興味深い実験を行なった (巽 1982; 第 16-1-2 節). 図 4.4(左) に示すような実験装置で, 二つの同軸円筒間に実験流体 (水) を満し, 内外の円筒を異なる角速度  $\Omega_1, \Omega_2$  で回転させる.  $\Omega_1, \Omega_2$  がともに小さな値の場合には, 水は円筒と同軸の円軌道に沿って流れ, 軸方向には一様な流れとなる. この流れはクエット (Couette) 流と呼ばれ, ナビエ-ストークス方程式の厳密解である. 解としては常に存在可能であるが, 実際の実験では, 内外円筒の半径  $r_1, r_2$ , および,  $\Omega_1, \Omega_2$  の値のある範囲においてのみ実現し, それ以外

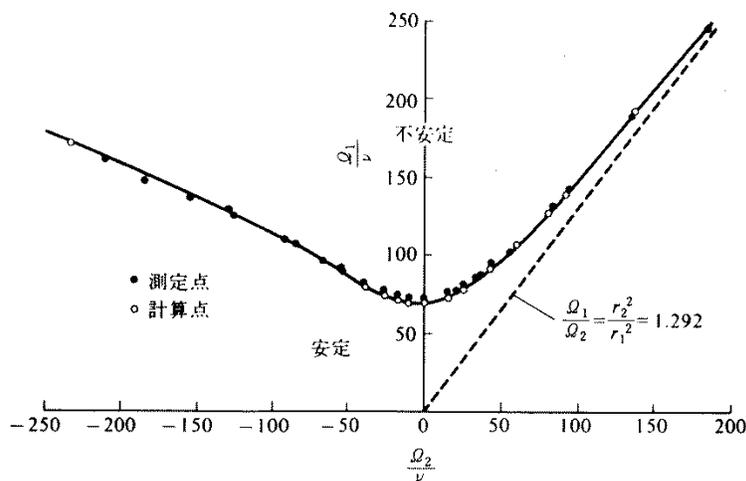


図 4.5: Couette 流の中立曲線 (Taylor, 1923). 内外円筒の半径は  $r_1 = 3.55$  cm,  $r_2 = 4.035$  cm で,  $\Omega_1$ (縦軸),  $\Omega_2$ (横軸) に依存して Couette 流の出現する安定な状況と別の種類の流れが出現する不安定な状況に分れる (巽 1982; 図 16.5).

ではクエット流は微小擾乱に対して不安定となり、別の流れが出現する。

クエット流が実現している状況から実験パラメータをゆっくり少しづつ変えていった場合、その流れが不安定になったところで、円筒の軸方向に周期的な構造を持つ定常な軸対称渦が出現する。図 4.4(右)のスケッチに示すような流れで、交互に回転の向きが異なる軸対称な渦列となる。これをテイラー渦と呼んでいる。詳細は、巽 (1982; 第 16 章) を参照のこと。線型安定性解析の具体例も示されている (図 4.5)。さらに、パラメータを変えていくと、接線方向にも構造を持つ螺旋流や振動流が現れ、最終的には乱流に遷移する。

### 4.3.2 定常軸対称渦の慣性不安定

テイラーの実験が示すように定常軸対称な渦解が存在するという事実と、実際にそのような渦が出現するという事実は、同じではない。定常軸対称渦が安定かどうかを吟味する必要がある。すなわち、その解に微小な擾乱を加えて、それが減衰するか増幅するかを調べなければいけない。ここで、微小な擾乱とは、室内実験や自然中に存在するゆらぎやノイズのことで、どうしても取り除くことができないものである。この避けることができない擾乱がたねに減衰するようであれば、その渦は実際に存在できるので、これを安定な渦という。これに対して、擾乱が発達する場合には不安定な渦といい、現実には観測されない。定常な渦でもちょっとつづいただけで崩れてしまうような渦である。

定常軸対称渦が不安定になる状況を大別すると、軸対称性を保ったままの慣性不安定と、軸対称性を破る波動が基本的な役割をはたすシア不安定とに分けられる (林, 1996)。テイラー渦は、Couette 流が慣性不安定となったときに出現する、軸対称な回転軸方向の渦列構造である。定常軸対称渦の慣性不安定に対する変分法を用いたエネルギー的考察は、Charney(1973; 第 4 章) と林 (1996; 第 2.2 節 (d)) を参照のこと。

## 4.4 大気中の理想化した定常軸対称渦

大気中には、切離低気圧、寒冷渦、ブロッキング高気圧、台風の温暖核など、様々な総観規模の渦運動がある。ここでは、Hoskins et al.(1985) で紹介されている、Thorpe(1985) の求めた対流圏の定常軸対称渦を概観する (小倉, 2000; 第 4.4 節参照)。この段階で Thorpe(1985) の研究に深く踏み込むことは難しいので、そのあらましだけを簡単に述べておく。得られた結果の図を見て、現実大気の大規模渦運動を思い浮かべておくだけでも意味がある。

### 4.4.1 力学的枠組み

第 3.4 節で導入したポテンシャル渦度を用いて定常な渦運動を考える。これから考える総観規模運動では、およそ静力学的平衡と傾度風平衡を仮定できるので、これらの平衡条件のもとにテンシャル渦度の分布から速度場や温度場の分布を見積もることができる。まず、回転軸対称なあるポテンシャル渦度分布が与えられたとする。ポテンシャル渦度の定義式 (3.29) からわかるように、それは速度 (あるいは渦度) と温度 (あるいは温位) の分布によって与えられる。逆に、ポテンシャル渦度の分布だけから、速度と温度の両方の分布を決めることはできない。しかし、静力学的平衡を仮定すれば温度場と気圧場を関係付けることができ、傾度風平衡を仮定すれば気圧場と速度場を関係づけることができる。すなわち、これらの温度場と速度場の関係 (温度風関係という; 後章参照) をもう一つの束縛とすれば、適当な境界条件のもとにポテンシャル渦度の分布から温度場と速度場の両方を同時に求めることができる。これをポテンシャル渦度の転換可能性の原

則 (invertibility principle) という (Hoskins et al., 1985; 小倉, 2000).

まず, 基本状態として, 中緯度 (コリオリパラメータ  $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) で, 高度 10 km に圏界面があり, 16.67 km に上端がある静止大気を考える. 対流圏および成層圏の静的安定度 (温位の鉛直傾度) はそれぞれ一定値とし, 成層圏の値は対流圏の 6 倍とする. ここに, 回転軸対称なポテンシャル渦度のアノマリー (基本状態からの偏差) が重なったとする. 圏界面または地表面の  $r \leq r_0$  の円内で  $A \{ \cos(\pi r/r_0) + 1 \} / 2$  のように変化する温位分布でアノマリーを与えた場合, 誘起される回転軸対称な流れ (接線方向の水平風) はある種の非線型ポアソン方程式で与えられるので, その解を緩和法などにより数値的に求めることができる. また, 温度風関係式より温位の分布も求められる. 詳細は Thorpe(1985) を参照のこと.

#### 4.4.2 3次元大気中の定常軸対称渦

圏界面または地表面に半径  $r_0 = 1667 \text{ km}$  の円内で, それぞれ正と負の  $A$  で温位のアノマリーを与えた場合に, 誘起される流れと温位の分布を示す. ただし, 外側の境界条件としては,  $r = 5000 \text{ km}$  で水平風および温位のアノマリーが 0 とする. 図 4.6, 4.7 では,  $r \leq 2500 \text{ km}$  だけを示す.

##### i) 圏界面に正のポテンシャル渦度アノマリーがある場合

図 4.6(上) は, 圏界面で  $A = -24\text{K}$  として, 正のポテンシャル渦度アノマリーを与えた場合であり, 切離低気圧, 寒冷渦の概念的なイメージである. まず, 渦の中心部分では圏界面が 4km 以上低くなっており, 地上の気圧アノマリーが  $-41\text{hPa}$  の低気圧性渦である. 接線風は反時計回りで圏界面にあるコンターの最大は  $21\text{ms}^{-1}$  である. 誘起される渦運動は深く地表面まで達し, 地表での最大風速は  $15\text{ms}^{-1}$  に近い. 一方, 静的

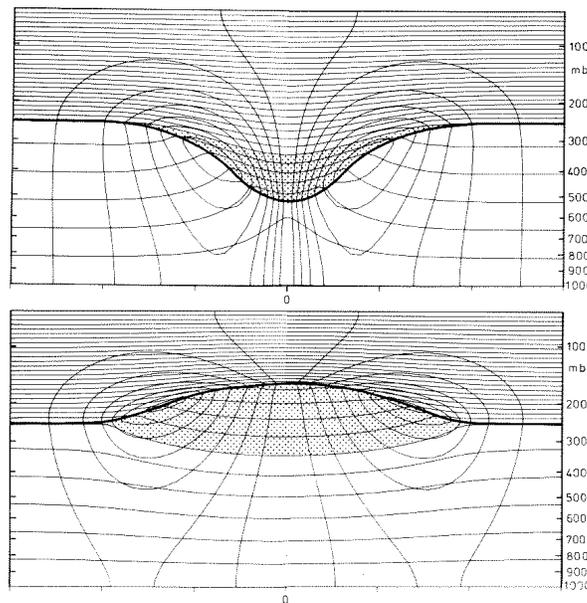


図 4.6: (上) 圏界面に正のポテンシャル渦度アノマリーがある場合, (下) 圏界面に負のポテンシャル渦度アノマリーがある場合. ポテンシャル渦度アノマリーがある領域を陰影で示す. 太線は圏界面を表し, ほぼ水平な細線は等温線 (コンター間隔は 5K; 上ほど高温) であり, 閉じたコンターを含む細線は接線風速の等風速線 (コンター間隔は  $3\text{ms}^{-1}$ ).

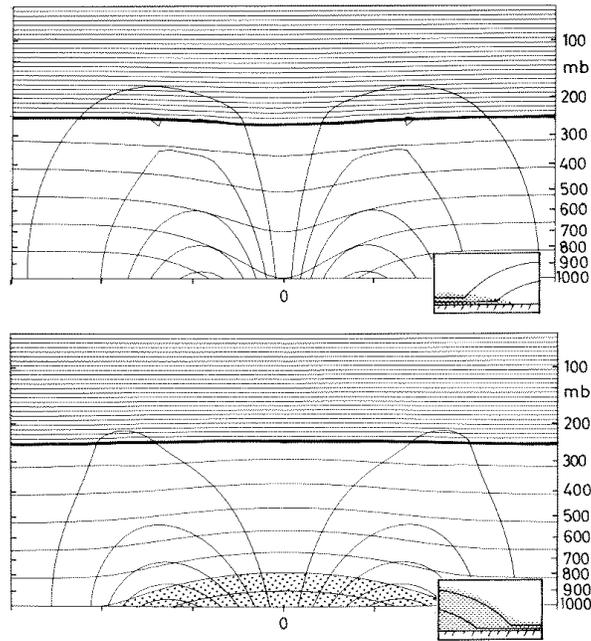


図 4.7: (上) 地表面に正の温度アノマリーがある場合, (下) 地表面に負の温度アノマリーがある場合. ポテンシャル渦度アノマリーがある領域を陰影で示す. 太線は圏界面を表し, ほぼ水平な細線は等温位線 (コンター間隔は 5K; 上ほど高温) であり, 閉じたコンターを含む細線は接線風速の等風速線 (コンター間隔は  $3\text{ms}^{-1}$ ).

安定度が大きな成層圏では, 誘起される流れがそれほど上方にまで及ばない. 温位の水平分布をみると対流圏では渦の中心が周囲よりも低温の寒冷渦であり, 成層圏では逆に周囲よりも高温になっている. 温位の鉛直微分が静的安定度を与えるが, 渦の中心部でみると, 正のポテンシャル渦度アノマリーがある圏界面のすぐ上で安定度が周囲より大きくなっている. 逆に, アノマリーの無い対流圏 (および成層圏上方) では, 静的安定度が周囲より小さくなっている. 対流圏ではとくに成層状態が不安定に近く, 対流雲が発生しやすい状況である.

### ii) 圏界面に負のポテンシャル渦度アノマリーがある場合

図 4.6(下) は, 圏界面で  $A = +24\text{K}$  として, 負のポテンシャル渦度アノマリーを与えた場合であり, ブロッキング高気圧の概念的なイメージである. まず, 渦の中心部分では圏界面が数 km 高くなっており, 地上の気圧アノマリーが  $+13\text{hPa}$  の高気圧性渦である. 接線風は時計回りで圏界面にあるコンターの最大は i) の場合と同じ  $21\text{ms}^{-1}$  である. 誘起される渦運動は地表面まで達するが, 地表での最大風速は  $6\text{ms}^{-1}$  程度である. 温位の水平分布をみると対流圏では渦の中心が周囲よりも高温であり, 成層圏では逆に周囲よりも低温になっている. 対流圏の下部では静的安定度が周囲よりも大きく, 対流雲も発生しにくい状況である.

### iii) 地表面に正の温度アノマリーがある場合

図 4.7(上) は, 地表面で  $A = +10\text{K}$  として, 正の温位アノマリーを与えた場合であり, 雨は降らないけれど台風のような温暖核の概念的なイメージである. これは, 地表面に正のポテンシャル渦度アノマリーがあるとき (右下の拡大図) に誘起される流れと温位の分布とみてもよい. 図 4.6 と違い, 圏界面ではなにもア

ノマリーを与えていないので、誘起される流れや温位の偏差は地表面で一番大きく、上方に行くほど小さくなっている。圏界面は、渦の中心でわずかに低くなっている程度である。地上の気圧アノマリーは  $-31\text{hPa}$  の低気圧性渦であり、接線風は反時計回りで最大値は  $16\text{ms}^{-1}$  である。温位の水平分布をみると全層で渦の中心が周囲よりも高温の温暖核である。静的安定度は渦の中心部が一番小さい。

iv) 地表面に負の温度アノマリーがある場合

図 4.7(下) は、地表面で  $A = -10\text{K}$  として、負の温位アノマリーを与えた場合であり、冬のシベリア高気圧のような寒冷高気圧の概念的なイメージである (かな?)。iii) の場合と同様に、誘起される流れや温位の偏差は地表面で一番大きく、上方に行くほど小さくなっている。地上の気圧アノマリーは  $+18\text{hPa}$  の高気圧性渦であり、接線風は時計回りで最大値は  $17\text{ms}^{-1}$  である。全層で渦の中心が周囲よりも低温の寒冷核である。静的安定度は渦の中心部が一番大きい。

## 参考文献

- Charney, J.G., 1973: Planetary Fluid Dynamics, P. Morel Ed., *Dynamic Meteorology*, D.Reidel Pub. Co., 97–351.
- 林 祥介, 1996: 流体力学, 岩波講座地球惑星科学 6 「地球連続体力学」第 2 章, 39–97.
- Hoskins, B.J., M.E.McIntyre, and A.W.Robertson, 1985: On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quart.J.Roy.Meteor.Soc.*, **111**, 877–946.
- 小倉 義光, 2000: 「総観気象学入門」, 東京大学出版会, 289pp.
- Taylor, G.I., 1923: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 223**, 289–343.
- Thorpe, A.J., 1985: Diagnosis of balanced vortex structure using potential vorticity. *J.Atmos.Sci.*, **42**, 397–406.
- 巽 友正, 1982: 「流体力学」, 培風館, 453pp.
- 余田 成男, 1987: Peter Rhines の講義ノート「慣性振動」, 天気, **34**, 359–367.



## 第5章 渦糸群および渦パッチの運動学

2次元の完全流体中で複数の渦が互いに近い位置に存在した時に、それらはどのように相互作用するのか、またどのような動きをするのか、ということを考える。2次元非圧縮完全流体の運動は渦度方程式で記述できるが、初期状態の渦度が任意の空間分布で与えられる場合には、時間発展を解析的に求めることは不可能である。一般に、差分モデルまたはスペクトルモデルで数值的に解くことになる。しかし、この章では、渦度分布が二つの特別な状況を考えて、出来る限り解析的に渦の運動学にアプローチする。

まず、ある理想化した渦である渦糸の相対運動を調べる。渦糸とは、それぞれの渦度が一本の線(2次元面内では点)に集中しているとしたときの線のことである。ひとつの渦糸によって誘起される速度場は解析的に与えられ、複数の渦糸系では、速度場が各渦糸によって誘起される速度の和として表わされる。これより各渦糸の場所での速度もわかるので、渦糸群の運動を解析的または数值的に求めることができる。

つぎに、渦度分布が分割された領域毎に一様(一定値)である渦パッチを考える。この時、速度場は単一渦度領域の境界線(コンター)と渦度の増分値によって与えられるので、コンターの位置の時間発展を数值的に求めることが可能である。このような状況設定で渦パッチ(群)の時間発展を数值的に求める方法はコンターダイナミクスと呼ばれている。

### 5.1 渦糸群の運動

#### 5.1.1 複素速度ポテンシャル

2次元非圧縮完全流体の渦なし流(ポテンシャル流)を考える(巽, 1982; 第8章)。直角座標系  $(x, y)$  で速度  $(u, v)$  は、速度ポテンシャルを  $\Phi$ 、流れ関数を  $\Psi$  として、次で与えられる:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

流れ関数の定義(符号)が気象力学の慣例と逆であることに注意しよう。非圧縮なので、 $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  より、

$$\Delta_2 \Phi = 0, \quad (5.2)$$

である。ただし、 $\Delta_2$  は2次元ラプラシアン演算子  $(= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$  である。2次元の場合、渦度ベクトルは常に流れの面に垂直であるので、その大きさをスカラー量  $\omega$  とすると、渦なし流では  $\omega = 0$  である。流れ関数を用いると  $\omega = -\Delta_2 \Psi$  であるので、渦なし流では、

$$\Delta_2 \Psi = 0, \quad (5.3)$$

となっている。

複素変数  $z = x + iy$  を導入し、複素速度ポテンシャルを、

$$W = \Phi + i\Psi, \quad (5.4)$$

で定義する。(5.1) 式は、 $W$  が  $z$  の正則関数であるための必要十分条件を表している。正則関数においては、微分係数は微分方向にはよらないから、

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv, \quad (5.5)$$

となる。すなわち、 $z$  の正則関数  $W(z)$  が与えられれば、その微分係数の実数部と虚数部が速度の各成分を与えることになる。ある与えられた境界条件のもとで 2 次元非圧縮完全流体の渦なし流を求める問題は、境界条件を満たすような正則関数  $W(z)$  を求める問題（複素関数論の問題）に帰着する。

### 5.1.2 渦糸

極座標系  $(r, \theta)$  で、原点  $r = 0$  に置いた一本の渦糸の誘起する渦なし流の複素速度ポテンシャル  $W$  は、 $z = re^{i\theta}$  として、

$$W = -i\kappa \log z = \kappa\theta - i\kappa \log r, \quad (5.6)$$

で与えられる。ただし、 $\kappa$  は実定数である。この流れの流線は、 $r = \text{一定}$ 、つまり原点を中心とする同心円群で与えられる。 $u_r = 0$  であり、円周方向の速度成分  $u_\theta$  は、

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\kappa}{r}, \quad (5.7)$$

である。また、このとき原点を一周する任意の閉曲線に沿う循環  $\Gamma$  は、

$$\Gamma = 2\pi\kappa, \quad (5.8)$$

である。

渦糸のまわりの流れは、 $\kappa > 0$  のときには反時計回り、 $\kappa < 0$  のときには時計回りの「渦」になっている（第 5.1 図）。渦なし流が「渦」運動をしているというのは一見奇妙であるが、渦なしとは流体の微小部分が自転していない（渦度が原点を除いていたるところでゼロである）ことを意味するのであり、流線が円形で大局的に円周「渦」運動をしていることと矛盾しない。

### 5.1.3 渦糸群の運動

2 次元直角座標系で  $N$  個の渦糸が存在する場合を考える。 $n$  番目の渦糸のもつ循環を  $\Gamma_n$ 、その位置を  $(x_n, y_n)$  とすると、これらの渦糸系で誘起される流れの複素速度ポテンシャルは、

$$W = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^N \Gamma_n \log(z - z_n), \quad (5.9)$$

で与えられる。これを (5.5) 式に代入すれば、任意の場所  $z$  での速度が求められる。

いま、 $m$  番目の渦糸に着目すると、この渦糸は他のすべての渦糸の誘起する速度によって運動するから、その速度は、

$$\frac{dz_m^*}{dt} = u_m + iv_m = \left[ \frac{d}{dz} \left( W - \frac{\Gamma_m}{2\pi i} \log(z - z_m) \right) \right]_{z=z_m} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1, n \neq m}^N \frac{\Gamma_n}{z_m - z_n}, \quad (5.10)$$

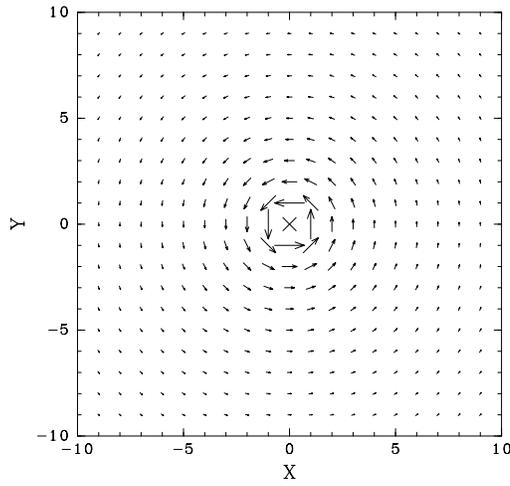


図 5.1: 渦系のまわりの流れ ( $\kappa > 0$ ). 渦の中心が渦系の位置 (× 印).

で与えられる。ここで、 $*$  は の複素共役を表わす。結局、 $N$  個の渦系系の運動は、この  $N$  個の複素連立方程式 (5.10) によって完全に記述できる。

ここで、渦系系を構成する各渦系の相互位置のみによって決まる実関数、

$$\left. \begin{aligned} H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1, m \neq n}^N \Gamma_m \Gamma_n \log r_{mn}, \\ r_{mn} &= |z_m - z_n| = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

を定義すると、渦系系の運動方程式 (5.10) は、

$$\Gamma_m \frac{dz_m^*}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial z_m}, \quad (5.12)$$

で表される。これを実数部と虚数部に分解して、 $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  であることを考慮すると、

$$\Gamma_m \frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_m}, \quad \Gamma_m \frac{dy_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_m}, \quad (5.13)$$

となる。この方程式は、 $x_m, y_m$  を互いに正準共役な変数とするときの Hamilton の正準方程式であり、 $H$  は Hamilton 関数である。

(5.13) 式より、次のような渦系系の一般的性質を導き出せる (巽, 1982; 第 9-3-1 節) :

- $H$  は相対距離  $r_{mn}$  だけの関数であり、渦系系全体を平行移動・回転させても不変である。
- $\sum \Gamma_m \neq 0$  の場合、渦系系の重心  $z_0 \equiv \sum_{m=1}^N \Gamma_m z_m / \sum_{m=1}^N \Gamma_m$  は不変である。
- $\sum \Gamma_m = 0$  の場合、渦系系を任意の 2 群に分けてそれぞれの群の重心を定義すれば、それらの重心の相対的位置は不変である。
- 原点まわりの渦系系の慣性モーメント  $I \equiv \sum_{m=1}^N \Gamma_m (x_m^2 + y_m^2)$  は不変である。
- 原点まわりの渦系系の角運動量  $A \equiv \sum_{m=1}^N \Gamma_m (x_m dy_m/dt - y_m dx_m/dt)$  は不変である。
- $H$  は時間的に不変である。

### 5.1.4 2本の渦系の運動

2次元渦系群の具体的な運動を調べるには, (5.13) 式の解を求めればよい. 2本の渦系の運動は解析的に調べられる. Hamilton 関数 (5.11) は,

$$H = -\frac{1}{2\pi}\Gamma_1\Gamma_2 \log r_{12} = \text{一定}, \quad (5.14)$$

となり, 渦系間の距離は一定値  $r_{12} = d$  となる.  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$  ならば重心の位置が不変であり, 二つの渦系は重心を中心とする円運動を行なう. ここで, 重心は,

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right), \quad (5.15)$$

である. また, 渦系の角運動量は不変であり, 二つの渦は重心のまわりを一定の角速度で回転する. 二つの正符号の循環の渦を台風になぞらえたとき, このような二つの渦の動きを藤原の効果という (第 5.3 節).

一方,  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ , すなわち,  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$  と書き表せる場合には, 重心は定義できず, 二つの渦系は同じ速度

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma}{z_2^* - z_1^*}, \quad (5.16)$$

で運動する. このような渦対は, 渦を結ぶ直線に垂直に  $\Gamma/(2\pi d)$  の速さで進む.

(5.14) 式を (5.13) 式に代入して,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial y_1} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{d^2}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{d^2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{d^2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{d^2}, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

を得る. 2本の渦系の運動は, これらの連立常微分方程式系を時間積分することにより求めることができる.  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  の符号, 大きさに依存して, それぞれ, 重心を中心とした円運動を行なう.

### 5.1.5 3本以上の渦系の運動

3本の渦系系でも, 循環の値が同じ場合など特別なときには, 規則的な円運動となる. 一般に, 渦系の強さが  $\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1} + \Gamma_3^{-1} \neq 0$  を満たすときには, つねに連続微分可能な時間発展解が存在する.  $\Gamma_i$  の値により複雑に見える軌道を描くが, 3本の渦系の力学系は2次元力学系に帰着できることが証明されており, カオス的な軌道は存在しない (岡本, 1995). 一方,  $\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1} + \Gamma_3^{-1} = 0$  のときには, 解が有限時間で爆発することがある. 渦の3体衝突が起こり, 速度が無限大となる. 4本以上の渦系系では, カオス的な軌道が可能である.

### 5.1.6 カルマン渦列

同じ強さ (循環  $\Gamma$ ) の渦系が一直線上に等間隔に並んだものを渦列という (巽, 1982; 9-3-3 節). これと平行に循環  $-\Gamma$  の渦系からなるもう一つの渦列をおいた場合, これらを平行渦列という. 一つの渦列や平行渦列

は外部擾乱に対して不安定であり、渦列の配置は時間とともに崩れていく。ただし、渦列が互い違いに並ぶ平行渦列の場合で渦糸間の距離  $l$  と渦列の間隔  $b$  が  $b/l = 0.2806$  の関係を満すときには、この平行渦列は中立安定である。このような渦列の理論的研究者にちなんでカルマン (Kármán) 渦列という。現実には、円柱のような柱状物体を一様な流れの中に流れと直角におくと、レイノルズ数 ( $Re \equiv UL/\nu$ ) が  $10^2 \sim 10^3$  の程度の範囲では、物体の背後にできた渦が交互に剥離して、下流に規則正しい 2 列の渦列をつくる。カルマン渦列はこのような渦列を理想化したものといえる。実際に観測される渦列は、粘性の影響を受けているけれど、 $l$  と  $b$  の比はほぼ理論値に近い値となる。

カルマン渦列の室内実験については、佐藤 (1997) の報告を参照のこと。実験風景や流れの写真、動画などを見ることができる。

## 5.2 渦パッチの運動：コンターダイナミクス

### 5.2.1 状況設定

2次元非圧縮完全流体を考える。速度を  $u(x, y, t)$ 、渦度の垂直成分を  $\omega(x, y, t)$  とすると、その運動は渦度のラグランジュ的保存則で記述できる：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \right) \omega = 0, \quad (5.18)$$

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{u}. \quad (5.19)$$

いま、渦度  $\omega$  の分布が離散的であるとして、

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \omega^{(j)}, \quad (\mathbf{r} \in D_j), \quad (5.20)$$

与えられるとする。これらを渦パッチと呼ぶ。各領域  $D_j$  の中では渦度  $\omega^{(j)}$  がラグランジュ的に保存するので、領域の境界  $C_j$  の運動を追うだけで、渦度分布  $\omega(\mathbf{r}, t)$  の時間変化を求めることができる。

2次元非発散なので流線関数を導入すると、(5.19) 式がポアソン方程式となる。与えられた渦度分布に対して適当な境界条件の下にこれを解くと、流れの場が得られることになる。その流れを (5.18) 式に代入すれば、渦度の時間変化がわかり、新たな渦度分布が得られる。これを繰り返せば渦度場 (流れ場) の時間発展の様子を求めることができる。渦パッチの場合には、領域積分が境界  $C_j$  に沿っての一周線積分で置き換えられるので、結局、領域  $D_j$  内の渦度の値  $\omega^{(j)}$  と境界 (コンター)  $C_j$  の位置だけで系の時間発展が計算できる。実際のコンターダイナミクスの数値計算では、コンターを有限の点列  $\{\mathbf{r}_i^{(j)}; i = 1, 2, \dots, I_j\}$  で表す。コンターが伸びるに従ってその線密度が変化するので、点列を再配置したり新たな点を加えたりする必要である (Dritschel, 1989)。

コンターダイナミクスの特徴を以下に列挙しておく。

長所：

- 系の状態がコンターの位置・形だけで記述できる。
- コンターの時間発展は各コンターの位置関係から計算できる。
- 2次元問題が1次元の線積分に還元されるので、計算時間が著しく短縮される。
- 非定常的な振舞いが容易に取り込める。
- スペクトル法との比較により信頼性が確かめられている。

短所：

- 完全流体の枠組みをはずすことが難しい。つまり、散逸過程が重要な問題には適していない。
- コンターレベル数が少ないと現実性が薄まり、概念モデルの色彩が濃くなる。

### 5.2.2 定式化

流線関数  $\psi(x, y, t)$  を導入する (気象力学の慣例表記) :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{k} \times \text{grad} \psi(x, y, t), \quad (5.21)$$

$$\Delta_2 \psi(x, y, t) = \omega(x, y, t). \quad (5.22)$$

渦度の分布  $\omega(x, y, t)$  に対してこのポアソン方程式を解けば、各点での速度を求めることができる。方程式 (5.22) の一般解はグリーン関数を用いて、

$$\psi(x, y, t) = \iint \omega(\xi, \eta, t) G(r) d\xi d\eta, \quad (5.23)$$

与えられる。ここで、 $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ 、 $\Delta_2 G(r) = \delta(r)$  である。2次元平面ではグリーン関数は、

$$G(r) = \frac{1}{2\pi} \log r, \quad (5.24)$$

なので、

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \omega(\xi, \eta, t) \log r d\xi d\eta, \quad (5.25)$$

となる。これより、速度の  $u$  成分は次のようになる :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \iint \omega(\xi, \eta, t) \log r d\xi d\eta \right\} = -\frac{1}{2\pi} \iint \omega(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial y} \log r d\xi d\eta. \quad (5.26)$$

ここで、一般に、 $\left( \frac{\partial f(y - \eta)}{\partial y} \right)_{\eta=\text{const.}} = - \left( \frac{\partial f(y - \eta)}{\partial \eta} \right)_{y=\text{const.}}$  だから、

$$u = \frac{1}{2\pi} \iint \omega(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial \eta} \log r d\xi d\eta, \quad (5.27)$$

となる。これを  $\eta$  で部分積分すると、

$$u = \frac{1}{2\pi} \left[ \int \omega(\xi, \eta, t) \log r d\xi \right]_{\eta=-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \log r d\xi d\eta, \quad (5.28)$$

となる。境界条件より右辺第 1 項はゼロとなる。また、第 2 項の  $\partial \omega / \partial \eta$  はコンター上でのみ値をもち、 $\eta$  で積分した値はコンターを挟んでの渦度の増分値と等しい。コンター  $C_j$  を内側に横切ったときの渦度増分値を  $\tilde{\omega}^{(j)}$  とし、線積分を反時計回りにすると、最終的に、

$$u = -\frac{1}{2\pi} \sum_j \tilde{\omega}^{(j)} \oint_{C_j} \log r d\xi, \quad (5.29)$$

を得る。 $v$  も以上のことを同様におこなって、

$$v = -\frac{1}{2\pi} \sum_j \tilde{\omega}^{(j)} \oint_{C_j} \log r d\eta, \quad (5.30)$$

となる. これらをまとめると, 任意の点  $r$  での速度は,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_j \tilde{\omega}^{(j)} \oint_{C_j} \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}|^2 d\mathbf{r}^{(j)}, \quad (5.31)$$

で与えられる. 結局, コンターの位置  $\{\mathbf{r}_i^{(j)}\}$  がわかれば, これより任意の点の速度がわかることになる. 当然コンター上の速度も得られるわけで, その速度でコンターを移流させることによりコンターの位置の時間発展を求めることができる.

### 5.2.3 数値実験

地球流体力学計算機実験集 (余田, 1999) のコンターダイナミクスモデルでは, (1) 不安定な単一の楕円渦の時間発展, (2) 二つの円形渦の相互作用, の二つの実験ができる.

前章でみたランキンの結合渦は, 時間変化しない定常な渦である. この渦が偏平になり楕円形内で渦度が一定値  $\omega_0$  である楕円渦を考えよう. 偏平率 (長軸と短軸の比) が  $\lambda$  の楕円渦は, 一定の回転角速度

$$\gamma = \frac{\lambda \omega_0}{(1 + \lambda)^2}, \quad (5.32)$$

で回転する (巽, 1982; 第 9-2-1 節 (iii)). 偏平率が小さく円形に近い渦ほど速く回転する. 一方, 偏平率の大きい楕円渦は不安定であり, 微小な擾乱を加えるだけで渦が変形し崩壊していく (第 5.2 図). 楕円渦の線型安定性は古くから調べられており, 波数が 3 の擾乱に対して  $\lambda > 3$  の楕円渦は不安定であることがわかっている (Love, 1893). 不安定な楕円渦が変形・崩壊していく様子は, 偏平率や擾乱の波数に依存してさまざまな様相を示す (堀居, 1997; 水田・他, 1998).

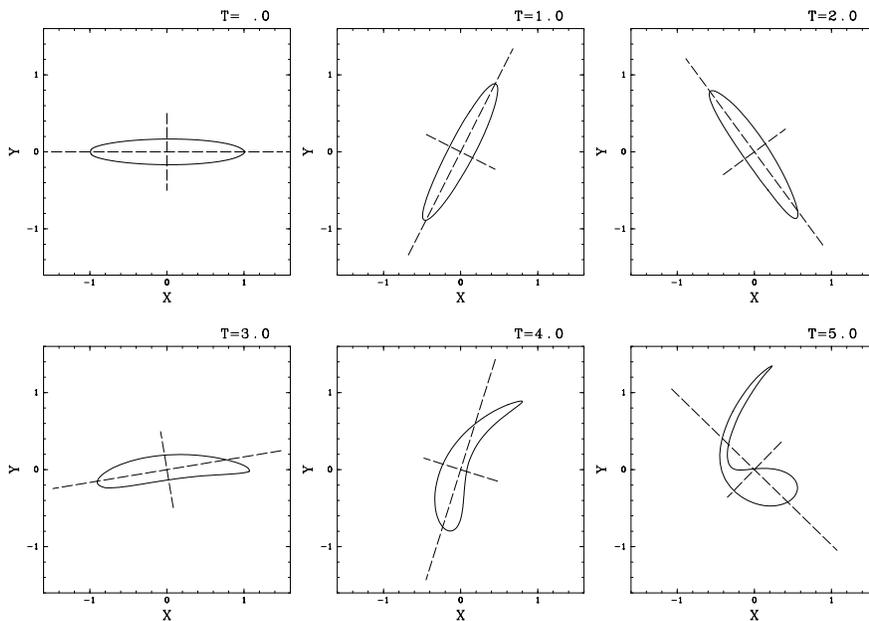


図 5.2: コンターダイナミクスモデルによる楕円渦の変形・崩壊をみる実験 (余田, 1999).  $\lambda = 6$ , 初期に原点半対称な波数 3 の擾乱を与えた場合. 楕円渦の一端からストリーマーを伸ばして, 渦が崩れていく. 直交する 2 本の破線は, 擾乱がない時の楕円渦の回転を表している. 渦が変形して偏平でなくなるとより速く回転するようになる.

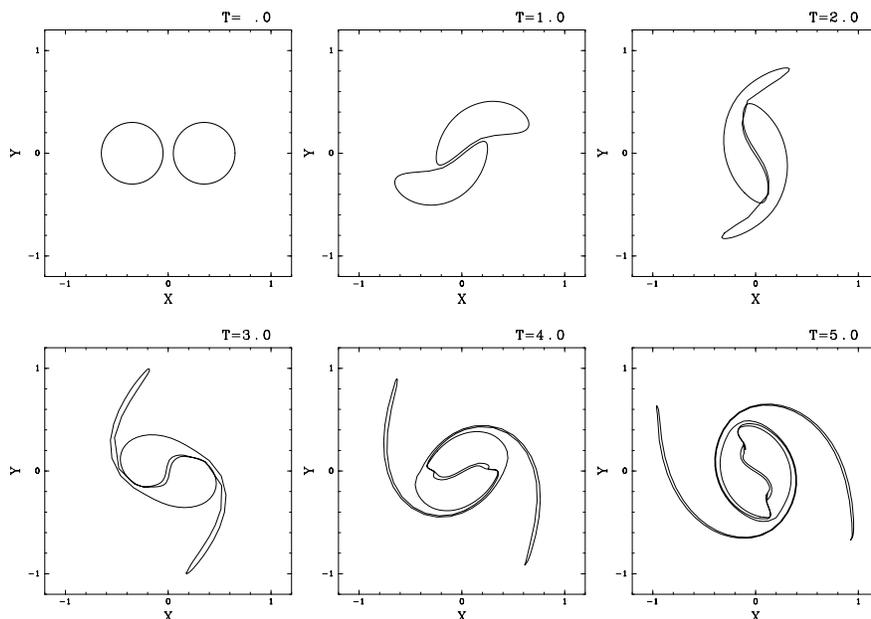


図 5.3: コンターダイナミクスモデルによる二つの円形渦の相互作用をみる実験 (余田, 1999). 同一の大きさで同一の渦度の円形渦を近接して置いた場合, 二つ渦はストリーマーを伸ばして融合し, やがて一つの大きな渦となる.

二つの円形渦 (ランキン渦) の相互作用をみる実験は, 第 5.1.5 節で解析した二本の渦系系を一般化したものである. 渦系は渦運動の中心だけに特異点的に渦度を与えるのに対して, ランキン渦では有限の円形領域に一定の渦度を与える. 円の半径が渦間距離に比べて十分に小さければ渦系近似が可能であるが, そうでなければ二つの渦は相互作用して, それぞれ変形していく. 一方の渦によって誘導される流れは剛体回転ではないので, 有限の大きさの渦は変形をうける. 例えば, 同一の大きさで同一の渦度の円形渦を近接して置いた場合, 二つ渦は二本のストリーマーを伸ばし, 互いに巻き込みながら融合して, やがて一つの大きな渦となる (第 5.3 図). 渦の強さ, 半径, 渦間距離に依存して, さまざまな時間発展をする.

## 5.3 大気中における渦の運動と変形

### 5.3.1 台風の相対運動: 藤原効果

二つの渦系が重心のまわりを一定の角速度で回転する状況は, 二つの台風が接近したときの相対運動に見ることができる. 藤原効果について気象科学事典 (日本気象学会, 1998) より引用する:

藤原効果 2 個の台風が接近して存在する場合に, 両者の中間のある点のまわりを反時計回りに (南半球では時計回りに) 互いに回転し合う相対運動のこと. 中央気象台長を務めた藤原咲平が初めて提唱したことからこの名がある. 片方の台風がほとんど静止状態になる一方で, 他方が急に速度を早めて移動することもある. 経験的には台風間の距離が 800km 程度より近くなると藤原効果が現れ始める.

Fujiwhara(1921) の論文には流れる水の表面にみられる渦群の写真や渦状の雲の観察スケッチもあり, それらの渦の運動についてもいろいろ議論している.

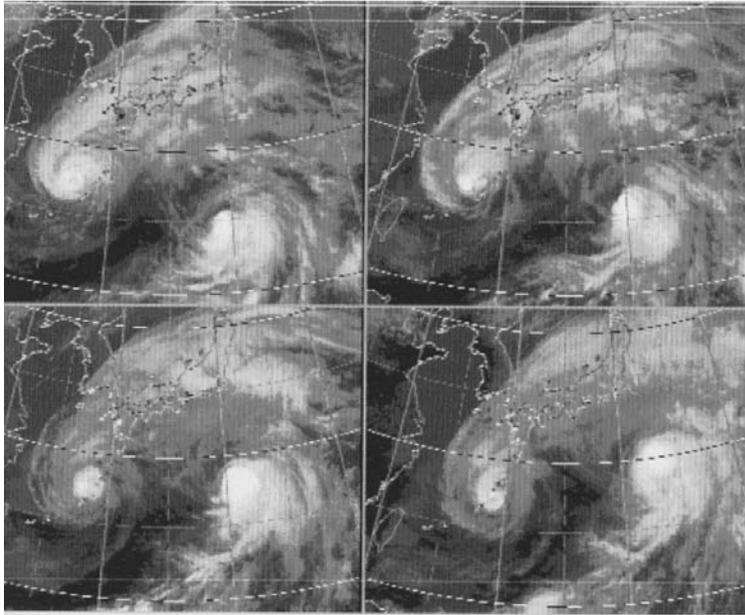


図 5.4: 気象衛星「ひまわり」の画像で見た 1996 年の台風 20 号と 21 号の動き (藤井, 2001). 左上: 9 月 29 日 21 時, 右上: 30 日 03 時, 左下: 30 日 09 時, 右下: 30 日 15 時.

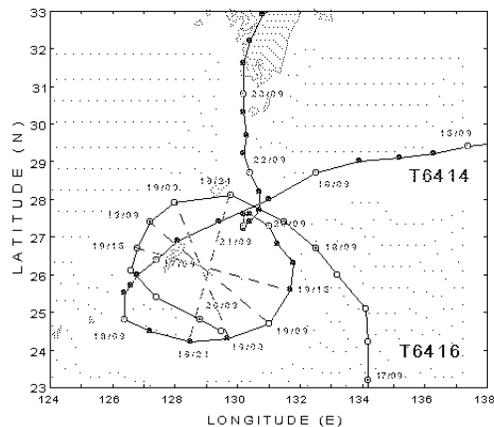


図 5.5: 1964 年の台風 14 号と 16 号の中心位置の動き (藤井, 2001).

図 5.4 は, 気象衛星「ひまわり」の画像でみた一例で, 2 つの台風が相互に影響しながら運動している様子を示している. 1964 年の台風 14 号と 16 号の中心位置の動きを追いかけたものを図 5.5 に示す. 18 日から 20 日にかけて, 反時計回りにおよそ 1 回転している.

### 5.3.2 カルマン渦列

冬季の「ひまわり」写真をみていると, 寒気の吹き出しがある頃に韓国済州島の風下に平行な渦列をみかけることがある (菊地, 2000). 島によってできた渦が交互に剥され下流に流されていく, というのが基本的な力学のイメージである. 図 5.6 はランドサット衛星で観測された南太平洋ロビンソンクルーソー島の例である (DeFelice et al., 2000). 必ずしも実験室のような 2 次元的な流れの状況ではなく, カルマンの理論通りではないが, 自然の中で渦列ができ, 雲によって可視化されるという, 興味深い事例となっている.

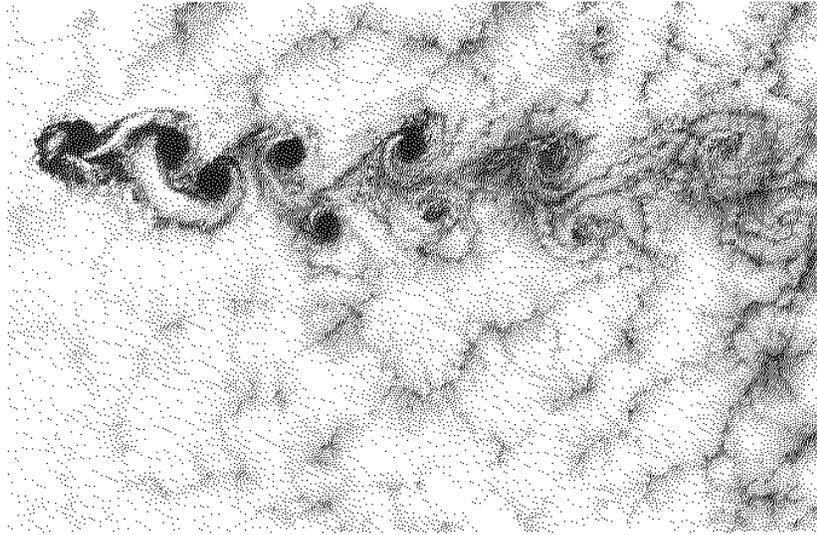


図 5.6: 1999 年 9 月 15 日, ロビンソククルーソー島 (33.75S, 80.75W) の風下に見られた渦列 (DeFelice et al., 2000 より). 島の幅は 6.44 km, 長さは 12.88 km, 島の大部分が海拔 600 m 以上で, 最高峰は 1640 m.

### 5.3.3 成層圏周極渦の変形と崩壊

成層圏の周極渦は地球上にある最も大きな渦である (図 5.7). 冬季には, 極夜ジェットとして知られる強い偏西風が極域を取り巻くように流れている. ジェットの流軸域ではポテンシャル渦度の水平勾配が大きく, 周極渦の縁となっている. 渦の内外では水平混合が盛んであり, それぞれポテンシャル渦度がおよそ一様となっている. そのような状況を念頭に置いて, この章で取り上げた単一渦のコンターダイナミクスモデルを成層圏周極渦の概念モデルとして使うことがある. 楕円渦がストリーマーを出して崩壊していく過程 (図 5.2 右下) は, 成層圏突然昇温時の周極渦崩壊現象 (図 5.7 右, McIntyre and Palmer, 1983) のアナロジーとみなすことができる. 成層圏周極渦崩壊現象の解説として余田 (1998) を参照のこと.

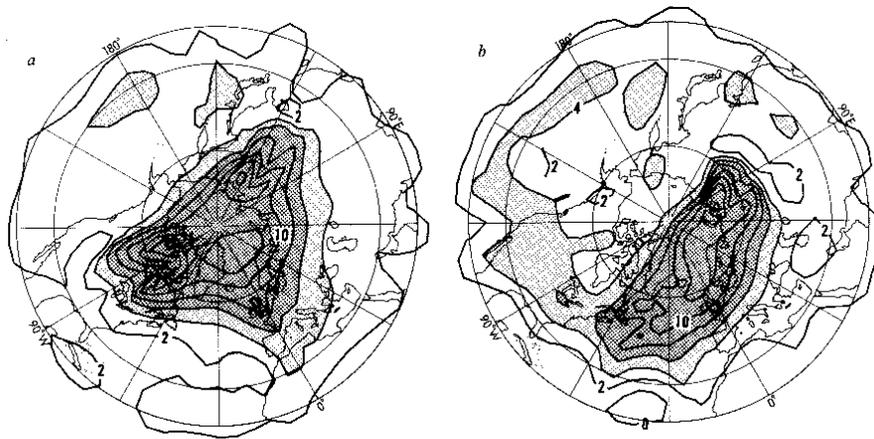


図 5.7: 850 K 等温位面 (成層圏中部の 10hPa 付近) でのポテンシャル渦度分布 (McIntyre and Palmer, 1983). 1979 年 1 月 17 日 (左), 27 日 (右). 緯度円の最南端は北緯 20 度. ポテンシャル渦度を等温位面で描くと大気の 2 次元的なラグランジュ的運動を容易に想像することができる.

## 参考文献

- DeFelice, T.P., D.J. Meyer, G. Xin, J. Christopherson and R. Cahalan, 2000: Landsat-7 reveals more than just surface features in remote areas of the globe. *Bull. American Met. Soc.*, **81**, 1047–1049.
- Dritschel, D.G., 1989: Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows. *Rep. Comput. Phys.*, **10**, 77–146.
- 藤井 健, 2001: 気候学・気象学入門セミナー「台風」, 関西地区大学共同セミナーハウス主催 第 151 回大学共同セミナー (2001 年 10 月 27-28 日).
- Fujiwhara, S., 1921: The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **47**, 287–293.
- 堀居 堅志, 1997: コンターダイナミクスを用いた渦の時間発展とその変形に関する解析. 平成 8 年度 京都大学大学院理学研究科 修士論文, 79 pp.
- 菊地 時夫, 2000: 済州島の風下にできるカルマン渦列 (高知大学 気象情報頁). [http://weather.is.kochi-u.ac.jp/events/000221\\_Karman\\_Vortex/](http://weather.is.kochi-u.ac.jp/events/000221_Karman_Vortex/)
- Kuo, H.-C., G. T.-J. Chen and C.-H. Lin, 2000: Merger of tropical cyclones Aeb and Alex. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, 2967–2975.
- Love, A.E.H., 1893: On the stability of certain vortex motions. *Proc. London Math. Soc.*, **35**, 18–42.
- McIntyre, M.E. and T.N. Palmer, 1983: Breaking planetary waves in the stratosphere. *Nature*, **305**, 593–600.
- 水田 亮・堀居 堅志・余田 成男, 1998: 2次元非発散流体中における渦パッチの変形と流体混合 – コンターダイナミクスによる数値計算 –. *ながれ multimedia*, **17**, [http://www.nagare.or.jp/mm/98/index\\_ja.htm](http://www.nagare.or.jp/mm/98/index_ja.htm)
- 日本気象学会 (編), 1998: 「気象科学事典」, 東京書籍, 637pp.
- 岡本 久, 1995: 渦系のなす力学系. 「非線形力学」第 4 章, 岩波講座「応用数学」, 37-45.
- 佐藤 薫, 1997: カルマン渦 (地球科学実験の授業から).  
<http://www-mete.kugi.kyoto-u.ac.jp/sato/karman/index.html>
- 巽 友正, 1982: 「流体力学」, 培風館, 453pp.
- 余田 成男, 1996: 成層圏周極渦崩壊のダイナミクス. *数理科学*, **400**, 76–83.
- 余田 成男, 1999: 地球流体力学 計算機実験集 (作成中), [http://www-mete.kugi.kyoto-u.ac.jp/yoden/lecture/comp-GFD/comp-GFD\\_index.html](http://www-mete.kugi.kyoto-u.ac.jp/yoden/lecture/comp-GFD/comp-GFD_index.html)



## 第6章 2次循環とスピンドウン

第4章では完全流体中の定常軸対称渦を解析した。また、第5章では完全流体中の渦の運動や変形を考えた。しかし、現実には粘性の働きによって渦はやがて減衰する。渦の減衰には、「境界層」の存在、2次的な循環による「スピンドウン」など、簡単でない過程が含まれている。まず、コーヒーカップの中の渦についてその減衰過程を概観し、次に大気中の大規模な渦の減衰を解析する。渦粘性の概念を導入し、パラメータ展開によるスケール解析の手法を用いて系統的に惑星境界層の理論を構築する。そして、渦運動に伴う2次循環を求め、スピンドウンの速さを見積もる。

### 6.1 コーヒーカップ渦のスピンドウンに関するお話

木村(1985, 第5章)や木田(1994, 第8章)は、コーヒーカップの中の渦運動をとりあげて、台風や海洋中の渦の発達・減衰とのアナロジーを考察している。この節では、まずコーヒーカップの中の渦運動の減衰に関する力学を紹介する。

コーヒーをスプーンでかき混ぜてできた渦は、深さ方向に変化しない2次元運動になろうとする性質がある。これをテイラー・ Proudman (Taylor - Proudman) の定理という。カップの底では粘性の働きで速度がゼロ(粘着条件)のはずであるが、粘性によって速度が小さい値をもつのは境界付近の厚さ1 mm程度の薄い層内だけである。このような層を境界層 (boundary layer) と呼ぶ。図6.1左は粘性の影響を受けない「自由流体」中の2次元的な渦運動と境界層の模式図である。この境界層をエクマン (Ekman) 層という。また、同様に側壁付近にはシュワートソン (Stewartson) 層と呼ばれる境界層ができる (図6.1右)。

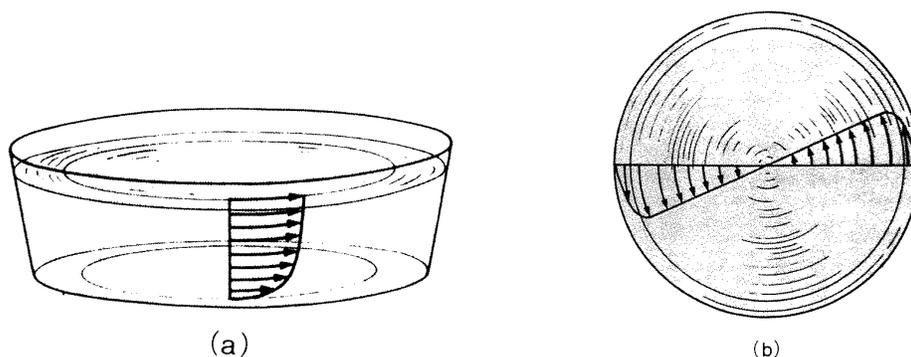


図 6.1: コーヒーカップ中の渦運動に伴う境界層 (木田, 1994; 図 8.6). (左) 自由流体中の2次元的な流れとエクマン境界層, (右) 自由流体中の剛体回転的な流れとシュワートソン境界層.

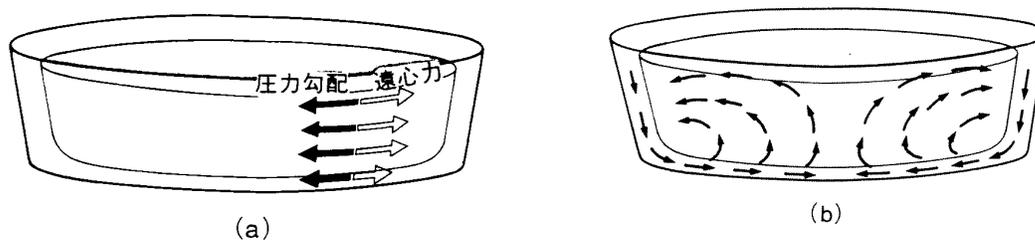


図 6.2: コーヒーカップ中の渦運動のスピンドウン (木田, 1994; 図 8.7). (左) 力の釣り合い, (右) 2 次循環.

運動方程式で粘性項によって渦が弱くなる程度を見積もってみる. スプーンでかき混ぜてできた渦の特徴的な速さを  $U \sim 10^{-2}$  m/s, 空間的大きさを  $L \sim 10^{-1}$  m とすると, 水の動粘性係数は  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s なので, 減衰の時間スケールは  $U/\tau \sim \nu U/L^2$  より,  $\tau \sim L^2/\nu = 10^4$  s と見積もれる. これは約 3 時間であり, 日常経験と掛け離れた値である. このようにコーヒーカップの中の渦は単純に分子運動によって境界に近いところから徐々に減衰しているとは考えられず, 別の減衰過程を考える必要がある.

スプーンでかき混ぜてできた渦は, 自由流体中では基本的に剛体回転で, 圧力傾度力と遠心力が釣り合う旋衝風平衡が成り立っている. ところが, 底の境界層内では摩擦のために速度が小さく, 遠心力も小さな値となる (図 6.2 左). 圧力傾度力は水面 (回転放物面) の傾きと同じで深さによらず一定であるから, 境界層内では旋衝風平衡が破れ, 流体粒子は高圧部から低圧部に向かって流れる. すなわち, カップの底では, 図 6.2 右に示したようなカップの中心に向かう流れができる. 一方, 自由流体中では流体の連続性によりカップの縁に向かう流れとなる. このようにしてできた渦に伴う鉛直面内の流れを 2 次循環という. 1 次循環は水平の渦運動である.

境界層内を収束してきた流れは摩擦の働きで  $v \sim 0$  だから, そのような流体粒子が自由流体中を外側に流れるときには, 角運動量の保存により  $v \sim 0$  となる. すなわち, そのような流体粒子が外側に拡がるにつれて, 渦運動が弱まっていく. このような過程を渦のスピンドウンという. スピンドウンの時間スケールは, 2 次循環の強さを  $U_2$  とし,  $\tau \sim L/U_2$  で与えられる.  $U_2 \sim 10^{-3}$  m/s ならば  $\tau \sim 10^2$  s であり,  $U_2 \sim 10^{-4}$  m/s でも  $\tau \sim 10^3$  s だから, 分子粘性だけの見積もりより十分小さな (日常経験に合致する) 値となる.

## 6.2 渦粘性

コーヒーカップ渦の減衰で役割を果たしたのは, 分子の熱運動によって生じる粘性, 分子粘性 (molecular viscosity) であった. 動粘性率  $\nu$  は, 1 気圧, 20°C の空気では  $1.50 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s, 水では  $1.00 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s である. これに対して, 地球規模での大規模な流れに対する粘性はミクロな分子粘性ではなく, 流体が乱流状態であることに起因するマクロな粘性, 渦粘性 (eddy viscosity) である. 渦粘性は乱流粘性 (turbulent viscosity) と呼ばれることもある. まずこの節では, 渦粘性の概念を紹介し, その定式化を行なう.

$\Omega$  で回転する系での均質非圧縮流体 ( $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ ) の運動方程式および連続方程式は次で与えられる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad}p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (6.1)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0. \quad (6.2)$$

ここでまず, 速度  $\mathbf{u}$  を二つの部分に分けることを考える. 興味の対象である大規模な流れ  $\langle \mathbf{u} \rangle$  と, それ

より小規模な乱流部分  $\mathbf{u}'$  に分ける. 後者が大規模な流れに影響を及ぼすという点を除いて, そのような乱流状態の詳細には興味がないとする. このような分割は一意にできるわけではなく, 我々の興味に依存している. 記号  $\langle \quad \rangle$  と  $'$  をある点における時間平均とそれからのずれとして,

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad (6.3)$$

と書くことにする. これを運動方程式 (6.1) に代入すると次になる:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \cdot \text{grad} \right) (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad}(\langle p \rangle + p') + \nu \Delta (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') + \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

ここで, この運動方程式の両辺の平均をとる. 平均の定義により  $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$  であることに注意して,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \text{grad} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \langle (\mathbf{u}' \cdot \text{grad}) \mathbf{u}' \rangle + 2\boldsymbol{\Omega} \times \langle \mathbf{u} \rangle \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} \langle p \rangle + \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

を得る. ここで,  $\langle (\mathbf{u}' \cdot \text{grad}) \mathbf{u}' \rangle$  が, 小規模な乱流部分が大規模な流れに及ぼす効果の項で, それ以外の項は大規模な流れの変数だけで記述されている.

$\langle (\mathbf{u}' \cdot \text{grad}) \mathbf{u}' \rangle$  の中身を見てみよう. その  $e_x$  成分は次のように変形できる:

$$\begin{aligned} & \langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \rangle \\ &= \langle \frac{\partial}{\partial x} (u'^2) + \frac{\partial}{\partial y} (u'v') + \frac{\partial}{\partial z} (u'w') - u' \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \rangle, \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \langle u'^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle. \end{aligned} \quad (6.6)$$

ここで, 2行目から3行目への変形では連続方程式 (6.2) を平均した結果を用いている. 同様にして  $\langle (\mathbf{u}' \cdot \text{grad}) \mathbf{u}' \rangle$  の各成分を求めると, 以下のテンソル  $\mathbf{T}$  を用いて,

$$\langle (\mathbf{u}' \cdot \text{grad}) \mathbf{u}' \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} \cdot \mathbf{T}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} -\rho_0 \langle u'^2 \rangle & -\rho_0 \langle u'v' \rangle & -\rho_0 \langle u'w' \rangle \\ -\rho_0 \langle u'v' \rangle & -\rho_0 \langle v'^2 \rangle & -\rho_0 \langle v'w' \rangle \\ -\rho_0 \langle u'w' \rangle & -\rho_0 \langle v'w' \rangle & -\rho_0 \langle w'^2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{vmatrix}, \quad (6.8)$$

と書ける. ここで, テンソル  $\mathbf{T}$  はレイノルズ (Reynolds) 応力と呼ばれるもので, (6.3) 式により速度場を大規模と小規模に分けたから出てきた項である.

結局, 大規模な流れに対する運動方程式は,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \text{grad} \langle \mathbf{u} \rangle + 2\boldsymbol{\Omega} \times \langle \mathbf{u} \rangle \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} \langle p \rangle + \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{\rho_0} \text{grad} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

と書ける. この式は大規模場の変数だけで閉じていない. 小規模場の影響がレイノルズ応力  $\mathbf{T}$  を通して大規模場の運動方程式に入っている.  $\mathbf{T}$  をどう求めどう表現するかは, 乱流理論で closure 問題と呼ばれる

難しい問題である。例えば、 $T$  の時間発展を陽に記述する方程式を導くと小規模場変数のより高次の相関が出てくるので、どこかで何らかの仮定を置いて方程式系を閉じる (closure) 必要がある。

ここでは分子粘性のアナロジーを用いた closure の簡便法を紹介する。混合距離理論 (mixing length theory) と呼ばれるものである (例えば, Holton, 1979; 第 5.1 節, および, Holton, 1992, 第 5.3.3 節を参照)。レイノルズ応力が大規模な流れの勾配に比例するとして,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{xx}}{\rho_0} &= 2A_H \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x}, \\ \frac{\tau_{yy}}{\rho_0} &= 2A_H \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y}, \\ \frac{\tau_{zz}}{\rho_0} &= 2A_V \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z}, \\ \frac{\tau_{xy}}{\rho_0} &= \frac{\tau_{yx}}{\rho_0} = A_H \left( \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right), \\ \frac{\tau_{xz}}{\rho_0} &= \frac{\tau_{zx}}{\rho_0} = A_V \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x}, \\ \frac{\tau_{yz}}{\rho_0} &= \frac{\tau_{zy}}{\rho_0} = A_V \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

とする。ここで、乱流運動は非等方的であるとして、水平方向と鉛直方向に異なる比例係数  $A_H$ ,  $A_V$  を仮定している。これらは渦粘性係数と呼ばれ、 $A_H$  が水平渦粘性係数であり、 $A_V$  が鉛直渦粘性係数である。このとき、大規模な流れに対する運動方程式 (6.9) のレイノルズ応力がどう書けるかを見てみよう。 $\rho_0^{-1} \text{grad} \cdot T$  の  $e_x$  成分は次のように変形できる：

$$\begin{aligned} e_x \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \text{grad} \cdot T \right) &= \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \\ &= 2A_H \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + A_H \left( \frac{\partial^2 \langle v \rangle}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} \right) + A_V \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} + A_H \frac{\partial^2 \langle w \rangle}{\partial x \partial z}, \\ &= A_H \left( \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} \right) + A_V \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2} + A_H \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \right), \\ &= A_H \left( \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} \right) + A_V \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

ここで、やはり連続方程式を用いている。同様にして他の成分を求めると、最終的にレイノルズ応力の項はつぎのように書ける：

$$\frac{1}{\rho_0} \text{grad} \cdot T = \left\{ A_H \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + A_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \langle \mathbf{u} \rangle. \quad (6.12)$$

これでレイノルズ応力項を大規模な流れ  $\langle \mathbf{u} \rangle$  だけで表すことができたので、大規模な流れに対する運動方程式 (6.9) は、大規模な場の変数  $\langle \mathbf{u} \rangle$  だけで閉じることになる。

実際の乱流運動でこのような関係式が成り立つという物理的根拠はとくにないことに注意すべきである。 $A_V, A_H$  の見積もりは  $\langle \mathbf{u} \rangle$  の空間スケールにも依存しているが、大気の場合、 $A_V$  は地面付近で  $10 \text{ m}^2/\text{s}$  程度、自由大気中ではそれ以下であり、 $A_H$  は  $10^5 \text{ m}^2/\text{s}$  程度である (例えば, Pedlosky, 1979; 4.2 節)。また、海洋の場合、 $A_V$  は  $10^{-4} \sim 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$  程度、 $A_H$  は  $10 \sim 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$  程度と考えられている (同じく, Pedlosky, 1979)。これらの値が分子粘性の粘性係数  $\nu$  に比べて、はるかに大きいことに注意すべきである。もっとも、これらの値の見積もりにはいろいろ曖昧なところがあるので、理論計算の結果がこれらの値に敏感に依存するようならばその結果を信用するわけにはいかない。ただ、曖昧さがあるにしても、このような簡便法の使用は、摩擦力が働く状況での大規模な力学の定性的特徴を把握するうえで有効な場合が多い。

## 6.3 惑星境界層理論

系の回転が重要な役割を果たす惑星規模の運動に対して、渦粘性がどのような働きをするかを解析する。ここでは、従属変数を微小パラメータで展開して系統的にスケール解析をする方法を用いる。

### 6.3.1 基礎方程式系

$\Omega$ で回転する系での均質非圧縮流体 ( $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ ) の大規模な流れを支配する方程式系 (連続方程式と運動方程式) は次で与えられる:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \left\{ A_H \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + A_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \mathbf{u} - g \mathbf{e}_z. \quad (6.14)$$

ここで、平均の記号  $\langle \quad \rangle$  は省略してあり、コリオリパラメータ  $f = 2|\Omega|$  とした。また、分子粘性は渦粘性に比べて十分小さいとして、後者だけを残している。境界条件としては、鉛直方向に有限の領域を考えて、

$$\left. \begin{array}{l} \text{上端 } (z = D) : \quad \mathbf{u} = (u_T, v_T, 0), \\ \text{下端 } (z = 0) : \quad \mathbf{u} = (0, 0, 0), \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

とする。すなわち、この領域の上端では水平な流れ  $(u_T, v_T, 0)$  があり、下端では地面に粘着 ( $\mathbf{u} = 0$ ) しているとする。

### 6.3.2 方程式の無次元化

まず、各変数の特徴的な大きさでそれぞれを無次元化しておく:

$$\left. \begin{array}{l} \text{次元つき変数} \\ (x, y) = L(x^*, y^*) \\ z = Dz^* \\ t = Tt^* \\ (u, v) = U(u^*, v^*) \\ w = U \frac{D}{L} w^* \\ p' = \rho_0 f U L p^* \end{array} \right\} \quad (6.16)$$

ここで、 $L$  は  $u_T, v_T$  の特徴的な水平スケール、 $D$  は流体の深さ、 $T$  は特徴的な時間スケールで、 $U$  は  $u_T, v_T$  の特徴的な大きさ、鉛直速度の特徴的スケールは連続方程式から  $W/U \sim O(D/L)$  と仮定する。また、圧力は静水圧平衡部分 ( $\bar{p}(z) = \bar{p}(0) - \rho_0 g z$ ) とそれからのズレ  $p'$  に分け、ズレの水平勾配がコリオリ加速と同程度の大きさと仮定する ( $f > 0$  で北半球とする)。さらに、時間スケールは  $u_T, v_T$  による移流の時間スケールで与えられるとして、 $T = L/U$  の大きさであるとする。無次元変数  $(x^*, y^*, z^*, t^*), (u^*, v^*, w^*, p^*)$  は、それぞれ  $O(1)$  の大きさとなっている。

まず、これらを連続方程式 (6.13) に代入すると、無次元をあらわす記号  $*$  を省略して次になる:

$$\frac{U}{L} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{D} \left( U \frac{D}{L} \right) \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.17)$$

両辺に  $L/U$  をかけて、次の無次元化した連続方程式を得る：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.18)$$

また、運動方程式 (6.14) の  $x$  成分は、

$$\frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - fUv = -\frac{\rho_0 fUL}{\rho_0 L} \frac{\partial p}{\partial x} + \left\{ \frac{A_H}{L^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{A_V}{D^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} Uu, \quad (6.19)$$

となる。ここで、両辺を  $fU$  で割り、次の無次元数

$$Ro \equiv U/fL : \text{ロスビー数}, \quad (6.20)$$

$$E_H \equiv A_H/fL^2 : \text{水平エクマン (Ekman) 数}, \quad (6.21)$$

$$E_V \equiv A_V/fD^2 : \text{鉛直エクマン数}, \quad (6.22)$$

を導入すると、次を得る：

$$Ro \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u - v = -\frac{\partial p}{\partial x} + E_H \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + E_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (6.23)$$

同様に  $y$  成分は、

$$Ro \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v + u = -\frac{\partial p}{\partial y} + E_H \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v + E_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (6.24)$$

となる。また、鉛直 ( $z$ ) 成分も同様に無次元化できて、縦横比 (aspect ratio) を  $\alpha \equiv D/L$  と書くと次になる：

$$Ro\alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha^2 \left\{ E_H \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + E_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\}. \quad (6.25)$$

結局、支配方程式系は、無次元数  $Ro, E_H, E_V, \alpha$  を用いて、(6.18), (6.23), (6.24), (6.25) のように無次元化される。

また、境界条件 (6.15) も同様に無次元化できて、

$$\left. \begin{array}{l} \text{上端 } (z=1) : \mathbf{u} = (u_T, v_T, 0), \\ \text{下端 } (z=0) : \mathbf{u} = (0, 0, 0), \end{array} \right\} \quad (6.26)$$

となる。ただし、 $u_T, v_T$  は無次元化した風速分布である。

### 6.3.3 スケール解析

第 2.3.3 節と同様に中緯度の総観規模現象に着目する。特徴的なスケールを  $U \sim 10$  m/s,  $L \sim 10^6$  m,  $D \sim 10^4$  m,  $f \sim 10^{-4}$  /s,  $A_H \sim 10^5$  m<sup>2</sup>/s,  $A_V \sim 10$  m<sup>2</sup>/s とすると、ロスビー数、エクマン数、縦横比は、それぞれ、 $Ro \sim 10^{-1}$ ,  $E_H \sim 10^{-3}$ ,  $E_V \sim 10^{-3}$ ,  $\alpha \sim 10^{-2}$  となる。 $E_V/E_H = A_V/(A_H\alpha^2) \sim 1$  であることに注意しよう。ここで、慣性項の粘性項に対する比としてレイノルズ (Reynolds) 数を定義すると、

$$Re \equiv \frac{UL}{A_H} = \frac{Ro}{E_H} \sim 10^2, \quad (6.27)$$

となる。このような現象では  $Ro \ll 1$  であり、 $(E_H, E_V, \alpha) \leq Ro^2$ ,  $Re \geq Ro^{-1}$  であることに注意しておこう。

ここで、従属変数を微小な無次元数  $Ro$  の巾級数として展開する：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + Ro \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ p_1 \end{pmatrix} + Ro^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ p_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (6.28)$$

展開係数  $u_i, v_i, w_i, p_i (i = 0, 1, 2, \dots)$  はすべて  $O(1)$  の大きさである。これらを無次元化した支配方程式 (6.18), (6.23), (6.24), (6.25) に代入して,  $Ro$  の巾ごとに整理し, それぞれのオーダーでの力学を考えることにする。

まず,  $O(Ro^0)$  では, 次の関係式が得られる：

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad (6.29)$$

$$-v_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad (6.30)$$

$$u_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y}, \quad (6.31)$$

$$0 = \frac{\partial p_0}{\partial z}. \quad (6.32)$$

(6.30) と (6.31) は, 水平風が基本的に地衝風平衡をしていることを示している。より正しく言えば,  $O(Ro^0)$  の水平風成分は地衝風平衡にあるということである。また, (6.32) は,  $O(Ro^0)$  では静水圧平衡にあることを示している。ここで, (6.30)~(6.32) より,

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \quad (6.33)$$

が得られる。このようなスケールでは流れが水平 2 次元的で鉛直方向に変化しないことを示している。これが, テーラー・プラウドマンの定理 (Taylor-Proudman theorem) である。さらに, 地衝風関係式 (6.30)(6.31) を連続方程式 (6.29) に代入して,

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \quad (6.34)$$

を得る。境界条件 (6.26) のうち上端 ( $z = 1$ ) での条件を使ってこれらを積分すると, このオーダーでは全層 ( $0 \leq z \leq 1$ ) で

$$u_0(x, y, z) = u_T(x, y), \quad v_0(x, y, z) = v_T(x, y), \quad w_0(x, y, z) = 0, \quad (6.35)$$

となる。結局, 基本的には上端での流れと同じ 2 次元水平運動が全層で卓越することを示している。

しかし, (6.35) の流れだけでは下端での境界条件  $u = v = 0$  を満たすことができない。実際には, 下端境界付近では粘性項が局所的に重要となり, 鉛直微分を全層の厚さ  $D$  で無次元化してスケール解析をしたことが問題となる。下端境界付近での流れ場の解析は, 次小節で説明するように, 特異摂動問題として捉える必要がある。

とりあえずここでは, 下端境界から離れた自由大気中で (これまでのスケール解析が妥当な領域で), 次のオーダーの方程式を見ておこう。 $O(Ro^1)$  では, 次の関係式が得られる：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad (6.36)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) u_0 - v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (6.37)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) v_0 + u_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \quad (6.38)$$

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial z}. \quad (6.39)$$

ここで, (6.36) と (6.39) は,  $O(Ro^1)$  でも, 非発散で静水圧平衡にあることを示している.

水平の運動方程式で  $\partial(6.38)/\partial x - \partial(6.37)/\partial y$  をとり, このオーダーでの渦度方程式の鉛直成分を求めると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial w_1}{\partial z}, \quad (6.40)$$

となる.  $O(Ro^0)$  での渦度のラグランジュ的時間変化が  $O(Ro^1)$  の流れの水平収束によって, つまり, 渦管の伸縮によって引き起こされることを表している. 後でみるように右辺が  $O(Ro^0)$  の変数で書けるならば,  $O(Ro^0)$  の渦度場 (そして速度場) の時間発展がこの方程式だけで記述できることになる.

### 6.3.4 特異摂動問題：エクマン境界層

一般に, 微分方程式の最高階の係数が非常に小さく, その項を無視すると微分方程式の階数が下がってしまう問題を特異摂動問題 (singular perturbation problem) という. 境界値問題でこのような状況になる場合には, 領域の内部と境界付近で解の性質が著しく変化することが多い. このとき, 内部領域の解と境界付近の解を区別して扱うことができる. (木村, 1983; 第 3.3 節). ここでは前小節の  $O(Ro^0)$  に戻って, 下端境界付近の解の振舞いについて特異摂動問題を解くことにより調べよう.

$O(Ro^0)$  の解 (6.35) は下端境界条件を満たさないので,  $z \sim 0$  付近で境界層補正を行なう. 境界層の厚さ (無次元) を  $\delta (\delta \ll 1)$  として,

$$z = \delta \zeta, \quad (6.41)$$

なる鉛直座標  $\zeta$  を導入し, 下端境界付近でのスケール解析をやり直す. 境界層内で内部領域の解に次のような補正項を導入する:

$$\left. \begin{array}{l} \text{内部領域解} \\ u_0 \rightarrow u_0(x, y) + \tilde{u}_0(x, y, \zeta), \\ v_0 \rightarrow v_0(x, y) + \tilde{v}_0(x, y, \zeta), \\ w_0 \rightarrow \tilde{w}_0(x, y, \zeta), \\ p_0 \rightarrow p_0(x, y) + \tilde{p}_0(x, y, \zeta). \end{array} \right\} \quad (6.42)$$

これらを方程式系 (6.18), (6.23), (6.24), (6.25) に代入し,  $O(Ro^0)$  の関係式, (6.29), (6.30), (6.31), (6.32) を引き算すると, 最終的に次の  $O(Ro^0)$  の補正項に対する方程式系を得る:

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \zeta} = 0, \quad (6.43)$$

$$-\tilde{v}_0 = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x} + \frac{E_V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \zeta^2}, \quad (6.44)$$

$$\tilde{u}_0 = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial y} + \frac{E_V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \zeta^2}, \quad (6.45)$$

$$0 = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \zeta}, \quad (6.46)$$

ここで,  $dz = \delta d\zeta$  より,  $\zeta$  微分に関する項がこのように残っている. また, これらの補正項に対する境界条件は, (6.26) より,

$$\left. \begin{array}{l} \text{上端 } (\zeta \rightarrow \infty) : \tilde{u}_0 = \tilde{v}_0 = \tilde{p}_0 = 0, \\ \text{下端 } (\zeta = 0) : \tilde{u}_0 = -u_0, \tilde{v}_0 = -v_0, \tilde{w}_0 = 0, \end{array} \right\} \quad (6.47)$$

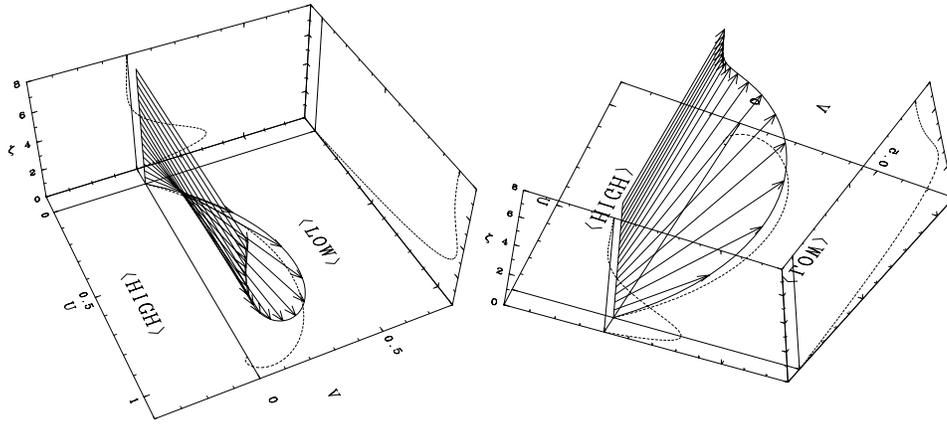


図 6.3: エクマン螺旋の解析解 (北半球). 水平流  $(U, V) = (u_0^{total}, v_0^{total})$  の  $\zeta$  依存性を 3 次元的に表現し, それぞれの断面に射影したもの. 二つの異なる視点からプロットした.

となる. 上端では  $\zeta \rightarrow \infty$  で境界層補正がなくなり, 下端では, 内部域の解と補正項が打ち消しあってちょうど粘着条件を満たすように置いている.

(6.46)(6.47) より, あらゆる高さ  $\zeta$  で,

$$\tilde{p}_0 = 0, \quad (6.48)$$

である. これを水平運動方程式 (6.44) に代入すると,

$$-\tilde{v}_0 = \frac{E_V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \zeta^2}, \quad (6.49)$$

となる. このスケーリングでこの式が釣合う (コリオリ項と粘性項が釣合う) ためには,  $E_V/\delta^2$  が  $O(1)$  でなければならない. すなわち, 境界層の厚さは,

$$\delta = \sqrt{E_V} \leq Ro, \quad (6.50)$$

程度の小ささでなければならない. 次元付きの厚さは,

$$D\delta = D\sqrt{E_V} = D\sqrt{\frac{A_V}{f} \frac{1}{D}} = \sqrt{\frac{A_V}{f}}, \quad (6.51)$$

となる. 大気の数値をとって  $A_V \sim 10 \text{ m}^2/\text{s}$  とし,  $f \sim 10^{-4}/\text{s}$  とすると, 境界層の厚さはおよそ 300 m となる. 境界層の厚さが流体層の深さ  $D$  や現象の水平規模  $L$  に依存していないことに注意しよう.

境界層の厚さをこのようにとると, 補正項に対する方程式系は次のように整理できる:

$$-\tilde{v}_0 = \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \zeta^2}, \quad (6.52)$$

$$\tilde{u}_0 = \frac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial \zeta^2}. \quad (6.53)$$

結局, 境界条件 (6.47) のもとにこれらを解けばよい.  $\tilde{v}_0$  消去すると,

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}_0}{\partial \zeta^4} + \tilde{u}_0 = 0, \quad (6.54)$$

となる.  $\tilde{u}_0 \propto A(x, y)e^{\lambda \zeta}$  において (6.54) に代入すると,  $\lambda = (1 \pm i)/\sqrt{2}, -(1 \pm i)/\sqrt{2}$  であるので, 一般解が

$$\tilde{u}_0 = A_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\zeta} + A_2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\zeta} + A_3 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\zeta} + A_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\zeta}, \quad (6.55)$$

と書ける. 上端の境界条件,  $\zeta \rightarrow \infty$  で  $\tilde{u}_0 \rightarrow 0$  より,  $A_1 = A_2 = 0$  である. また,  $\tilde{u}_0$  に対する下端境界条件より,

$$A_3 + A_4 = -u_0, \quad (6.56)$$

である. さらに,  $\tilde{v}_0 = -\partial^2 \tilde{u}_0 / \partial \zeta^2$  より,  $\tilde{v}_0$  に対する下端条件を用いて,

$$-iA_3 + iA_4 = -v_0, \quad (6.57)$$

となり,  $A_3 = -(u_0 + iv_0)/2, A_4 = -(u_0 - iv_0)/2$  と係数が定まる. 少し変形すると補正項は

$$\tilde{u}_0 = -e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \left( u_0 \cos \frac{\zeta}{\sqrt{2}} + v_0 \sin \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right), \quad (6.58)$$

$$\tilde{v}_0 = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \left( u_0 \sin \frac{\zeta}{\sqrt{2}} - v_0 \cos \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right), \quad (6.59)$$

となる. 結局,  $O(Ro^0)$  の解は,

$$u_0^{total} = u_0 + \tilde{u}_0 = u_0 \left( 1 - e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) - v_0 e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad (6.60)$$

$$v_0^{total} = v_0 + \tilde{v}_0 = v_0 \left( 1 - e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) + u_0 e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \quad (6.61)$$

となる. 図示すると図 6.3 のように螺旋形になるので, この解をエクマン螺旋 (Ekman spiral) と呼んでいる.  $\zeta = 0$  では流速 0 で, 高さとともに螺旋形を描き  $\zeta = 4$  くらいでほぼ自由大気の流れ ( $u_0, v_0$ ) となっている.  $u_0$  を地衝風として高圧側から低圧側に流れ込む成分が境界層内に存在する. また, このような, 気圧傾度力, コリオリ力, および粘性力の釣合いとして形成される境界層をエクマン境界層 (Ekman boundary layer) という. 特徴的なエクマン境界層の厚さを  $z_E \equiv \sqrt{2}\delta D = \sqrt{2A_V/f}$  で表して, これをエクマンの厚さと呼ぶ. エクマンの厚さ (Ekman depth) は  $A_V$  が大ききほど厚くなり,  $f$  が小さい (低緯度) ほど厚くなる. しかし, 流体層の深さ  $D$  や現象の水平規模  $L$ , 流速  $U$  には依存していないことに注意しよう.

## 6.4 現実世界のエクマン螺旋

図 6.4 は実際の観測例である. 20 年近く前に Cabauw (オランダ) の鉄塔 (213m) 観測で得られた結果である. 夕方から夜半にかけて, それなりに理論に近い風速風向分布となっている. 図中の記号 G が地衝風を表わしている.

エクマン螺旋は海洋の表層でも観測される. というよりも, Ekman(1905) の原論文は海流に対する地球回転の影響を論じたもので, 海洋表層の境界層理論であった (酒井, 1997). 大気下端のエクマン境界層では, 境界層下端が粘着条件で, 上端は自由 (地衝風) である. 一方, 海洋の場合, 境界層上端 (海面) では応力一定とし, 下端は粘着 (速度ゼロ) である. 北半球の場合, 表面の海水は風下に対して右 45 度の方向に流れ, 深くなるにつれて螺旋を描きながら速度がゼロに近づく.

酒井 (1997) は, 室内の回転水槽実験でエクマン螺旋を可視化した. [http://www.gfd-dennou.org/library/gfd\\_exp/exp\\_j/exp/ek/1/res.htm](http://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/exp_j/exp/ek/1/res.htm) には, 実験の動画が置いてある.

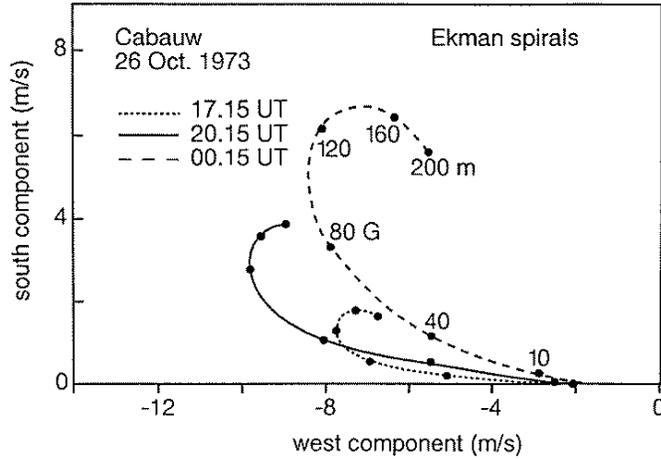


Figure 6. Evolving Ekman spirals up to 200 m. Dots are observations. The symbol  $G$  marks the geostrophic wind. Notice that the directional shear increases with time.

図 6.4: エクマン螺旋の観測例: オランダ, Cabauw での鉄塔 (213m) 観測より, 1973/10/26 (Van Ulden and Wieringa, 1996; Fig.6).

## 6.5 総観規模の渦のスピンダウン

自由大気中には総観規模の渦があり, 地表付近にエクマン境界層が形成される状況を考えて, 渦がスピンダウンする過程を解析する.

### 6.5.1 エクマン・パンピング

エクマン境界層内の水平風は (6.60), (6.61) で求めたが, 一般に, エクマン境界層内には鉛直風も存在する.  $O(Ro^0)$  の補正項に対する連続方程式 (6.43) と下端境界条件 (6.47) をもう一度書くと,

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \zeta} = 0, \quad (6.62)$$

$$\tilde{w}_0 = 0 \quad \text{at } \zeta = 0, \quad (6.63)$$

である. (6.58), (6.59), (6.62) より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \zeta} &= -\delta \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y} \right), \\ &= \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\zeta}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

を得る. これを下端 ( $\zeta = 0$ ) から上端 ( $\zeta = \infty$ ) まで積分して,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0|_{\zeta=\infty} &= \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\zeta}{\sqrt{2}} d\zeta, \\ &= \frac{\delta}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (6.65)$$

となる. すなわち, 境界層上端での鉛直風は内部領域の渦度に比例し,  $O(\delta)$  の大きさである. ただし,  $\delta \leq Ro$  であった. 正の渦度 (低気圧) の場合には, 境界層内で収束が起こり, 上昇流となる (図 6.5). このような流れ

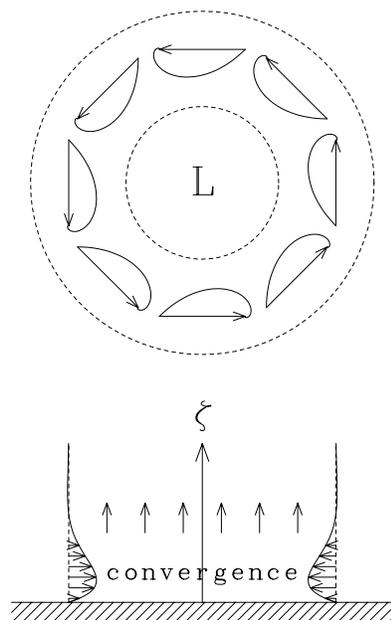


図 6.5: 温帯低気圧に伴うエクマンパンピング (北半球). (上) 水平断面, (下) 鉛直断面.

をエクマン収束 (Ekman convergence) またはエクマンパンピング (Ekman pumping) という. 負の渦度 (高気圧) の場合には逆向きで下降流となる. これらの流れが高・低気圧という渦運動に伴う 2 次循環である.

### 6.5.2 渦のスピンドウン

(6.28) のロスビー数展開  $w = w_0 + Ro w_1 + Ro^2 w_2 + \dots$  で, (6.35) より  $w_0 = 0$  であった. 前小節の結果より  $O(Ro)$  で,

$$w_1|_{z=0} = \frac{\delta}{2Ro} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right), \quad (6.66)$$

となる.

ここで, スケール解析の小節に戻り,  $O(Ro^0)$  の渦度方程式 (6.40) を  $z = 0$  から  $z = 1$  まで (自由大気中を) 積分して,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) &= w_1|_{z=1} - w_1|_{z=0}, \\ &= -\frac{\delta}{2Ro} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (6.67)$$

を得る. すなわち, 自由大気中の渦の減衰は内部領域のレイノルズ応力項ではなく, エクマン・パンピングに伴う渦管のストレッチ項によって起こることが示された. 渦の減衰時間  $\tau$  (次元付き) は, その強さが  $1/e \sim 0.37$  になる時間として,

$$\tau = \frac{L}{U} \frac{\delta}{2Ro}, \quad (6.68)$$

を見積もってやれば良い. ここで与えた特徴的スケールでは, 約 4.4 時間になる. 現実の台風や温帯低気圧といった総観規模の渦運動がこの時間スケールで減衰しないのは, それらを強化・維持する過程が含まれているからである.

## 6.6 CISK

現実の台風がエクマンパンピングによる減衰時間に比べて長時間持続する理由として、第 2 種の条件不安定 (Conditional Instability of the Second Kind; CISK) が考えられている。ここでは、そのごく基本を概観する (小倉, 1978; 第 7.4 節参照)。まず、台風を具体的にイメージしてみよう。エクマン収束で水蒸気を多量に含んだ空気が渦の中心部に収束し、そこで上昇する様子が描けるが、この上昇にともなって水蒸気が凝結し潜熱を放出する。これにより大気は加熱され、浮力を得て上昇することになる。式 (6.67) で  $O(Ro^0)$  の渦度方程式を鉛直に積分したときには、上端 ( $z = 1$ ) での境界条件として  $w_1 = 0$  としたが、台風では中心部での潜熱の放出量、そして上昇速度がエクマンパンピングに比例するとして、

$$w_1|_{z=1} = \eta w_1|_{z=0}, \quad (6.69)$$

としてみよう。渦度方程式は、渦度を  $\zeta_0$  として

$$\frac{D}{Dt}\zeta_0 = (\eta - 1)\frac{\delta}{2Ro}\zeta_0, \quad (6.70)$$

となる。すなわち、 $\eta > 1$  ならば渦は強くなる。このように、積雲群 (のなかの水蒸気凝結) と大規模な運動が相互に影響して、大規模運動が不安定成長していく過程を第 2 種の条件不安定と呼んでいる。

## 参考文献

- Ekman, V.W., 1905: On the influence of the earth's rotation on ocean-currents. *Arkiv Fr Matematik, Astronomi och Fysik*, **2-11**, 1-53.
- Holton, J.R., 1979: *An Introduction to Dynamic Meteorology (Second Edition)*, Academic Press, 391pp.
- Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology (Third Edition)*, Academic Press, 507pp.
- 木田 重雄, 1994: パリティブックス「いまさら流体力学?」, 丸善, 197pp.
- 木村 竜治, 1983: 「地球流体力学入門」, 気象学のプロムナード 13, 東京堂出版, 247pp.
- 木村 竜治, 1985: 「改訂版 流れの科学」, 東海大学出版会, 214pp.
- 小倉 義光, 1978: 「気象力学通論」, 東京大学出版会, 249pp.
- Pedlosky, J., 1979: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 624pp.
- 酒井 敏, 1997: 地球流体力学基礎実験集, [http://www.gfd-dennou.org/library/gfd\\_exp/index.htm](http://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/index.htm).
- Van Ulden, A.P. and J. Wieringa, 1996: Atmospheric boundary layer research at Cabauw. *Boundary-Layer Meteorology*, **78**, 39-69.



# 第7章 音波

まず、身近な大気波動である音波をとりあげ、それを例題として波に関する基本概念を述べる。

## 7.1 音波の波動方程式

圧縮性流体では、密度変化が波となって流体中を伝播する。この“密度波”が音波である。いっぽう、非圧縮性流体は、密度波の伝播速度が無限大になった極限の流体であるといえる。

### 7.1.1 基礎方程式系

圧縮性の影響だけを取り出すために、外力がなく ( $\mathbf{K} = 0$ )、断熱的 ( $\kappa = 0, Q = 0$ ) な完全流体 ( $\nu = 0$ ) を考える。連続方程式、運動方程式、エネルギー方程式は次のようになる：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (7.2)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0. \quad (7.3)$$

初期時刻においてエントロピー  $s$  が一様であるとする、式 (7.3) よりつねに  $s$  は一定となるので、状態変数  $p, \rho$  の間には、 $f(p, \rho) = 0$  の形の状態方程式が成り立つ。とくに理想気体の場合には、次の断熱法則が成り立つ。

$$p = C\rho^\gamma, \quad (\gamma = c_p/c_v, C = \text{定数}). \quad (7.4)$$

方程式 (7.1), (7.2), (7.4) は、圧縮性完全流体 (断熱理想気体) に対する、 $(p, \rho, \mathbf{u})$  で閉じた方程式となっている。

この方程式系は非線型であり、このままでは解析が困難である。そこで、ある基本場を考え、そこに微小な摂動 (ゆらぎ) が加わったとして、微小摂動に対する線型解析を行なう。

### 7.1.2 基本場と線型擾乱：波動方程式

基本場として、一様な圧力と密度の静止した流体を考える：

$$\begin{cases} p = p_0 = \text{一定}, \\ \rho = \rho_0 = \text{一定}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7.5)$$

基本場 (7.5) は、基礎方程式系 (7.1), (7.2), (7.4) を満たしている。

ここで、基本場に微小な摂動が加わり、流体の圧力、密度、速度が、それぞれ、 $p, \rho, \mathbf{u}$  になったとする。方程式 (7.1), (7.2) で、微小量についての 2 次の項を無視して線型近似をすると、次になる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \operatorname{grad} \rho. \quad (7.7)$$

ただし、式 (7.7) では、関係式 (7.4) を用いている。ここで、 $\mathbf{u}$  を消去して整理すると、密度の摂動  $\rho$  に対する波動方程式を得る：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \Delta \rho = 0. \quad (7.8)$$

このような密度波を音波といい、その伝播速度  $c_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_0}$  を音速という。 $c_0$  は圧縮率 ( $d \ln \rho / dp$ ) の平方根に反比例している。非圧縮性流体の場合には、圧縮率がゼロであるから、音速  $c_0 \rightarrow \infty$  となっている。また、式 (7.7) から  $\mathbf{u} \parallel \operatorname{grad} \rho$  であり、運動方向が波の伝播方向と一致するので、音波は縦波であることがわかる。

理想気体の場合には、音速は式 (7.4) を用いて次のようになる：

$$c_0 = \sqrt{\gamma C \rho_0^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R T_0}. \quad (7.9)$$

空気の場合、理想気体として、 $\gamma = c_p / c_v = 1.4$ ,  $R = 2.87 \times 10^2 \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$  を用いると、温度に依存して表 7.1 のような音速になる。水の場合には、当然この式が使えないが、実際の測定によると圧縮率の温度依存性を反映して、表 7.1 のような値となる。

表 7.1: 空気中、水中の音速.

|          |     |     |     |          |      |      |
|----------|-----|-----|-----|----------|------|------|
| 空気温度 [K] | 273 | 300 | 373 | 水温度 [K]  | 273  | 293  |
| 音速 [m/s] | 331 | 347 | 383 | 音速 [m/s] | 1407 | 1484 |

## 7.2 波に関する基本用語

音波を例にとり、波に関するいくつかの基本概念と用語を説明する。

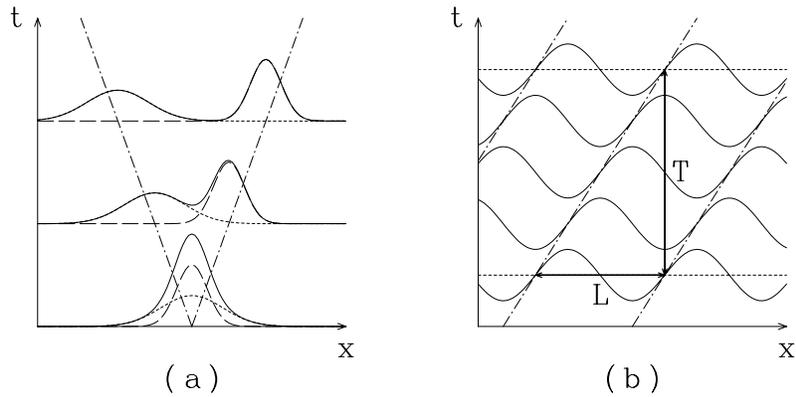


図 7.1: (a) 正負の要素波. それぞれを破線と点線で, 重ね合わせた結果を細実線で示す. 一点鎖線は,  $x \pm c_0 t = \text{一定}$ , の特性線. (b) 正の進行波. 波長  $L$  と周期  $T$  を示す.

### 7.2.1 平面波

波動が空間的に一方向 ( $x$  軸方向とする) にのみ変化する場合, つまり, 平面波の場合を考える. 線型化した方程式 (7.6), (7.7) は,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (7.11)$$

となり, これらから  $u$  を消去して, 次の波動方程式を得る:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \rho = 0. \quad (7.12)$$

波動方程式 (7.12) の一般解は,

$$\rho(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad (7.13)$$

の形に表される. ここで,  $f, g$  は任意の関数であり,  $f(x - c_0 t)$  は形を変えないで  $x$  軸正方向に一定速度  $c_0$  で進行する正の要素波であり,  $g(x + c_0 t)$  は負方向に  $c_0$  で進行する負の要素波である. 一般解はこれらの要素波の重ね合わせとなっている (図 7.1a).

### 7.2.2 正弦波

波として, 空間座標  $x$  および時間  $t$  について, 三角関数の形で変化する正弦波を考える:

$$\rho(x, t) = \text{Re}[P e^{i(kx - \omega t)}]. \quad (7.14)$$

波数:  $k/2\pi$  (単位長さあたりに含まれる波の数)

波長:  $L = 2\pi/k$

振動数:  $\omega/2\pi$  (単位時間内におこる波の数)

周期:  $T = 2\pi/\omega$

ただし,  $k > 0$  としておく. 正弦波 (7.14) で, 変数  $(kx - \omega t)$  は波の位相を表す. 等位相面の伝わる速度を位相速度と呼ぶが,  $kx - \omega t = \text{一定}$  より,  $kdx/dt - \omega = 0$  なので, 位相速度  $c_p$  は次のように与えられる (図 7.1b) :

$$c_p \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}. \quad (7.15)$$

正弦波 (7.14) は, 位相速度  $c_p$  を用いて  $\rho(x, t) = P \cos k(x - c_p t)$  と書ける.  $c_p > 0$  ( $\omega > 0$ ) のとき, 波は  $x$  軸に沿って正方向に伝播し,  $c_p < 0$  ( $\omega < 0$ ) のときは負方向に伝播する.

### 7.2.3 波群と群速度

$f(x, t)$  の振幅変調の時間発展を考える (巽, 1982; 第 6-6 節, Lindzen, 1990; 第 8.1 節, などを参照). 初期時刻  $t = 0$  で搬送波  $e^{ik_0 x}$  が  $C(x)$  の振幅変調をもつとする (図 7.2a) :

$$f(x, 0) = C(x)e^{ik_0 x}. \quad (7.16)$$

$C(x)$  のフーリエ (Fourier) 変換を考える :

$$B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} C(x) dx, \quad C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} B(k) dk. \quad (7.17)$$

これより, 式 (7.16) は次のように書ける :

$$f(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_0+k)x} B(k) dk. \quad (7.18)$$

これが, 時刻  $t$  では,

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(k_0+k)x - \omega(k_0+k)t]} B(k) dk, \quad (7.19)$$

となる. ここで, 振動数  $\omega(k_0 + k)$  は波数の関数である. この  $\omega$  を  $k_0$  のまわりで展開し, 振幅の空間変化が非常にゆっくりである ( $|k_0| \gg |k|$ ) とすると, 次のように変形できる :

$$\begin{aligned} f(x, t) &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(k_0+k)x - \{\omega(k_0) + k \frac{d\omega}{dk}\}t]} B(k) dk, \\ &= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x - \frac{d\omega}{dk}t)} B(k) dk, \\ &= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} C(x - (d\omega/dk)t). \end{aligned} \quad (7.20)$$

すなわち, 振幅変調  $C(x)$  は,

$$x - \frac{d\omega}{dk}t = \text{一定}, \quad (7.21)$$

にしたがって伝達される. この振幅変調伝達のを群速度と呼ぶ. ここで,  $dx/dt - d\omega/dk = 0$  なので, 群速度  $c_g$  は次のように与えられる :

$$c_g \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.22)$$

位相速度の定義 (7.15) より,

$$c_g = \frac{d}{dk}(kc_p) = c_p + k \frac{dc_p}{dk}, \quad (7.23)$$

となるので, 位相速度が波数に依らない波動 (非分散性波動) の場合には, 群速度  $c_g$  が位相速度  $c_p$  と一致する.

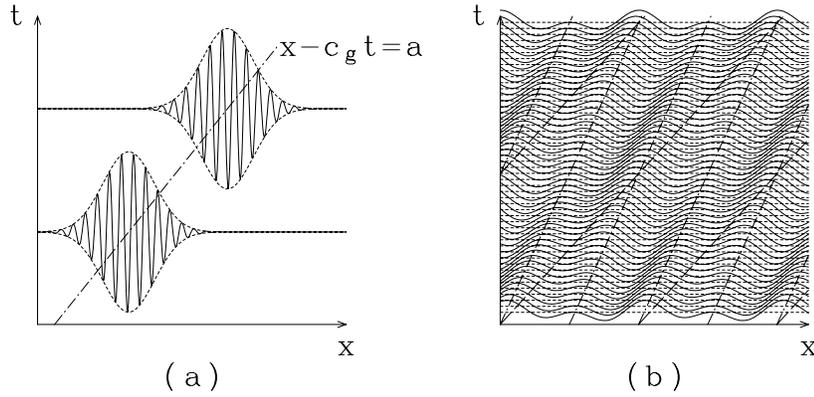


図 7.2: (a) 波束の伝播. (b) 分散性波動の例:  $f(x, t) = \cos k(x - ct) + \cos 2k(x - ct/2)$ . それぞれの波の等位相線を破線と一点鎖線で示す.

波群の局所的状態を表す特性量として波のエネルギー  $\mathcal{E}_w$  が定義できるならば, それもまた波の群速度  $c_g$  で伝播する (巽, 1982; 第 6-6-4 節):

$$\frac{\partial \mathcal{E}_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c_g \mathcal{E}_w) = 0. \quad (7.24)$$

## 7.3 音波の性質

### 7.3.1 分散関係式

空間一次元の線型方程式 (7.10), (7.11) をもう一度行列形式で書いて,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0. \quad (7.25)$$

ここで, 次の正弦波解を仮定する:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} P \\ U \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \right]. \quad (7.26)$$

この正弦波解を方程式 (7.25) に代入すると,

$$\begin{pmatrix} -i\omega & ik\rho_0 \\ ikc_0^2/\rho_0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ U \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} = 0. \quad (7.27)$$

ここで, 自明でない解を持つためには, 係数行列式がゼロでなければならない.  $\omega^2 - k^2 c_0^2 = 0$  より,

$$\omega = \pm c_0 k. \quad (7.28)$$

これより, 位相速度  $c_p$  と群速度  $c_g$  が等しく,  $\pm c_0$  であることがわかる. すなわち, 音波の場合, どんな波長の波も一定の位相速度 (=音速) で伝わる. 位相速度が波数によらず一定の場合には, 任意の波形が変形することなく進行するので, このような性質を持つ波動を非分散性波動という.

これに対して、異なる波長の正弦波が異なる位相速度  $c_p(k)$  をもつときには、これらの正弦波で構成される波形は時々刻々に変化する (図 7.2b). このことを波の分散といい、このような性質を持つ波動を分散性波動という。また、一般に、 $c_p = c_p(k)$  の式または (7.28) 式のように、正弦波の位相速度 (または振動数) と波数 (または波長) の関係式を分散関係式という。分散関係式は、各種波動の伝播特性を把握する上で最も基本的なものである。

### 7.3.2 波の構造

音波の時間・空間構造は、式 (7.27) より  $P$  と  $U$  の関係を求めて、(7.26) に戻してやれば良い。

$$U = \frac{\omega}{k\rho_0} P = \frac{c_0}{\rho_0} P, \quad (7.29)$$

より、速度の変動と密度の変動が同位相であることがわかる。図 7.3 に音波の構造を示す。もとの方程式が示す通りであるが、流れ場の収束・発散により、密度が増加・減少し、密度差が圧力傾度力を作って、加速度を生む。このようにして、音波が伝播していく。

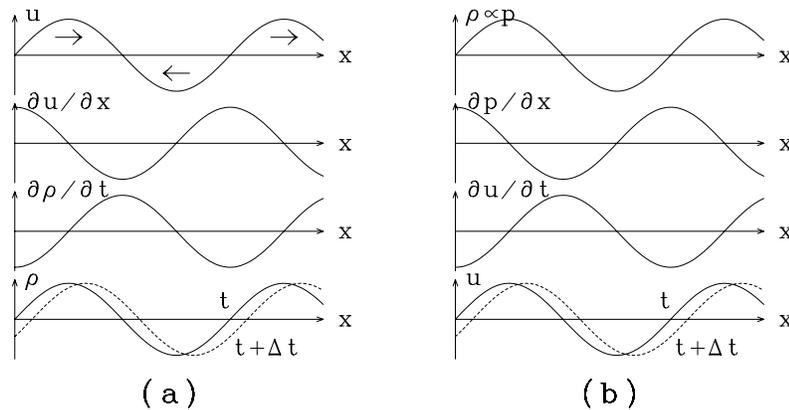


図 7.3: 音波の水平構造と伝播のしくみ. (a) 密度の波 (連続方程式). (b) 速度の波 (運動方程式).

最後に、注意を一つ。これまでの解析では、具体的な初期条件、境界条件を与えて、実際にどのように時間発展をするかを調べてはいない。しかし、線型の範囲内では (変動が微小である限りは)、解は正弦波解の重ね合わせで書けるので、初期条件、境界条件を満たすようにそれぞれの波数・振動数の振幅を決めてやればよい。分散関係式が得られ正弦波解の構造が求めれば、およその結果はわかったようなものである。

## 7.4 音波と気象学

大気現象で音波が重要な役割をするものはそれほど多くない。しかし、観測手段として音波を使ったものがあり、数値計算でも音波にまつわる問題がある。ここでは、簡単にそれらに言及しておく。

1. 低周波音波: infrasonic wave と呼ばれるもので、核実験や火山噴火などによって生じた音波のうち低周波数のものは、地球上の遠くはなれた所まであまり減衰せずに伝播することがある。図 7.4 は 1954

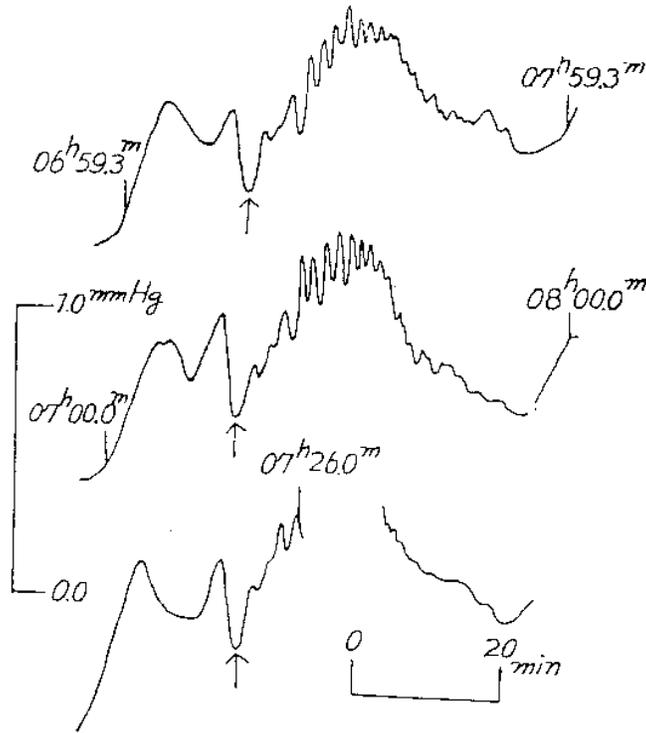


Fig. 3a Shida's microbarograms at Shionomisaki on 1st Mar. 1954 (original size)

図 7.4: 核実験により生じた低周波音波を潮岬の微気圧計で観測した例 (Yamamoto, 1954).

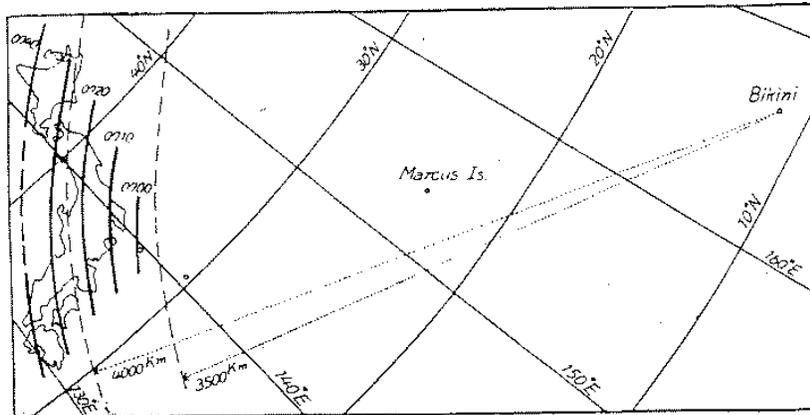


Fig. 7 Isochronous chart on 1st Mar. 1954

図 7.5: ビキニ島から伝播する低周波音波の到着時刻の見積り (Yamamoto, 1954).

年 3 月 1 日 ビキニ島での核実験により生じた低周波音波を潮岬の微気圧計で観測した例 (Yamamoto, 1954) である。このときの音波の伝播状況は図 7.5 のように見積られている。

2. 音波レーダー：音波を発射し、その散乱波や直達波などを観測することにより、伝播してきた媒質（大気）の状態を遠隔的に観測する。

sodar : 音波の散乱から逆転層の位置・強さを推定する.

Doppler sodar : 散乱された音波の振動数変化から散乱場所の風速を推定する.

グリネード法 : ロケット手榴弾を間隔をあけて爆発させ, 地上の観測網で音波の到達時刻を記録する.  
音の伝播速度から温度や風の鉛直構造を推定する.

3. 数値モデルで音波を除く : (例えば, 栗原 (1979; 第 4 章) を参照のこと.) 一般的な時空間の数値モデルで安定に時間発展させるためには, 次の Courant-Friedrichs-Levy(CFL) 条件を満たしている必要がある (例えば, Holton, 1992; p.442) :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c_p. \quad (7.30)$$

ここで,  $\Delta x$  と  $\Delta t$  は, それぞれ, 数値モデルの空間と時間の格子間隔である. 数値天気予報モデルでは, 全球モデルでも  $\Delta x$  がおよそ 50 km だから, 音速を  $c_p \sim 300$  m/s とすると,  $\Delta t \leq 50000\text{m}/300\text{ms}^{-1} = 167\text{s} \sim 3$  分でなければならない. この時間刻みで何日も時間積分するのは容易なことではない.

ところが, 興味 (天気予報) の対象である低気圧の移動は,  $c \sim 1000\text{km}/1$  日  $\sim 10^6\text{m}/10^5\text{s} \sim 10$  m/s なので, もしも「音波を除くことができれば」,  $\Delta t \leq 50000\text{m}/10\text{ms}^{-1} \sim 5000\text{s} \sim 1.4$  時間 と大きな時間刻みがとれる. 戦後, 気象力学の大きな発展をもたらした原動力として, このような数値天気予報を実現するための要請があった.

## 参考文献

- Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, 507pp.  
 栗原 宣夫, 1979: 「大気力学入門」, 岩波全書 317, 244pp.  
 Lindzen, R.S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 310pp.  
 巽 友正, 1982: 「流体力学」, 培風館, 453pp.  
 Yamamoto, R., 1954: The Microbarographic Oscillations Produced by the Explosions of Hydrogen-Bombs. *Bull. Inst. Chemical Res. Kyoto Univ., Suppl. Issue on the Radioactive Dust from Nuclear Detonation*, 120–133.

## 第8章 重力波

地球流体特有の状況のひとつに重力場のなかに置かれているということがあげられる。上層が重くて下層が軽い場合、そのような状態は不安定で対流が起きる。このような成層状態を不安定密度成層という。一方、安定密度成層した流体中では、上下の変位に対して浮力が復元力として働き、波動が伝播する。地球流体力学の分野では、このような浮力波を伝統的に重力波と呼んでいる。この章では、慣性系での重力波について述べる。まず非圧縮性流体の場合を詳しく解析し、つぎに圧縮性流体の場合の結果を示す。

### 8.1 慣性系での重力波 (非圧縮性流体の場合)

一般に重力波は音速に比べて十分にゆっくりとした現象なので、非圧縮性流体 ( $D\rho/Dt = 0$ ) の仮定をしてその特徴を調べることができる。ここでは、鉛直 2 次元の空間で解析する。

#### 8.1.1 基礎方程式系

重力場のなかにおかれた非圧縮性完全流体の連続方程式と運動方程式は次のようになる：

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (8.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g}. \quad (8.2)$$

ここで、鉛直 2 次元空間  $(x, z)$  で、 $x$  座標を水平に  $z$  座標を鉛直上向きにし、重力加速度を  $g$  として単位質量あたりの外力を  $\mathbf{g} = (0, -g)$  とする。非圧縮性を仮定したので、エネルギー方程式、状態方程式を陽に考える必要がない。方程式 (8.1), (8.2) は、 $(p, \rho, \mathbf{u})$  で閉じた方程式となっている。

この方程式系は非線型であり、このままでは解析が困難である。そこで、ある基本場を考え、そこに微小な変動が加わったとして、微小変動に対する線型解析を行なう。

#### 8.1.2 基本場：静力学的平衡

基本場として、水平に一様な静止した流体を考える：

$$\begin{cases} p &= \bar{p}(z), \\ \rho &= \bar{\rho}(z), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}. \end{cases} \quad (8.3)$$

基本場 (8.3) は, 基礎方程式系 (8.1), (8.2) を満たしており, 運動方程式の鉛直成分は次になる :

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\bar{\rho}g. \quad (8.4)$$

これは, 静力学的平衡を表している (第 2.4.1 節参照).

### 8.1.3 線型擾乱

基本場 (8.3) に微小な擾乱 ( ' で表す) が加わったとする :

$$\begin{cases} p = \bar{p}(z) + p'(x, z, t), \\ \rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, z, t), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}'(x, z, t). \end{cases} \quad (8.5)$$

方程式 (8.1), (8.2) で, 微量量についての 2 次の項を無視して線型近似をし, 速度  $\mathbf{u}'$  を成分 ( $u', w'$ ) で表記すると, 次を得る :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0, \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g. \quad (8.9)$$

ここで, (8.9) の導出では,  $\rho^{-1}$  をテイラー (Taylor) 展開して,  $(\bar{\rho} + \rho')^{-1} \simeq \bar{\rho}^{-1}(1 - \rho'/\bar{\rho})$  の近似を使っている. これらは ( $p', \rho', u', w'$ ) を従属変数とする線型微分方程式系である. 係数は  $\bar{\rho}(z)$  で  $z$  のみに依存している.

2 次元非発散の連続方程式 (8.7) より, 流線関数  $\psi(x, z, t)$  を次のように導入する :

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8.10)$$

運動方程式の rot をとる. つまり,  $\partial(8.8)/\partial z - \partial(8.9)/\partial x$  を計算し, 式 (8.10) を使うと, 次の渦度方程式を得る :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial x}. \quad (8.11)$$

右辺第 1 項は, 密度成層した流体中で水平気圧傾度力が働くときの渦度の生成を表し, 第 2 項は, 水平に密度差があるときの浮力による渦度の生成を表している. ここで, (8.8) と (8.10) より, 右辺第 1 項は流線関数を用いて書き直せる. その結果の式と (8.6) より  $\rho'$  を消去して, 最終的に次の流線関数  $\psi(x, z, t)$  に対する線型偏微分方程式を得る :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi - \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0. \quad (8.12)$$

ただし,  $N$  はブラント-バイサラ (Brunt-Väisälä) 振動数,  $H$  は密度のスケールハイトであり, 基本場の  $\bar{\rho}(z)$  によって次のように与えられる :

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz}, \quad (8.13)$$

$$H = -\bar{\rho} \left( \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right)^{-1} = \frac{g}{N^2}. \quad (8.14)$$

ここで, さらに  $N$  が  $z$  に依らず一定 ( $N_0$ ) と仮定する. つまり, スケールハイトも  $z$  に依存せず, 基本場の密度は  $\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_0 e^{-z/H_0}$  であるとする. 次の変数変換

$$\tilde{\psi}(x, z, t) = e^{-z/2H_0} \psi(x, z, t), \quad (8.15)$$

を行なうと, 方程式 (8.12) はさらに簡単な形に書ける:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{4H_0^2} \right) \tilde{\psi} + N_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} = 0. \quad (8.16)$$

これは, 従属変数  $\tilde{\psi}(x, z, t)$  に対する定係数の偏微分方程式であり, 適当な初期条件・境界条件を与えると容易に解ける. 得られた  $\tilde{\psi}$  より,  $u', w'$  を次のように求めることができる:

$$\begin{cases} u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -e^{z/2H_0} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2H_0} \right) \tilde{\psi}, \\ w' = \frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{z/2H_0} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}. \end{cases} \quad (8.17)$$

また,  $\rho', p'$  もそれぞれ (8.6), (8.8) より求めることができ, 流体の運動が完全に決定される.

#### 8.1.4 分散関係式

重力場のなかにある安定密度成層流体中の波動方程式 (8.16) で,  $H_0^2, N_0^2$  は定数なので, 次の正弦波解を考えたことができる:

$$\tilde{\psi}(x, z, t) = \text{Re}[\Psi e^{i(kx + mz - \omega t)}]. \quad (8.18)$$

(8.18) を (8.16) に代入して整理すると, 重力波に対する分散関係式を得る:

$$\omega^2 = \frac{N_0^2 k^2}{k^2 + m^2 + (2H_0)^{-2}}. \quad (8.19)$$

分散関係 (8.19) を図 8.1(a) に示す. 振動数  $\omega > 0$  として, 波数  $k, m$  に対する  $\omega$  を求めたものである. (波数を  $H_0^{-1}$ , 振動数を  $N_0$  で無次元化して, 無次元波数 ( $kH_0, mH_0$ ) に対する無次元振動数 ( $\omega/N_0$ ) を描いている.) 式 (8.19) を変形すると,  $(N_0^2 - \omega^2)k^2 - \omega^2 m^2 = (\omega/2H_0)^2$  となり,  $\omega =$  一定の線は  $0 < \omega^2 < N_0^2$  の範囲で双曲線となっている.  $\omega \rightarrow 0$  で  $k \rightarrow 0$  となり (図中の点線), 波面が水平面に近づく. これに対して,  $\omega^2 > N_0^2$  の振動数では, 分散関係を満たす波数は純虚数になる. すなわち, ブラント振動数  $N_0$  より高い振動数では正弦波として伝播する解がなく, 指数関数的な空間構造をもつ波 (外部波) となる.

分散関係 (8.19) より波の位相速度 ( $c_{px}, c_{pz}$ ) と群速度 ( $c_{gx}, c_{gz}$ ) は, それぞれ次で与えられる (復号は  $k > 0, k < 0$  の順):

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{N_0}{(k^2 + m^2 + (2H_0)^{-2})^{1/2}}, \quad (8.20)$$

$$c_{pz} = \frac{\omega}{m} = \pm \frac{N_0}{(k^2 + m^2 + (2H_0)^{-2})^{1/2}} \frac{k}{m}, \quad (8.21)$$

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm \frac{N_0(m^2 + (2H_0)^{-2})}{(k^2 + m^2 + (2H_0)^{-2})^{3/2}}, \quad (8.22)$$

$$c_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \mp \frac{N_0 k m}{(k^2 + m^2 + (2H_0)^{-2})^{3/2}}. \quad (8.23)$$

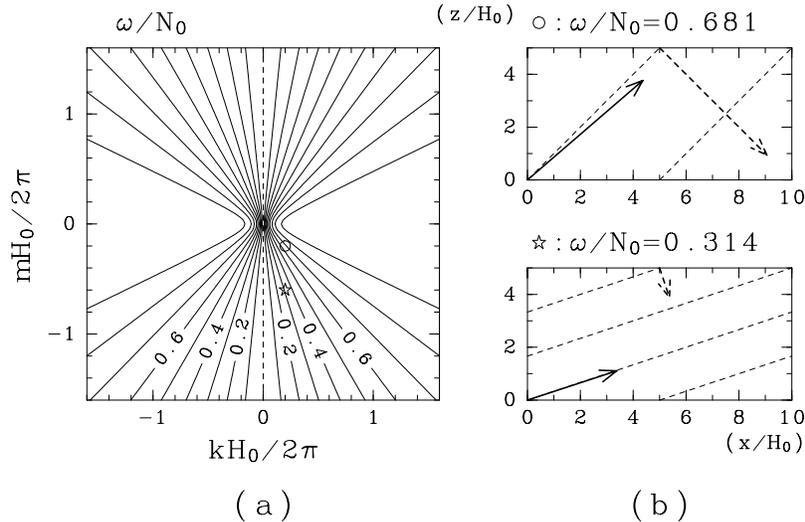


図 8.1: (a) 重力波の分散関係.  $H_0$  で無次元化した波数  $(k, m)H_0/2\pi$  の関数として,  $N_0$  で無次元化した  $\omega$  をプロットした. 点線は  $\omega = 0$ . (b) (a) の中にとで示した重力波の鉛直断面内における等位相線. 破線太矢印は位相速度を, 実線太矢印は群速度を示す.

ここで,  $c_{px}$  と  $c_{pz}$  は水平および鉛直方向の位相速度であり, 波面に垂直な位相速度  $c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} = \frac{\omega}{k^2 + m^2} (k, m)$  の各成分ではないことに注意が必要である.

図 8.1(b) には, (a) の中にとで示した重力波について, 鉛直断面内における等位相線, 位相速度  $c$ , および群速度  $c_g$  を示す. ここで, 群速度は  $(\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial m)$  なので, 図 8.1(a) の  $k$ - $m$  平面での  $\omega(k, m)$  の勾配  $\text{grad} \omega(k, m)$  が実空間での群速度に比例する. 原点  $(0, 0)$  に近いほどこの勾配が大きく, 小さな波数の波のほうが群速度が大きい. また, 位相速度の向きは波数ベクトル  $\mathbf{k} = (k, m)$  の向きなので, 図 8.1(a) で原点とやとを結べば, それが実空間で波の位相が伝わる向きとなる.

波の鉛直波長がスケールハイトよりも十分小さい場合, すなわち,  $|m| \gg 1/(2H_0)$  のとき, 分散関係式 (8.19) で  $(2H_0)^{-2}$  の項が無視できて, 次のように書ける:

$$\omega^2 = \frac{N_0^2 k^2}{k^2 + m^2} = N_0^2 \cos^2 \phi. \quad (8.24)$$

ただし,  $\phi$  は波数ベクトルの方位角である. この場合,  $\omega$  は  $\phi$  だけに依存していて, 波の空間規模に依らない. これは, 図 8.1(a) の原点から離れたところでは,  $\omega =$  一定の双曲線が原点を通る直線で近似できることに対応している. 群速度でも同様の近似をすると,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_g = 0$  となる. すなわち, 図 8.1(b) に示したように, 群速度は波数ベクトルと直交し, 波のエネルギーは波面と平行の方向に伝播する. 原点付近ではこの近似が妥当でないので, 群速度の向きは波面からずれる ( の場合).

### 8.1.5 波の構造と位相の伝播

正弦波解 (8.18) を (8.17) および (8.6), (8.8) に代入して,  $p', \rho', u', w'$  の位相関係を求めれば, 波の構造や伝播の様相がわかる. ふたたび, 波の鉛直波長がスケールハイトよりも十分小さい ( $|m| \gg 1/(2H_0)$ ) と仮定

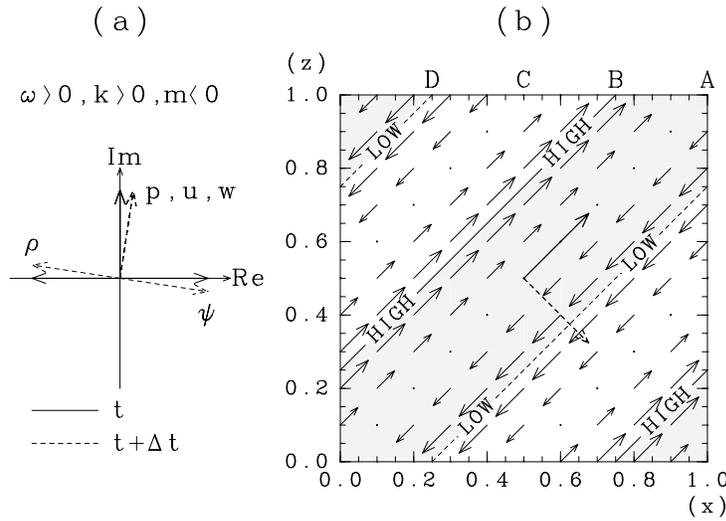


図 8.2: (a) 重力波の位相関係 ( $\omega > 0, k > 0, m < 0$  の場合). (b) (a) で  $t$  に相当する時の重力波の空間構造. 破線太矢印は位相速度を, 実線太矢印は群速度を示す. 実線矢印は速度, 陰影部は  $\rho' < 0$  の領域, HIGH と LOW は, それぞれ  $p'$  の最大と最小.

すると, 次の関係を得る:

$$\begin{cases} p' &= -i \frac{m\omega}{k} \bar{\rho} \tilde{\psi}, \\ \rho' &= -\frac{k}{\omega} \frac{\bar{\rho}}{H_0} \tilde{\psi}, \\ u' &= -im \tilde{\psi}, \\ w' &= ik \tilde{\psi}. \end{cases} \quad (8.25)$$

ここで,  $u \cdot k = 0$ , つまり,  $u \cdot c = 0$  であり, 運動方向と波の伝播方向が直交するので, このような重力波は横波である.

図 8.1(b) と同様に  $\omega > 0, k > 0, m < 0$  の場合について,  $p', \rho', u', w'$  の位相関係を図 8.2(a) に示す. また, このときの波の空間構造を図 8.2(b) に示す.  $k > 0, m < 0$  なので,  $kx + mz = \text{一定}$  の等位相線は右上がりの直線となっている.  $p', u', w'$  が同じ位相で,  $\rho'$  よりも  $\pi/2$  だけ先行している.  $\overline{p'u'} > 0, \overline{p'w'} > 0$  なので, 波による仕事の方向は  $x, z$  の正方向 (群速度の方向) である.

波の位相が伝播する様子は, 図 8.2(b) の A-D の順に, 次のように記述できる:

- A この位相では, 流体粒子の運動はない. 密度が基本 (水平平均) 場より低いので浮力を受けるが, 波面 (等位相線) に垂直な成分は気圧傾度力と釣り合うので, 波面に平行に右上に加速される.
- B 軽いものが持ち上げられた結果, 密度の摂動がなくなり, 浮力がゼロとなる. このとき, 流体粒子は速度をもつので, さらに右上に変位する.
- C やがて, 変位が止まり, 速度がゼロとなる. この変位のために密度は基本場より高く, 負の浮力を受ける. 気圧傾度力との合力で波面に平行に左下に加速される.
- D 重いものが押し下げられた結果, 密度の摂動がなくなり, 浮力がゼロとなる. 流体粒子は速度をもつので, さらに左下に変位する. そして, やがてこの変位が止まり, A の状態に戻って, この過程を繰り返す.

## 8.2 慣性系での重力波 (圧縮性流体の場合)

重力波と音波が共存する世界. ラム波.

### 8.2.1 支配方程式系

### 8.2.2 分散関係式

## 8.3 回転系での重力波 (非圧縮性流体の場合)

いわゆる慣性重力波.  $\omega \rightarrow f$  極限で慣性振動.

### 8.3.1 支配方程式系

### 8.3.2 分散関係式

## 8.4 実験と観測

### 8.4.1 室内実験：酒井ビデオ

WWW で 地球流体電脳倶楽部 (<http://www.gfd-dennou.org/>) に入り, 地球流体電脳倶楽部コレクションの地球流体基礎実験集第 2 版に進み, 内部重力波の項 (深海魚の幸福) を見ると, 実験装置, 写真, ビデオ (MOVIES) がある. 実験の概要と見所は次の通りである:

実験装置 (幅, 高さ, 奥行き) = (58cm, 59cm, 10cm)

塩水成層  $N = 1.6\text{s}^{-1}$ . プラント周期  $T_B = 2\pi/N = 3.9\text{s}$ .

実験 1(VIG1-7) 波源: 孤立円柱. 直径 4 cm の円柱を水平に吊す.

振動周期:  $T = 10\text{s}, 9\text{s}, 8\text{s}, 7\text{s}, 6\text{s}, 5\text{s}, 3.8\text{s}$ .

分散関係式 (8.24) を満たす波面の振動数依存性. 高調波の発生 ( $T > 2T_B$ ). 非伝播性の外部波 ( $T = 3.8\text{s}$ ).

実験 2(VWP1) 波源: 波板. 直径 2 cm の円柱 4 本を 4 cm 間隔で水平に繋げる.

振動周期:  $T = 5.5\text{s}$ .

横壁での波の反射. 入射波と反射波の干渉.

実験 3(VLW1) 波源: 孤立円柱. 直径 4 cm の円柱を 1 cm だけ実験流体に浸し, 一定速度  $V = 1.6\text{cm/s}$  で水平に引っ張る.

風下波 (Lee wave) の発生. 山岳波のアナロジー.

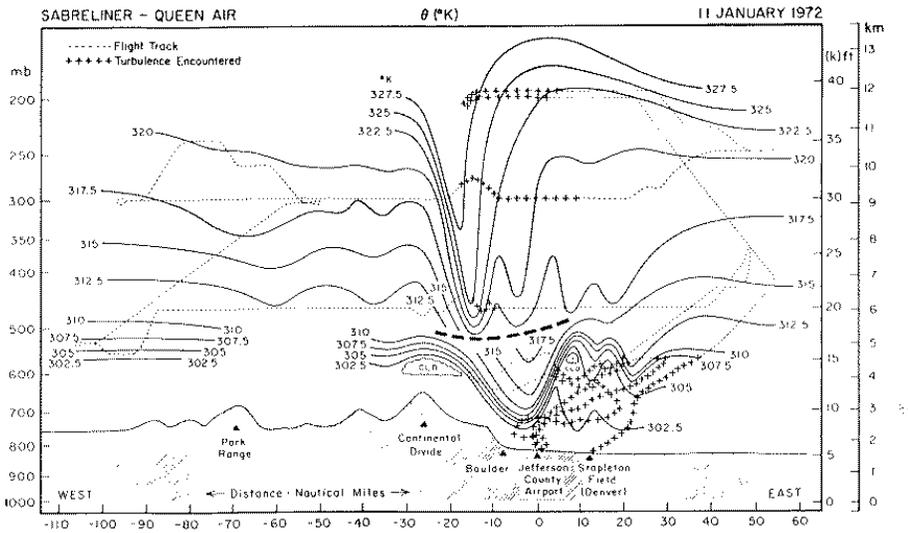


図 8.3: ロッキー山脈付近での山岳波の飛行機観測例 (温位分布). Gill(1982) の教科書より Lilly(1978) を孫引き.

#### 8.4.2 観測

大気中で観測される重力波には、対流圏内では山岳波や積雲活動に伴うもの等々があり、中層大気中では対流圏から伝播してきたものなどがある。

- 山岳波 (風下波)
  - Lilly(1978) : ロッキー山脈での山岳波 (図 8.3). ← Gill(1982)p.289.
  - Queney(1948) : ベル型山脈を越す気流の理論計算 (図 8.4). ← Gill(1982)p.278.
- 積雲活動に伴う重力波 (加熱に対する応答, 障害物 (~ 山岳) 効果)
  - Purdom and Menzel(1994) : GOES-8 リアルタイム雲画像. ← Joan Alexander より.
- 中層大気
  - Sato(1992) : 京大 MU レーダー (VHF レーダー) による成層圏の観測 (図 8.5). ← 廣田 (1992)p.77.
  - Balsley et al.(1983) : 中間圏での VHF レーダー観測. ← Andrews et al.(1987)p.191
  - Marshall(1969) : 30~70 km 領域での発煙弾観測. ← 松野・島崎 (1981)p.218.

#### 参考文献

Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, 489pp.

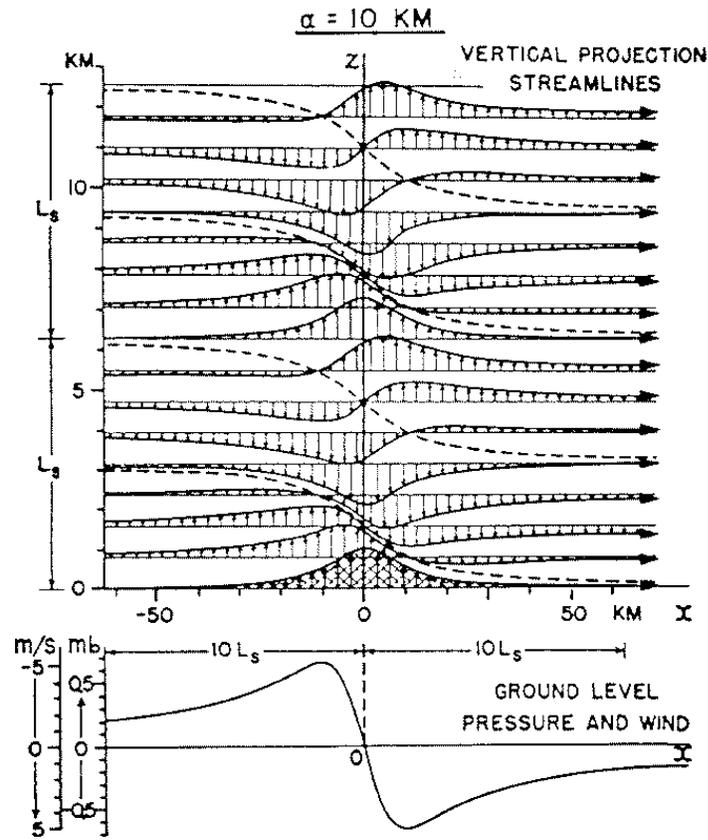


図 8.4: ベル型山脈を越す気流の理論計算例 (流れの鉛直成分). Gill(1982) の教科書より Queney(1948) を孫引き.

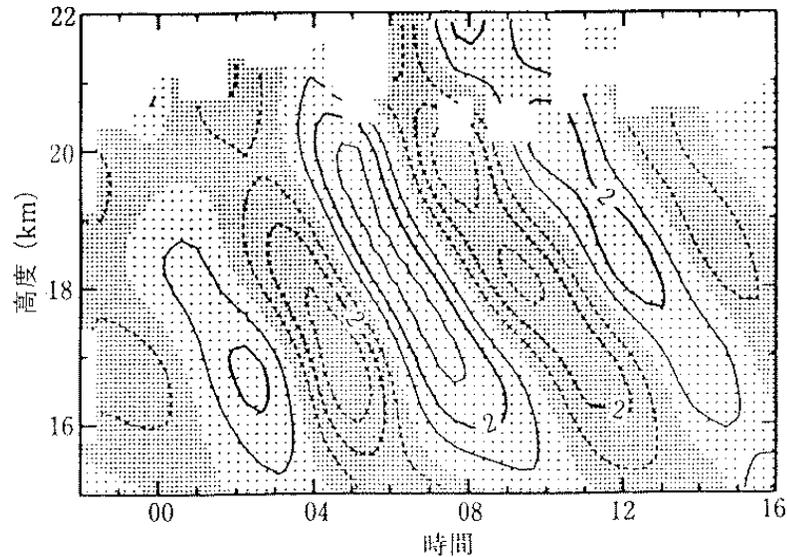


図 5-2 京都大学 MU レーダーによって観測された大気重力波の一例 (1987 年 10 月 15~16 日, Sato, 1992 : *J. Atmosph. Sci.*, 49 による)  
南北風成分 (単位 m/s) の位相の下降に注意.

図 8.5: 京大 MU レーダー (VHF レーダー) による下部成層圏での重力波の観測例 (南北風成分). 廣田 (1992) の教科書より Sato(1992) を孫引き.

- Gill, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, 662pp.
- 廣田 勇, 1992: 「グローバル気象学」気象の教室 1, 東京大学出版会, 148pp.
- 松野 太郎・島崎 達夫, 1981: 「成層圏と中間圏の大気」大気科学講座 3, 東京大学出版会, 279pp.
- 酒井 敏, 1995: 酒井ビデオ. <http://www.gfd-dennou.org/> (現在所属: 京都大学総合人間学部)
- 竹広 真一, 1989: 竹広ノート. (現在所属: 九州大学地球惑星科学科)



## 第9章 ロスビー波

地球流体特有の状況として、前章で見た重力場のなかの運動であることと共に、回転系での運動であることがあげられる。地球をはじめ諸惑星や太陽などの自転の効果である。現象の時間スケールが自転周期に比べて十分に短ければ、自転の影響は無視できて、慣性系で議論できる。一方、現象の時間スケールが自転周期と同じくらいか、それより長ければ、自転の効果を陽に考慮しなければならない。また、現象の空間規模が大きければ、回転球面上の運動であることが重要になる。すなわち、自転の効果の緯度依存性が基本的な役割を果たす状況である。

この章では、回転球面に特有の波動であるロスビー波 (Rossby waves) を取り上げる。最も基本的な状況として、球面上の2次元非発散完全流体を考え、そこでの波動を解析する。復元力をもたらすものは、絶対渦度の保存則であり、基本場の渦度勾配である。まず、基本的な力学を理解するために、渦度ジャンプ面に補足された波動を解析する。つぎに、基本場の渦度勾配が全球に広がった球面領域でのロスビー波をみる。さらに、中緯度域に限った $\beta$ 平面で、違った幾何条件でのロスビー波をみる。前者が惑星全体を認識した波動であるのに対して、後者は必ずしも惑星全体を認識していない“局所的な”ロスビー波である。

### 9.1 渦度ジャンプ面に捕捉された波動

重力波の身近な具体例としては水面の波があったが、それは密度の不連続面に捕捉された波動であった。ここでは、まず平面上の2次元非発散完全流体の運動で、水面重力波と類似的に渦度ジャンプがある基本場を考えて、それに加えられた擾乱が波動として伝播する様子を示そう。このような流れ場の解析にはコンター力学の手法が有効であるが、ここでは素朴な線型解析に留める。

#### 9.1.1 2次元非圧縮流の渦度方程式

第3.3節でみたように、非圧縮完全流体 ( $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ ,  $\nu = 0$ ) の渦度方程式は、式(3.19)で与えられた：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \right) \boldsymbol{\omega} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\mathbf{u}. \quad (9.1)$$

ここで、流れが水平2次元 ( $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ ) であるとすると、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \zeta)$  となり右辺は0となるので、渦度方程式の鉛直成分は次のように書ける：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \right) \zeta = \frac{D\zeta}{Dt} = 0. \quad (9.2)$$

すなわち、水平2次元の非圧縮完全流体では、渦度の鉛直成分 $\zeta$ がラグランジュ的保存量になる。

非圧縮なので、流れ関数  $\psi(x, y, t)$  を

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (9.3)$$

として導入すると、渦度方程式の鉛直成分 (9.2) は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} = 0, \quad (9.4)$$

となる。ここで、 $\zeta = \Delta_2\psi$  であり、 $\Delta_2$  は 2 次元ラプラシアン、 $\partial(\psi, \zeta)/\partial(x, y)$  は 2 次元ヤコビアン (Jacobian) である：

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (9.5)$$

### 9.1.2 渦度ジャンプ面に捕捉された線型波動

いま、無限に広がる領域で  $x$  方向に流れる帯状流 ( $\bar{u}(y)$ ,  $\bar{v}=0$ ) を基本場とする。帯状流の渦度  $\bar{\zeta}$  が  $y > 0$  で  $\zeta_1$ ,  $y < 0$  で 0 と、 $y = 0$  でジャンプしているとして、

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} -\zeta_1 y, & (0 \leq y < +\infty), \quad : \text{領域 1} \\ 0, & (-\infty < y < 0), \quad : \text{領域 2} \end{cases} \quad (9.6)$$

とする (図 9.1a,b)。この基本場に加えられた微小な擾乱の流れ関数を  $\psi'(x, y, t)$  として、擾乱に対する線型化した渦度方程式は、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_2 \psi' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{d\bar{\zeta}}{dy} = 0, \quad (9.7)$$

となる。ここで、

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re} \left[ \Psi(y) e^{ik(x-ct)} \right], \quad (9.8)$$

という型の正弦波解を仮定すると、 $\Psi(y)$  に対する微分方程式が次のよう得られる：

$$(\bar{u} - c) \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi \right) + \frac{d\bar{\zeta}}{dy} \Psi = 0. \quad (9.9)$$

基本場の渦度ジャンプがある  $y = 0$  以外の領域では、 $d\bar{\zeta}/dy = 0$  であるから、 $\bar{u} - c \neq 0$  として解くべき微分方程式 (9.9) は以下のように簡単になる：

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi = 0. \quad (9.10)$$

境界条件は、 $y = \pm\infty$  で擾乱の振幅が 0 であるとする：

$$\Psi(+\infty) = \Psi(-\infty) = 0. \quad (9.11)$$

また、 $y = 0$  での解の接続の条件は、 $\Psi(y)$  の連続性により、

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ のとき, } \quad \Psi(+\epsilon) = \Psi(-\epsilon), \quad (9.12)$$

となる。また、 $y = 0$  で (9.9) の  $y$  微分を差分で置き換えることにより、 $d\Psi(y)/dy$  の接続条件は、

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ のとき, } \quad (\bar{u}(0) - c) \left[ \frac{d\Psi}{dy} \right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} - \Psi(0) \left[ \frac{d\bar{u}}{dy} \right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} = 0, \quad (9.13)$$

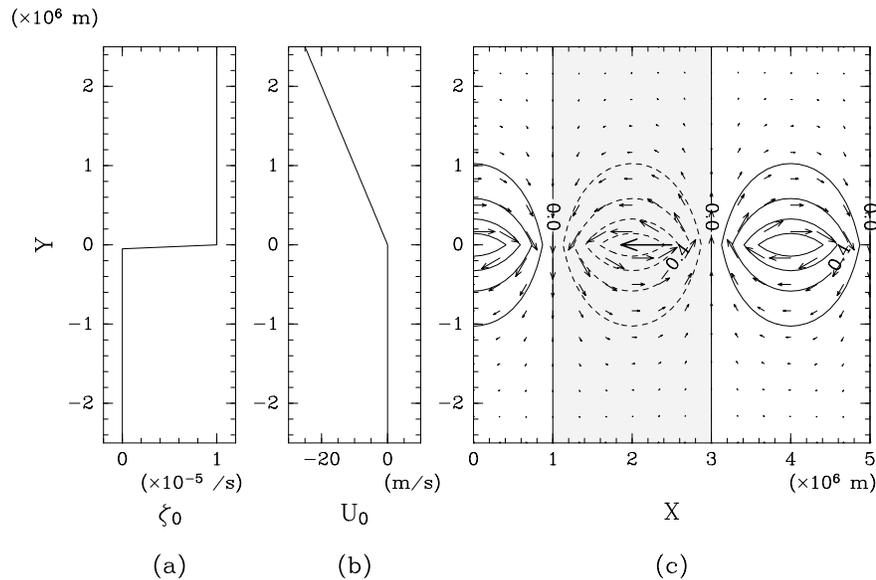


図 9.1: 渦度ジャンプ面に捕捉された波動. (a) 基本帯状流の渦度分布. (b) 基本帯状流の速度分布. (c) 渦度ジャンプ面に捕捉された波の水平構造. 陰影部は  $\psi' < 0$  の領域. 水平速度を矢印で示す. 太矢印は, 位相速度の向き.

となる.

微分方程式 (9.10) より, 各領域での解  $\Psi(y)$  は,

$$\Psi(y) = \begin{cases} A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky}, & (0 \leq y < +\infty), \quad \text{: 領域 1} \\ A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}, & (-\infty < y < 0), \quad \text{: 領域 2} \end{cases} \quad (9.14)$$

とおける. ここで,  $k > 0$  とする. 境界条件 (9.11) より  $A_1 = B_2 = 0$  であり, 接続条件 (9.12) より  $B_1 = A_2$  である. すなわち, 正弦波解 (9.8) は,

$$\psi'(x, y, t) = e^{-k|y|} \operatorname{Re} \left[ A_2 e^{ik(x-ct)} \right], \quad (9.15)$$

となる. 図 9.1 にこの波の水平構造を示す. この擾乱は  $y = 0$  から遠ざかるにつれて指数関数的に減衰し, その位相は  $y$  方向には変化しない. これを接続条件 (9.13) に代入して,

$$c = -\frac{\zeta_1}{2k}, \quad (9.16)$$

を得る.  $c$  が実数なので, 擾乱は中立である.  $\zeta_1 > 0$  として  $y = 0$  で基本場の渦度が増加するとすると,  $c < 0$  となり, 擾乱は  $x$  の負の方向に伝播する. 逆に, 基本場の渦度が減少すると擾乱は  $x$  の正の方向に伝播する. 位相速度が波数に反比例している (長波長の波ほど速い) ので, これは分散性の波動である. ポテンシャル渦度方程式が時間に関して 1 階の微分方程式なので, 波動解は一つだけである. 水面の波のように  $x$  の両方向に対称的に波が伝わっていくわけではない.

擾乱の流れ関数は (9.15) で与えられるが, 擾乱の渦度場  $\Delta_2 \psi'$  は逆位相,  $y$  方向の速度  $v' = \partial \psi' / \partial x$  は  $\pi/2$  だけ  $x$  の負の方向に位相がずれる. 結局, この渦度ジャンプを横切る流れによって基本場の渦度が移流されて, 擾乱の渦度場が  $x$  の負の方向に伝播することになる.

## 9.2 回転球面上の渦度方程式

回転球面上で静止した流体は、系の自転による惑星渦度だけを持つがその鉛直成分は緯度の関数になっている。すなわち、前節で見た渦度のジャンプ (勾配) が至る所にあるわけで、球面全部を伝播領域とする波動が可能である。この節では、準備として、まず回転球面上の渦度方程式を導出しておく。

### 9.2.1 球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式

非圧縮性流体の連続方程式  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  は、半径  $a$  の球面上の 2 次元幾何を仮定すると、次のようになる：

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = 0. \quad (9.17)$$

ここで、流線関数  $\psi(\lambda, \phi, t)$  を導入する：

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (9.18)$$

流線関数を用いると、渦度の鉛直 ( $e_r$ ) 成分は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \zeta &= \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ &= \frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) \right\}, \\ &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right), \\ &\equiv \Delta_2 \psi. \end{aligned} \quad (9.19)$$

結局、渦度方程式 (9.2) は、球面上で具体的に次のような表式となる：

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \zeta = 0. \quad (9.20)$$

ここで、これを流線関数  $\psi(\lambda, \phi, t)$  を使って書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi - \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial \phi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial (\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial (\lambda, \phi)} &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

ただし、第 2 項目の  $\partial(\psi, \Delta_2 \psi) / \partial(\lambda, \phi)$  は 2 次元ヤコビアンである。

ここで、後ほどの解析を意識して次の座標変換を行なっておく。緯度  $\phi$  のかわりにサイン緯度  $\mu \equiv \sin \phi$  を用いると、 $d\mu/d\phi = \cos \phi = \sqrt{1 - \mu^2}$  より、速度 ( $u, v$ ) および 2 次元ラプラシアン (Laplacian)  $\Delta_2$  は次になる：

$$u = -\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad (9.22)$$

$$v = \frac{1}{a \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (9.23)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \right]. \quad (9.24)$$

また、流線関数を使った渦度方程式 (9.21) は次のように書ける：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(\lambda, \mu)} = 0. \quad (9.25)$$

### 9.2.2 回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式

第 2.2.2 節で示した伝統的な近似の下で、2 次元非圧縮完全流体の運動方程式は次のようになる：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) u - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{\rho_0 a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (9.26)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) v + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial p}{\partial \phi}. \quad (9.27)$$

これより渦度方程式 (鉛直成分) を求めると、惑星回転 (コリオリ項) による寄与  $e_r \cdot \text{rot}(2\Omega \times \mathbf{u}) = \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$  が加わり、流線関数を用いた表記で次となる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.28)$$

ここで、絶対渦度の鉛直成分  $q \equiv \zeta + 2\Omega \mu$  を用いると、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(\lambda, \mu)} = \frac{Dq}{Dt} = 0, \quad (9.29)$$

となり、絶対渦度の鉛直成分が、水平 2 次元の流れとともに保存されるラグランジュ保存量となる。これが、回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式である。ここで、 $2\Omega \mu$  は惑星の自転による渦度 (惑星渦度) で、慣用的に  $f$  で表記し、コリオリ・パラメータと呼ぶ。また、絶対渦度 (の鉛直成分)  $q$  に対して  $\zeta$  を相対渦度 (の鉛直成分) と呼ぶ。

## 9.3 ロスビー・ハウルビッツ波

回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式を支配方程式として、そこに含まれる波動解を解析する。このような回転球面に特有の波動をその発見者にちなんでロスビー波と呼ぶ。球面での解析はハウルビッツ (Haurwitz) が最初に行なったので、これからは球面上での解をとくにロスビー・ハウルビッツ波と呼ぶことにする。

### 9.3.1 支配方程式と基本場と線型擾乱

支配方程式は、回転球面上の 2 次元非圧縮流の渦度方程式で、流線関数  $\psi(\lambda, \phi, t)$  を従属変数とする非線型偏微分方程式である：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.30)$$

ここで、基本場として静止解  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  を考える。すなわち、 $\bar{\psi} = \text{一定}$ 、である。  $\psi(\lambda, \mu, t) = \bar{\psi} + \psi'(\lambda, \mu, t)$  として、微小擾乱  $\psi'(\lambda, \mu, t)$  に対する線型化した支配方程式を求めると、次になる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi' + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.31)$$

### 9.3.2 波動解と分散関係式

東西および時間方向に周期性を仮定して、つぎの正弦波解を考える：

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = \text{Re}[\Psi(\mu)e^{i(s\lambda - \omega t)}]. \quad (9.32)$$

ここで、 $s$  は整数で、帯状(東西)波数という。すなわち、経度方向に惑星を一周したときの波数である。これを (9.31) に代入して整理すると次になる：

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right\} \Psi(\mu) - \left( \frac{s^2}{1 - \mu^2} - \frac{2\Omega s}{\omega} \right) \Psi(\mu) = 0. \quad (9.33)$$

これは、両極  $\mu = \pm 1$  で非正則な境界条件をとるストルム-リュウビル (Sturm-Liouville) 型の常微分方程式である (今村, 1976; p.215)。これはルジャンドル (Legendre) の陪微分方程式と呼ばれるもので、一般解は固有値  $-2\Omega s/\omega = n(n+1)$  ( $n$  は自然数) に対応する固有関数系  $\{P_n^s(\mu)\}$  ( $n \geq |s|$ ) で与えられる。ここで、 $P_n^s(\mu)$  はルジャンドル陪関数である。結局、渦度方程式 (9.31) の球面領域での解として、次の球面調和関数で書ける波動解が存在する：

$$\psi'(\lambda, \mu, t) = \Psi_0 P_n^s(\mu) e^{i(s\lambda - \omega t)}. \quad (9.34)$$

この波動解をロスビー・ハウルピッツ波と呼ぶ。分散関係式は、上の固有値より次で与えられる：

$$\omega = -\frac{2\Omega s}{n(n+1)}. \quad (9.35)$$

東西方向の位相速度は、 $k = 2\pi/L = 2\pi/(2\pi a/s) = s/a$  より、

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{a\omega}{s} = -\frac{2\Omega a}{n(n+1)}, \quad (9.36)$$

となり、波数によらず  $c < 0$  で、西進する。全波数  $n$  が小さいほど、西進速度が大きい。

### 9.3.3 波の構造と位相の伝播

ロスビー・ハウルピッツ波の流線関数は球面調和関数  $Y_n^s(\lambda, \mu) = P_n^s(\mu)e^{is\lambda}$  で書けて、次の性質がある：

$$\Delta_2 Y_n^s = -n(n+1)Y_n^s. \quad (9.37)$$

すなわち、この波の渦度場  $\Delta_2 \psi$  は流線関数と同じ空間構造で、逆符号をとる。 $n = 1 \sim 3$  の球面調和関数を図 9.2 に示す。 $n - s$  は南北の節の数であり、これが偶数のとき流線関数は赤道対称であり、奇数のとき赤道反対称である。

速度場は (9.22), (9.23) で与えられるので、図 9.3 左上の矢印で示すようになる。このとき、渦度場は図 9.3 右上であるが、その時間変化は左下に示したようになるので、渦度場はやがて図 9.3 右下のように変化する。ここで鍵となるのは、流体粒子がラグランジュ的に絶対渦度 ( $\zeta + 2\Omega\mu$ ) を保存し、かつ、惑星渦度 ( $2\Omega\mu$ ) がサイン緯度の単調増大関数であるということである。すなわち、正の渦度領域の西側では北風成分 ( $v < 0$ ) であり、流体粒子運動に乗って  $\mu$  が小さくなる (惑星渦度が小さくなる) ので、絶対渦度を保存するために相対渦度  $\zeta$  が増加しなければならない。一方、東側では、ちょうど逆のセンスであり、相対渦度は減少する。結局、ある渦度場に対して、その時間変化項は西に  $\pi/2$  位相がずれているので、この渦度パターンが西進することになる。

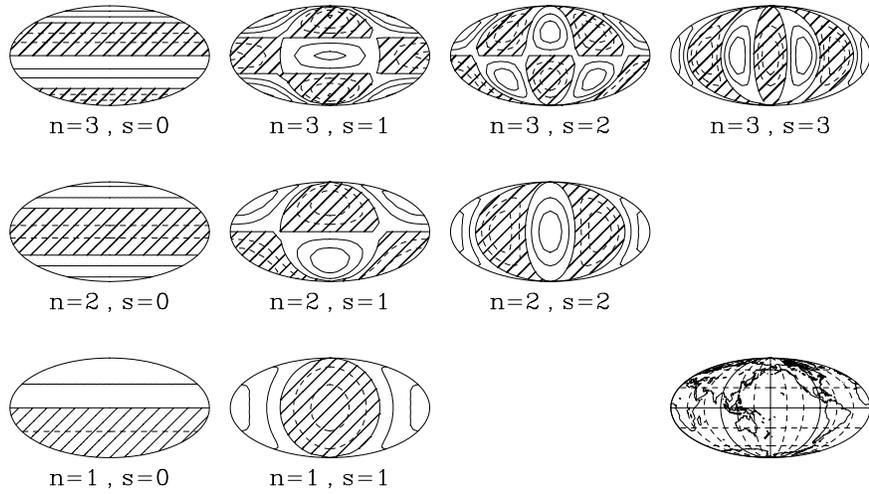


図 9.2: ロスビー・ハウルピッツ波 (球面調和関数  $Y_n^s$ ) の空間構造.  $n=1 \sim 3, s=0 \sim n$ . 負領域に陰影をつける. 地図投影はモルワイデ (Mollweide) 図法.

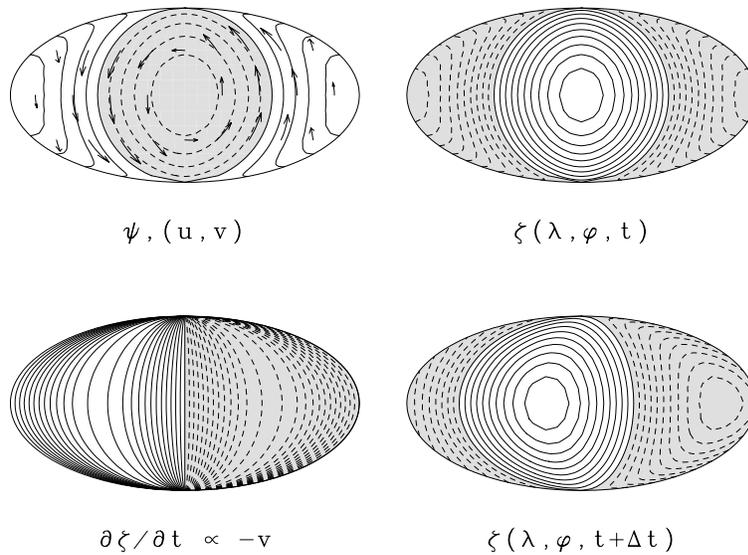


図 9.3: ロスビー・ハウルピッツ波の空間構造と伝播のしくみ.  $n=1, s=1$  の場合. (左上) 流線関数 (負領域に陰影) と速度場, (右上) 相対渦度場, (左下) 相対渦度場の時間変化項, (右下) 相対渦度場の時間発展. 地図投影はモルワイデ図法.

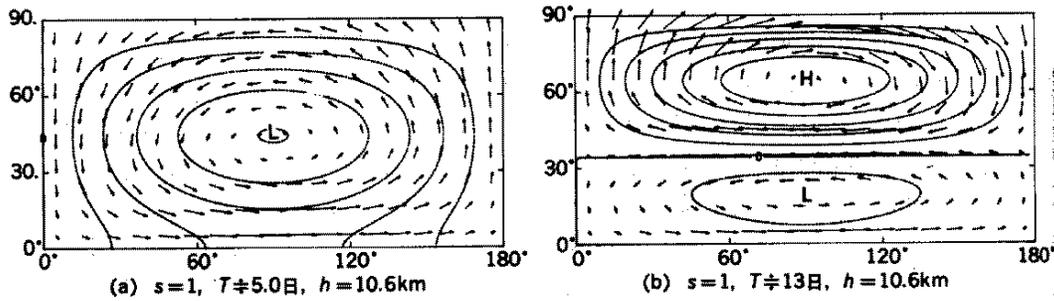


図 9.4: ラプラスの潮汐方程式を解いて得られた地球的規模の大気波動の水平構造 (松野・島崎, 1981; 第 5.12 図より). 北半球で経度 180 度の範囲を示す. (a) 東西波数 1 で赤道対称の基底モード (通称「5 日波」), (b) 東西波数 1 で赤道対称の第二モード (通称「16 日波」).

### 9.3.4 観測

発散のある 3 次元大気でも基本的に同様のメカニズムで伝播する波動が存在する. ラプラス (Laplace) の潮汐方程式の固有解で, 第 2 種自由振動と呼ばれるものである (図 9.4; 松野・島崎 (1981) 第 5.2.6 節より). 衛星観測全球データの解析ではいくつかの  $(n, s)$  に対する波動が確認されており, 図 9.5 は Hirota and Hirooka (1984) による 5 日波の典型例である.

## 9.4 $\beta$ 平面上のロスビー波

第 2.5.2 節で導入した, 中緯度で回転球面に接する平面, いわゆる中緯度  $\beta$  平面を用いて, そこでの波動解であるロスビー波を解析する. 前節のロスビー・ハウルビッツ波解は惑星全体を認識したものである. すなわち, 経度方向には周期境界とし, 両極での境界条件を課して得られた波動解であった. これに対して, この節では, 惑星全体を認識していない状態の波動を考える. 局所的な波源から出た波が惑星全体に広がりきらない状況を思い浮かべればよい.

### 9.4.1 中緯度 $\beta$ 平面

ある基準となる経度 ( $\lambda_0$ ), 緯度 ( $\phi_0$ ) を考え, そこでこの球面に接する直交直線座標系  $(x, y)$  を導入する:

$$\begin{cases} x = (a \cos \phi_0) \lambda, \\ y = a(\phi - \phi_0). \end{cases} \quad (9.38)$$

ただし,  $|x|, |y| \ll a$  とする. このとき,  $\phi = \frac{y}{a} + \phi_0$ ,  $|\frac{y}{a}| \ll \phi_0$  より,  $\mu = \sin \phi = \sin(\phi_0 + \frac{y}{a}) \simeq \sin \phi_0 + \frac{y}{a} \cos \phi_0$  と近似できるので, コリオリ・パラメータは次のように変換される:

$$f = 2\Omega \sin \phi \simeq 2\Omega \sin \phi_0 + 2\Omega \frac{y}{a} \cos \phi_0 \equiv f_0 + \beta y. \quad (9.39)$$

ここで,  $f$  の  $y$  微分を慣用に従って  $\beta$  で表している. このような近似の下で導入した座標系が中緯度  $\beta$  平面と呼ばれる所以である. また,  $dx/d\lambda = a \cos \phi_0$ ,  $dy/d\mu = a/\cos \phi_0$  なので, 球面上での 2 次元ラプラシ

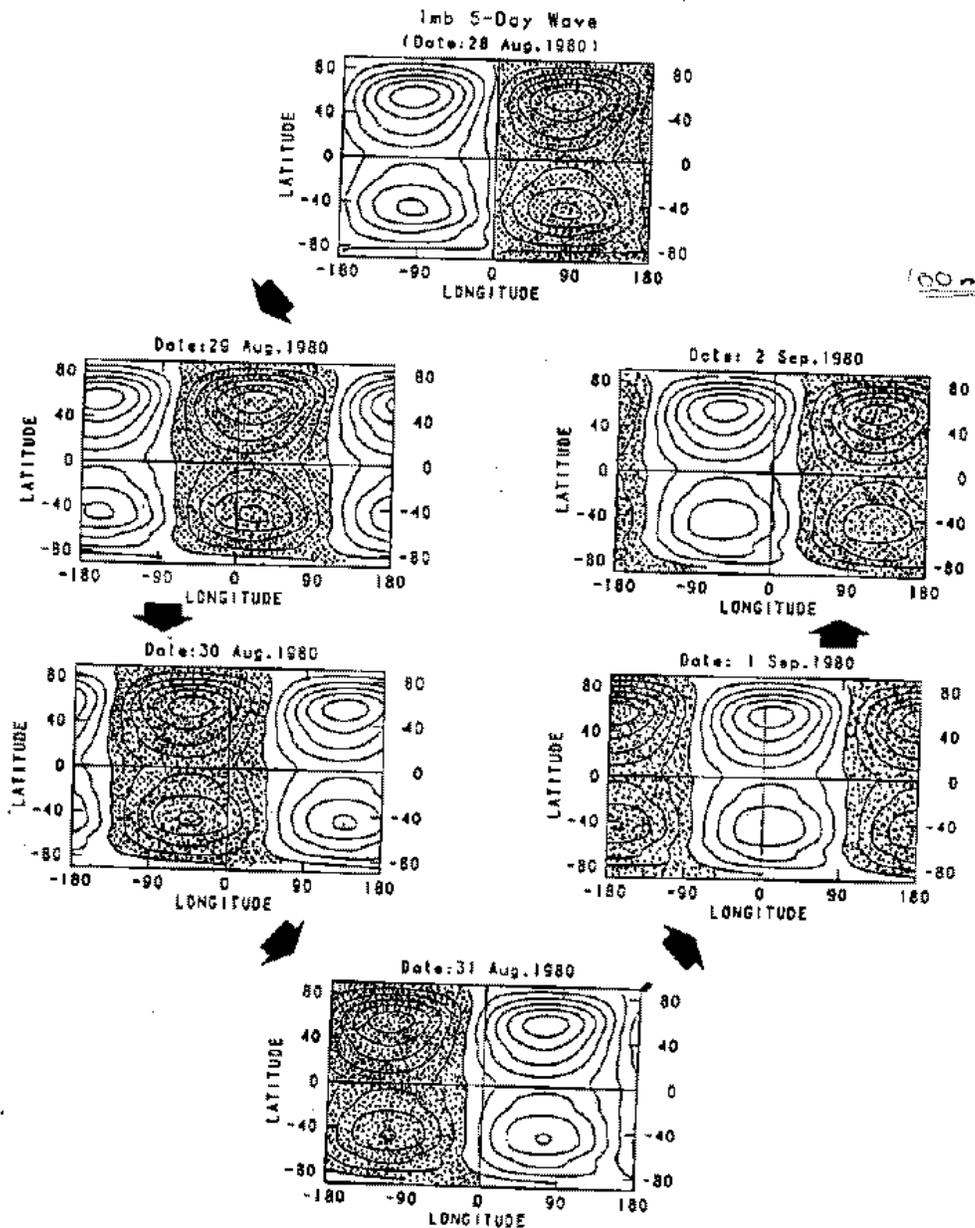


図 9.5: TIROS-N 衛星搭載 SSU で観測された上部成層圏での 5 日波. Andrews et al.(1987) の教科書より Hirota and Hirooka(1984) を孫引き (p.171). 1980 年 8 月 28 日から 9 月 2 日までの 6 日間. ジオポテンシャルハイトの東西波数 1 成分のうち, 周期 5-6 日の西進波のみをフィルターで取り出した結果. コンター間隔は 20m.

アンとヤコビアンは、それぞれ次のように変換される：

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \Delta, \quad (9.40)$$

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(\lambda, \mu)} = a^2 \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)}. \quad (9.41)$$

これらを回転球面上の渦度方程式 (9.28) に代入することにより、次の  $\beta$  平面近似渦度方程式を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (9.42)$$

#### 9.4.2 支配方程式と基本場と線型擾乱

支配方程式は、 $\beta$  平面近似渦度方程式 (9.42) で、流線関数  $\psi(x, y, t)$  を従属変数とする非線型偏微分方程式である。基本場として静止解  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ ,  $\bar{\psi} = \text{一定}$ , を考える。  $\psi(x, y, t) = \bar{\psi} + \psi'(x, y, t)$  として、微小擾乱  $\psi'(x, y, t)$  に対する線型化した支配方程式を求めると、次になる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (9.43)$$

#### 9.4.3 分散関係式

時間・空間方向に周期性を仮定して、つぎの正弦波解を考える：

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re}[\Psi_0 e^{i(kx + ly - \omega t)}]. \quad (9.44)$$

これを (9.43) に代入して整理すると、 $\beta$  平面上の 2 次元非発散 Rossby 波に対する分散関係式を得る：

$$\omega = -\frac{k\beta}{k^2 + l^2}. \quad (9.45)$$

$\beta > 0$  なので、 $\omega$  と  $k$  はつねに逆符号をとる。分散関係 (9.45) を図 9.6 に示す。波数を惑星半径の逆数  $a^{-1}$ , 振動数を惑星自転角速度  $\Omega$  で無次元化して、(a) では無次元波数 ( $ka, la$ ) に対する無次元振動数 ( $\omega/\Omega$ ) を描いている ( $\omega > 0$  とした)。式 (9.45) を変形すると、 $\{k + (\beta/2\omega)\}^2 + l^2 = (\beta/2\omega)^2$  となり、 $\omega = \text{一定}$  の線は、中心が  $(-\beta/2\omega, 0)$ , 半径が  $\beta/2\omega$  の円となっている。 $\omega$  が大きくなるにつれて、この円は小さくなり、原点に近づく。一方、(b) は無次元化した南北波数  $la$  を  $ka$  と  $\omega/\Omega$  に対して求めたものである。陰影部では  $\omega > -\beta/k$  となり、 $l$  が純虚数となる。正弦波として南北に伝播する解がなく、波動解は指数関数的な空間構造をもつ外部波になる。

分散関係 (9.45) より波の位相速度 ( $c_{px}, c_{py}$ ) と群速度 ( $c_{gx}, c_{gy}$ ) は、それぞれ次で与えられる：

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad (9.46)$$

$$c_{py} = \frac{\omega}{l} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} \frac{k}{l}, \quad (9.47)$$

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (9.48)$$

$$c_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}. \quad (9.49)$$

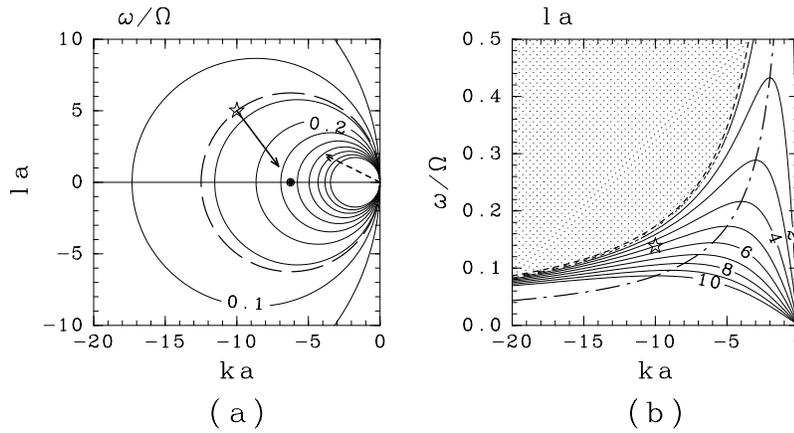


図 9.6:  $\beta$  平面上的 2 次元非発散ロスビー波の分散関係. (a)  $\Omega$  で無次元化した  $\omega$  を, 惑星半径  $a$  で無次元化した波数  $(k, l)a$  の関数としてプロットした. 破線太矢印は実空間における位相速度を, 実線太矢印は同じく群速度を示す. (b) 南北波数  $la$  を  $ka$  と  $\omega/\Omega$  の関数としてプロットした. 陰影部は  $l^2 < 0$  で示したロスビー波の構造を次の図に示す.

$c_{px} < 0$  より, 位相は常に西進することがわかる. 一方, 群速度は  $(k^2 - l^2)$  の符号によって異なり, 正のとき  $c_{gx} > 0$ , 負のとき  $c_{gx} < 0$  である. すなわち, 波面が南北方向に近いときは東向きエネルギー伝播であり, 東西方向に近いときは西向きエネルギー伝播である.

群速度は  $(\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l)$  なので, 図 9.6(a) の  $k-l$  平面での  $\omega(k, l)$  の勾配  $\text{grad } \omega(k, l)$  が実空間での群速度に比例する. 原点  $(0, 0)$  に近いほどこの勾配が大きく, 小さな波数の波のほうが群速度が大きい. また, その向き (実線太矢印) は, つねに  $\omega = \text{一定}$  の円 (破線) の円周上の点からその円の中心 (黒丸) に向く. 東西方向の群速度は  $\partial\omega/\partial k$  なので, 図 9.6(b) の一点鎖線より左 (高波数) 側で東向き, 右 (低波数) 側で西向きである. (図 9.6(b) で,  $l = \text{一定}$  の曲線の勾配は一点鎖線より左側で正, 右側で負である.)

#### 9.4.4 波の構造と位相の伝播

正弦波解 (9.44) に対して速度・渦度と流線関数の位相関係は次のようになる:

$$u' = -\frac{\partial\psi'}{\partial y} = -il\psi', \quad (9.50)$$

$$v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x} = ik\psi', \quad (9.51)$$

$$\zeta' = \Delta\psi' = -(k^2 + l^2)\psi'. \quad (9.52)$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$ , つまり,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{c} = 0$  であり, 運動方向と波の伝播方向が直交するので, このようなロスビー波は横波である.

図 9.6 中に で示したロスビー波の位相関係を図 9.7(a) に示す. また, このときの波の空間構造を図 9.7(b) に示す.  $k < 0, l > 0$  なので,  $kx + ly = \text{一定}$  の等位相線は右上がりの直線となっている.  $u', v'$  が同じ位相で,  $\psi'$  よりも  $\pi/2$  だけ先行している. 渦度は当然ながら  $\psi'$  と逆位相である.

波の位相が伝播する様子は, パーセル的な考え方や渦度による説明がある (竹広ノート).

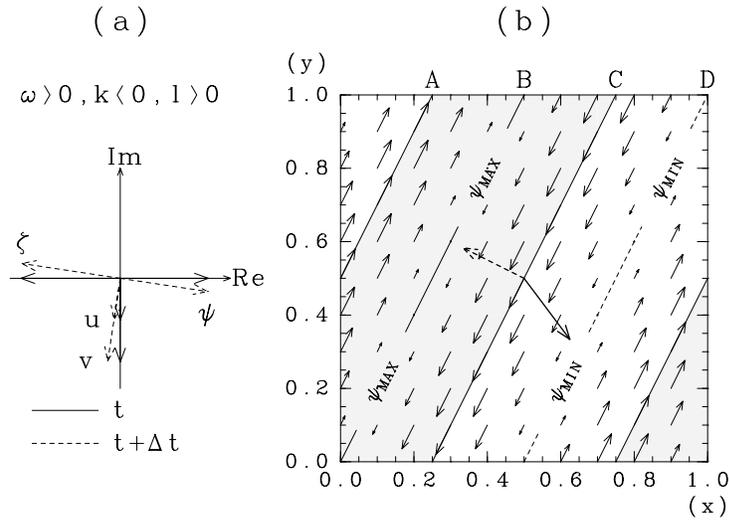


図 9.7: (a) ロスビー波の位相関係 ( $\omega > 0, k < 0, m > 0$  の場合; 前の図中の ) . (b) (a) で  $t$  に相当する時のロスビー波の空間構造. 破線太矢印は位相速度を, 実線太矢印は群速度を示す. 実線矢印は速度, 陰影部は  $\zeta' < 0$  の領域.

#### 9.4.5 ロスビー波の分散

初期値問題を解く (竹広ノート).

### 9.5 一様流中のロスビー波

これまでの波動の解析では, 基本場として静止した流体を仮定してきたので, 2 次の非線型である移流項 ( $\mathbf{u} \cdot \text{grad}$ ) $\mathbf{u}$  は微小として全く考慮してこなかった. この項のために, 一般には, 流れのなかの波動は必ずしも自明でない振舞いをし, さまざまな問題を提供する. 移流項を陽に扱う解析には難しさを伴う場合があり, 適切な物理数学的手法が要求される. この節では, 移流項を扱う最も基本的な場合として, 一様な流れのなかのロスビー波を考える.

#### 9.5.1 支配方程式と基本場と線型擾乱

前節と同様に, 支配方程式は  $\beta$  平面近似渦度方程式 (9.42) である. 基本場として一様東西流  $U_0$  を考える.  $\bar{u} = -\partial\bar{\psi}/\partial y = U_0$  より, 流線関数を

$$\psi(x, y, t) = -U_0 y + \psi'(x, y, t), \quad (9.53)$$

として, 微小擾乱  $\psi'(x, y, t)$  に対する線型化した支配方程式を求め, 次を得る:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (9.54)$$

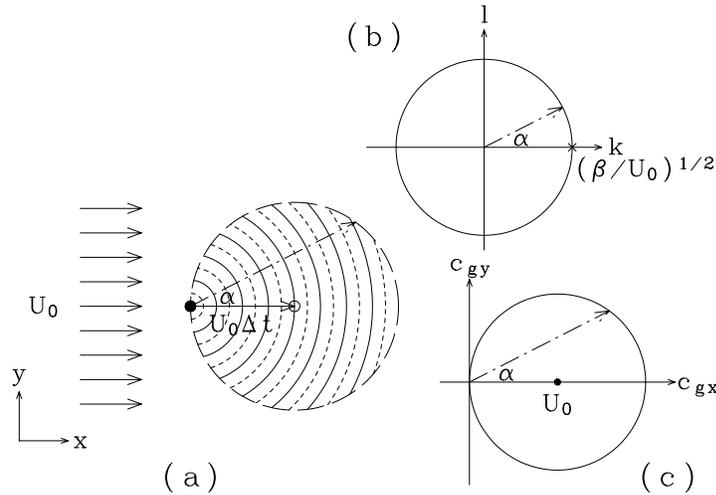


図 9.8: (a)  $\delta$  関数的な波源 (黒丸) をスイッチ・オンの後に定常に維持した場合のロスビー波の応答.  $\Delta t$  時間後の様子. 実線と点線は波の等位相線, 破線の円内だけに応答が現れる. (b) 停滞波の波数は,  $k-l$  平面で半径  $(\beta/U_0)^{1/2}$  の円. (c) 群速度は  $c_{gx}-c_{gy}$  平面で,  $(U_0, 0)$  を中心とする半径  $U_0$  の円. これらの図で一点鎖線の矢印はある特定の波.

### 9.5.2 分散関係式

正弦波解  $\psi'(x, y, t) = \text{Re}[\Psi_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}]$  を (9.54) に代入して整理すると, 一様東西流中のロスビー波に対する分散関係式を得る:

$$\omega = U_0 k - \frac{k\beta}{k^2 + l^2}. \quad (9.55)$$

静止基本場の場合 (9.45) に比べて,  $U_0 k$  だけ振動数が変化する. 西風 ( $U_0 > 0$ ) の場合には,  $k < 0$  なので振動数は小さくなり,  $U_0 = \beta/(k^2 + l^2)$  のとき,  $\omega = 0$  となる. このとき, 波は空間に固定された停滞波 (stationary wave) となる. 一般に, 波の位相速度 ( $c_{px}, c_{py}$ ) と群速度 ( $c_{gx}, c_{gy}$ ) は, 分散関係式 (9.55) よりそれぞれ次で与えられる:

$$c_{px} = U_0 - \frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad (9.56)$$

$$c_{py} = \left( U_0 - \frac{\beta}{k^2 + l^2} \right) \frac{k}{l}, \quad (9.57)$$

$$c_{gx} = U_0 + \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (9.58)$$

$$c_{gy} = \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2}. \quad (9.59)$$

東西 ( $x$ ) 方向の位相速度と群速度は, 静止基本場のそれぞれに  $U_0$  が加わるだけである. 流れ  $U_0$  によってみると, 静止した基本場の場合と同じ分散をする. 南北 ( $y$ ) 方向の位相速度は一様東西流の影響があるが, 群速度は静止基本場の場合と同じである.

### 9.5.3 局所的な波源に対する定常応答

Lighthill(1966) は、波源の空間構造が  $\delta$  関数で与えられ、時間的にはスイッチ・オンの後に定常に維持される場合について、ロスビー波の応答を調べた。図 9.8(a) は応答の模式図で、波面は波源 (黒丸) から同心円的に広がる。そして、このような定常波応答が存在する領域は、波源から風下側に  $U_0\Delta t$  だけ離れた点 (白丸) を中心とする半径  $U_0\Delta t$  の円内に限られる。Lighthill は鞍点法により波の位相だけを調べたが、林 (1987) はさらに振幅分布を求めて、さらに深い考察を加えている。

図 9.8(a) の応答パターンは、ロスビー波の群速度を調べることにより、次のように理解できる。

定常解 ( $\omega = 0$ ) の場合、分散関係式 (9.55) より次を得る：

$$U_0k(k^2 + l^2 - \frac{\beta}{U_0}) = 0. \quad (9.60)$$

すなわち、停滞波の波数は、 $k = 0$  または  $k^2 + l^2 = \beta/U_0$  でなければならない。後者は図 9.8(b) に示す波数空間で半径  $\sqrt{\beta/U_0}$  の円である。

$k = 0$  の場合には、群速度  $c_g$  は次で与えられる：

$$c_g = (U_0 - \frac{\beta}{l^2}, 0). \quad (9.61)$$

一方、 $k^2 + l^2 = \beta/U_0$  の場合には、

$$c_g = 2U_0 \frac{k}{k^2 + l^2} (k, l) = 2U_0 \frac{k}{k^2 + l^2} \mathbf{k}. \quad (9.62)$$

となり、群速度の向きが波数ベクトルの向きと同じになる ( $c_g \parallel \mathbf{k}$ )。さらに、群速度の方向依存性は、波数ベクトルの向きを  $\alpha$  ( $\cos \alpha = k/\sqrt{k^2 + l^2}$ ) と表記すると、

$$|c_g| = 2|U_0| \cos \alpha, \quad (9.63)$$

と書けるので、 $c_{gx}-c_{gy}$  平面内で、図 9.8(c) に示す円となる。ちょうど風下 ( $\alpha = 0$ ) には  $2|U_0|$  でもっとも速く情報が伝播する (応答が現れる)。実空間では群速度に  $\Delta t$  を掛けた領域に応答が現れるので、図 9.8(a) となる。

### 9.5.4 観測

- テレコネクション (Teleconnection)

- Wallace and Gutzler(1981)

対流圏月平均循環場の年々変動の解析により、ロスビー波列の“大円”伝播を示唆するパターンを得た (図 9.9)。PNA(Pacific/North American) パターンなど、それぞれに固有の名前がつけられた。

- Hoskins and Karoly(1981)

基本的には、長周期の局在した加熱場に対する大気の線型定常応答と考えられる。例えば、エルニーニョ時の降水に伴う加熱などをイメージすればよい。

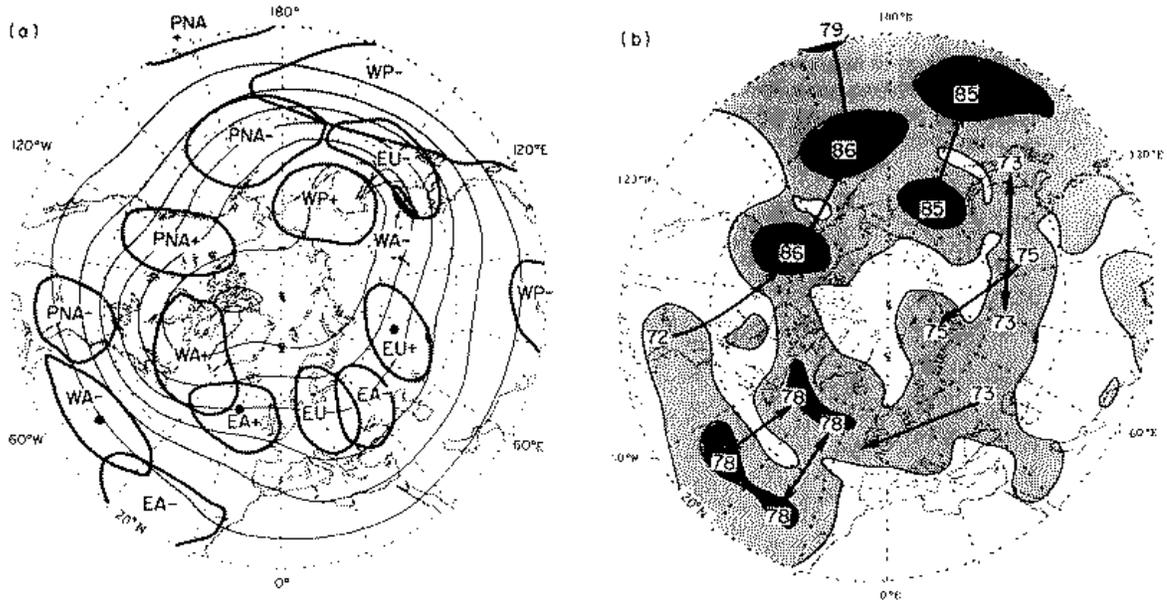


図 9.9: 北半球冬季 (12, 1, 2 月) の月平均 500 hPa 高度場の同時相関パターンで卓越する構造 (Wallace and Gutzler, 1981; Wallace and Blackmon, 1983, Fig. 3.4). (左) 太線: 相関解析で得られた 5 つの強いパターン. PNA(Pacific/North American), WA(West Atlantic), EA(East Atlantic), EU(Eurasian), WP(West Pacific). +, - は正相関か負相関. 細線: 冬季平均 500 hPa 高度場. (右) 強い負相関のある地域. 薄い陰は相関が  $-0.6$  より強く, 濃い陰は  $-0.75$  より強い領域. 最大値を 100 倍した数字で示す.

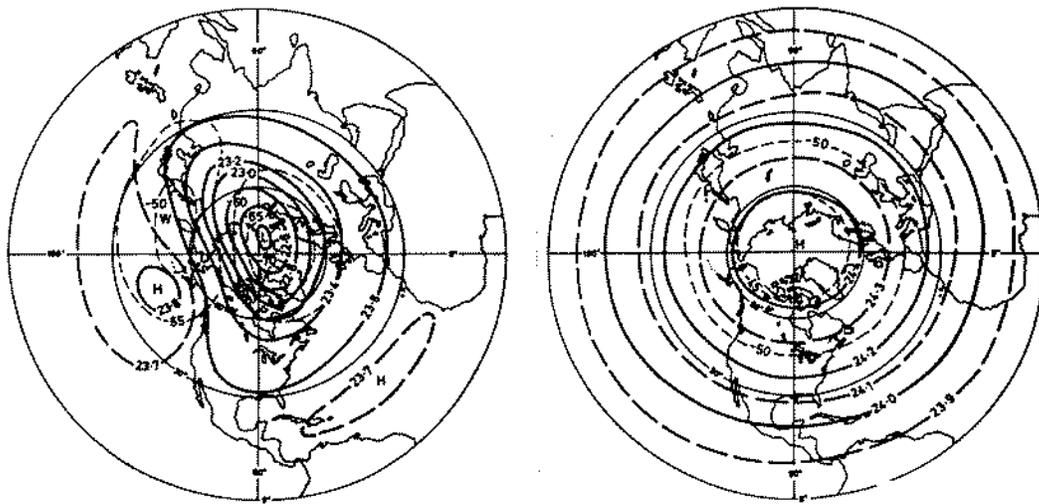


図 9.10: 北半球の季節平均 30 hPa 高度場 (実線, km) と温度場 (破線, °C). (左) 冬季平均 (12, 1, 2 月), (右) 夏季平均 (6, 7, 8 月). Holton(1975; Fig. 1.9) より.

- 冬季成層圏停滞波
  - 気候図 (例えば, Holton, 1975: Fig. 1.9)  
冬季には  $U_0 > 0$  で定常ロスビー波解があり, 実際の流れ場は南北に蛇行する周極流である. 一方, 夏季成層圏では  $U_0 < 0$  で定常ロスビー波解がなく, 流れ場はほとんど東西に構造をもたない.

## 参考文献

- Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, 489pp.
- Gill, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, 662pp.
- 林 祥介, 1987: 二次元定常ロスビー波の線形論, 気象研究ノート, **156**, 29–48.
- Holton, J.R., 1975: *The dynamic meteorology of the stratosphere and mesosphere*, Meteorological Monograph, **37**, AMS, 218pp.
- Hoskins, B.J. and D. Karoly, 1981: The steady, linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. *J.Atmos.Sci.*, **38**, 1179–1196.
- 今村 勤, 1976: 「物理とフーリエ変換」岩波全書 290, 岩波書店, 234pp.
- Lighthill, 1966: Dynamics of rotating fluids: a survey. *J.Fluid Mech.*, **26**, 411–431.
- 松野 太郎・島崎 達夫, 1981: 「成層圏と中間圏の大気」大気科学講座 3, 東京大学出版会, 279pp.
- Wallace, J.M. and M.L. Blackmon, 1983: Observations of low-frequency atmospheric variability. *Large-scale Dynamical Processes in the Atmosphere*, B.J. Hoskins and R.P. Pearce Eds., Academic Press, 55–94.
- Wallace, J.M. and D.S. Gutzler, 1981: Teleconnections in the geopotential height field during the Northern Hemisphere winter. *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 784–812.

## 第10章 波と流れの相互作用

これまでの3つの章で紹介してきた音波、重力波、ロスビー波は、ほとんどが静止した場での波であった。まず、線型波解析についての基礎知識を整理するために、扱いの簡単な静止基本場を取り上げたのである。もしも、波の位相速度が場の流速に比べて十分に速ければ（例えば、一日に地球を一周する潮汐波など）、静止基本場の仮定も十分に妥当であるが、そうでない場合には基本場が静止していない（すなわち、流れがある）ことを考慮する必要がある。

この章では、流れのある中での波の形態と流れに対する波の働きについて考える。いわゆる、波と平均流の相互作用と呼ばれる理論的枠組で、その構築と整理・理解が1970年代から急速にすすんだところである。このような進展は、冬季成層圏突然昇温現象、赤道大気準二年周期振動、中間圏界面弱風層などの中層大気中の顕著な現象の発見とそれらの力学の解明とに深く関わっている。今日では、これらの現象は基本的に波と流れの相互作用により説明されている。ここでは、おもに重力波を具体例として、波と流れの相互作用に関する基本的な考え方を紹介する。

### 10.1 一般流中の内部重力波

#### 10.1.1 基礎方程式系

重力場のなかにおかれた鉛直2次元空間  $(x, z)$  での非圧縮性完全流体の連続方程式 (8.1) と運動方程式 (8.2) は次であった：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (10.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g}. \quad (10.3)$$

ここで、 $\mathbf{g} = (0, -g)$  は重力による外力であり、連続方程式はオイラー式記述で、運動方程式はベクトル不変系 (p. 6 参照) で書いてある。非圧縮性の仮定によりエネルギー方程式と状態方程式を陽に考える必要がなく、(10.1), (10.2), (10.3) は、 $(p, \rho, \mathbf{u})$  で閉じた方程式系となっている。

### 10.1.2 運動エネルギーと位置エネルギー

解析を進める前に、今考えている系のエネルギーについて考えておく。まず、単位体積あたりの運動エネルギー (kinetic energy) と位置エネルギー (potential energy) を次のように定義する：

$$\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2, \quad (10.4)$$

$$\mathcal{P} \equiv \rho gz. \quad (10.5)$$

これらをあわせて機械的エネルギー (mechanical energy) という。非圧縮の仮定により内部 (熱) エネルギーは不変なので、これを陽に考える必要はない。

(10.1) に  $|\mathbf{u}|^2/2$  をかけ、また、(10.3) と  $\rho\mathbf{u}$  との内積をとると、それぞれ、

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (10.6)$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) + \rho\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = -\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}p + \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}, \quad (10.7)$$

となり、辺々を加えて整理すると、次を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\right) = -\operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}. \quad (10.8)$$

ここで、ベクトル関係式  $\operatorname{div}(\Phi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi\operatorname{div}\mathbf{A}$  を用いている。(10.4) の表式を使うと、運動エネルギーの局所的な時間変化は次のように書ける：

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{K}\mathbf{u}) = -\operatorname{div}(p\mathbf{u}) - \rho g w. \quad (10.9)$$

一方、位置エネルギーの局所的な時間変化は次のように考える：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho gz), \\ &= \rho\frac{\partial}{\partial t}(gz) + gz\frac{\partial\rho}{\partial t}, \\ &= \rho\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}\right\}gz - \rho\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(gz) - gz\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}), \\ &= \rho g\frac{Dz}{Dt} - \operatorname{div}(\rho gz\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (10.10)$$

結局、

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{P}\mathbf{u}) = \rho g w, \quad (10.11)$$

と書ける。

ここで、式 (10.9) と式 (10.11) とを足し合わせると、

$$\frac{\partial(\mathcal{K} + \mathcal{P})}{\partial t} = -\operatorname{div}\{(\mathcal{K} + \mathcal{P})\mathbf{u}\} - \operatorname{div}(p\mathbf{u}), \quad (10.12)$$

となる。これは、(機械的エネルギーの時間変化) = (機械的エネルギー・フラックスの溜り) + (圧力による仕事)、という関係を表している。足し算で打ち消しあって消えた項が位置エネルギーと運動エネルギーとの変換項である。前者から後者への変換項は、

$$C(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}) = -\rho g w, \quad (10.13)$$

である。密度と鉛直速度が負相関であれば、位置エネルギーから運動エネルギーへの変換が起こっていることになる。すなわち、軽いもの ( $\rho' < 0$ ) が上昇 ( $w > 0$ ) して、重いもの ( $\rho' > 0$ ) が下降 ( $w < 0$ ) する状況である。

ある領域  $S$  を考えて、この領域内のエネルギーをそれぞれ、 $K \equiv \int_S K dS$ ,  $P \equiv \int_S P dS$  とし、(10.12) を領域積分する。ガウス (Gauss) の発散定理により、

$$\frac{d}{dt}(K + P) = - \int_l (K + P) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl - \int_l p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl, \quad (10.14)$$

となる。ここで、右辺第 1 項は境界  $l$  を通しての機械的エネルギー・フラックスであり、第 2 項は境界  $l$  を通しての仕事である。

ガウスの発散定理  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ , 2次元の場合には  $\int_S \operatorname{div} \mathbf{A} dS = \int_l \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dl$

### 10.1.3 波と流れ

ある変数  $a(x, z, t)$  が  $x$  方向に周期性をもつとする。その周期的な最短距離を  $L$  とする。ここで、 $x$  方向の平均  $\bar{a}$  は、 $\bar{a} = L^{-1} \int_0^L a dx$  で与えられる。平均からの偏差 (擾乱) を  $a'$  とすると、

$$a(x, z, t) = \bar{a}(z, t) + a'(x, z, t), \quad (10.15)$$

であり、両辺の  $x$  平均をとって  $\overline{a'} = 0$  である。また、周期性より  $\overline{\partial a / \partial x} = 0$  である。

基礎方程式系 (10.1)~(10.3) で、従属変数を平均量と擾乱成分に分ける：

$$\begin{cases} p(x, z, t) = \bar{p}(z, t) + p'(x, z, t), \\ \rho(x, z, t) = \bar{\rho}(z, t) + \rho'(x, z, t), \\ u(x, z, t) = \bar{u}(z, t) + u'(x, z, t), \\ w(x, z, t) = \quad \quad \quad + w'(x, z, t), \end{cases} \quad (10.16)$$

ここで、平均的な鉛直流はないと仮定した。これらを連続方程式 (10.1) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} + \rho')w' = 0, \quad (10.17)$$

である。ここで  $x$  平均をとると、

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} = 0, \quad (10.18)$$

となる。もう一つの連続方程式、つまり、非発散の式 (10.2) は、同様の操作をすると  $x$  平均の結果として何も残らない。同様にして、運動方程式 (10.3) の各成分も書き換える。非発散の式 (10.2) を用いると、水平 ( $x$ ) 方向の運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10.19)$$

と書ける。各変数を平均量と擾乱に分けて、さらに  $x$  平均をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{(u' w')} = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \bar{\rho}' \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (10.20)$$

となる。同様にすると、鉛直 ( $z$ ) 方向の運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'^2} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' \frac{\partial p'}{\partial z}} - g, \quad (10.21)$$

となる。ここで、平均状態では静力学的平衡が成り立っているとすると、右辺の第 1 項と第 3 項がちょうど釣り合うことになり、

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g, \quad \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'^2} = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' \frac{\partial p'}{\partial z}}, \quad (10.22)$$

となる。

一方、連続方程式の擾乱成分は、式 (10.17) から式 (10.18) を引いて、擾乱の 2 次以上の項を  $O(\alpha^2)$  と略記すると、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = O(\alpha^2), \quad (10.23)$$

ここで、擾乱に対する非発散の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (10.24)$$

を用いている。同様にして、水平および鉛直方向の運動方程式は、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + O(\alpha^2), \quad (10.25)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g + O(\alpha^2), \quad (10.26)$$

と書ける。

もう一度整理しておく、平均場の時間発展 (または平衡) に関する方程式系は、

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho' w'}), \quad (10.27)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (\overline{u' w'}) + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' \frac{\partial p'}{\partial x}}, \quad (10.28)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g, \quad (10.29)$$

であり、擾乱の様子 ( $p', \rho', u', w'$ ) が与えられると、平均場 ( $\bar{\rho}, \bar{u}$ ) の時間変化が与えられる。 $\bar{p}$  は静力学的平衡の式を用いて  $\bar{\rho}$  より診断的に求めることができる。一方、擾乱成分の式は  $O(\alpha^2)$  の項を無視して、次のようになる：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho' + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0, \quad (10.30)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (10.31)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g, \quad (10.32)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (10.33)$$

すなわち、平均場 ( $\bar{\rho}, \bar{u}$ ) が与えられたならば、擾乱の様子 ( $p', \rho', u', w'$ ) はこの線型化した方程式で記述できる。ここで、平均場は流体力学的に安定であり、擾乱は基本的に波 (内部重力波) の重ね合わせであるとする。結局、これらの方程式をあわせて、平均場と波の時間発展が記述できることになる。一方、平均場が流体力学的に不安定な場合には、擾乱が中立波ではなく、別の議論 (後章参照) になる。また、これらの方程式系

の導出で、 $O(\alpha^2)$  の項が 1 次の項に対して無視できると仮定したことに留意しておこう。擾乱の振幅が大きくなれば、これらの方程式系は破綻し、もっと非線型な世界となる。

具体的に波解析を行うことを考えてみよう。この方程式系は線型であるが、係数に  $z, t$  依存性が残っている。ここで、時間方向には定常性（または非常にゆっくりとした時間変化）を仮定し、鉛直方向には平均場がゆっくりと変化しているとする、局所的な平面波のつなぎあわせで解を構成することができる。このような微分方程式の解法を WKB 法という。関連した研究者の頭文字 (Wentzel, Kramers, Brillouin) をとったものである。Jeffreys を加えて WKBJ 法といたり、Jeffreys の方法ということもある。数学的な解説は、例えば、寺沢 (1960; 第 2 章) にあり、内部重力波の具体的な WKB 解析は Lindzen(1990; 第 10 章) や竹広ノート (1989) にある。

## 10.2 エネルギー論

波と平均場（平均流）との相互作用を記述する閉じた方程式系が得られたので、この枠組みでエネルギーのやり取りがどのようになっているかを見ておこう。何の近似もしない基礎方程式系でエネルギーのやり取りを考えるのが一般的である（いわゆるエネルギー論、例えば、岸保 他 (1982; 第 3.4 節)）が、ここでは、次節で使うことを念頭に置いて、前節で導いた近似系をもとにエネルギー論を展開することにする。

まず、平均場の方程式系をさらに簡略化しておく。密度の擾乱が平均密度に比べて十分小さい ( $|\rho'| \ll \bar{\rho}$ ) とし、平均の密度と圧力が  $z$  だけの関数であるとする、水平方向の運動方程式が、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}), \quad (10.34)$$

と書いて、式 (10.27) は陽に考えなくてもよくなる。これは、(平均流の加速度)=(波による水平運動量の鉛直フラックスの収束)、という関係を表わしている。ここで、式 (10.34) に  $\bar{\rho}\bar{u}$  をかけて、平均流の運動エネルギー  $K_M \equiv \bar{\rho}\bar{u}^2/2$  の時間変化を表わす式を求める：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}^2 \right) = -\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}). \quad (10.35)$$

右辺の物理的な意味は、つぎの波の運動エネルギーに関する方程式を導出した後に考える。

つぎに、波の運動方程式 (10.31) に  $\bar{\rho}u'$ 、(10.32) に  $\bar{\rho}w'$  をかけて、両者を加え、 $x$  平均をとると、次式を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\overline{u'^2 + w'^2}) \right\} + \overline{\rho u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}} - \overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}} - \overline{\rho' w' g}. \quad (10.36)$$

$\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u' w' \bar{u}}) - \bar{u} \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u' w'})$  などの式変形と非発散の式 (10.33) を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\overline{u'^2 + w'^2}) \right\} = \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u' w'}) - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u' w' \bar{u}}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{p' w'}) - \overline{\rho' w' g}, \quad (10.37)$$

となる。 $K_W \equiv \bar{\rho}(\overline{u'^2 + w'^2})/2$  を波の運動エネルギーとすると、これはその時間変化を表わす式である。右辺の第 1 項は、式 (10.35) の右辺の符号をかえたものであり、平均流の運動エネルギーから波の運動エネルギーへの変換を表わしている。第 2 項と第 3 項は波によるエネルギーフラックスの収束（溜まり）である。それぞれ、平均流運動エネルギーの波による移流項と圧力による仕事項ともいえる。右辺第 4 項は次の波の位置エネルギーに関する方程式を導出した後に考える。

最後に、連続方程式の波成分 (10.30) に  $\rho'g$  をかけて、 $x$  平均をとり、 $d\bar{\rho}/dz$  でわると、次である：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{g}{d\bar{\rho}/dz} \overline{\rho'^2} \right) + \overline{\rho'w'g} = 0. \quad (10.38)$$

ここで、等密度面の基準水平面からの偏位を  $\eta'$  とすると、

$$\rho'(x, z, t) = \bar{\rho}(z - \eta') - \bar{\rho}(z), \quad (10.39)$$

$$\simeq -\frac{d\bar{\rho}}{dz} \eta', \quad (10.40)$$

と書けるので、式 (10.38) の左辺の括弧内は  $\eta'$  を使って書き直せる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho} N^2 \overline{\eta'^2} \right) = \overline{\rho'w'g}. \quad (10.41)$$

ここで、左辺は波の位置エネルギー ( $P_W \equiv \bar{\rho} N^2 \overline{\eta'^2} / 2$ ) の時間変化を表わしている。右辺は式 (10.37) の右辺第 4 項の符号をかえたものであり、波の運動エネルギーと位置エネルギーの間の変換を表わしている。

以上をまとめて書いておくと、次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial t} K_M = -C_K, \quad (10.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_W = -C_W, \quad (10.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} K_W = C_K + C_W + DF_W. \quad (10.44)$$

ここで、各エネルギーは、

$$\text{平均流の運動エネルギー} : K_M = \frac{1}{2} \overline{\rho u^2}, \quad (10.45)$$

$$\text{波の位置エネルギー} : P_W = \frac{1}{2} \bar{\rho} N^2 \overline{\eta'^2}, \quad (10.46)$$

$$\text{波の運動エネルギー} : K_W = \frac{1}{2} \bar{\rho} \overline{(u'^2 + w'^2)}, \quad (10.47)$$

であり、各変換項は、

$$C_K = \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial}{\partial z} \overline{(u'w')}, \quad (10.48)$$

$$C_W = -\overline{\rho'w'g}, \quad (10.49)$$

$$DF_W = -\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \overline{(u'w'\bar{u})} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{(\rho'w')}. \quad (10.50)$$

である。波の構造 (擾乱の相関) や平均場との関係に依存してこれらの符号が変わり、相互にエネルギーを変換することになる。式 (10.42)~(10.44) を足しあわせると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (K_M + P_W + K_W) = DF_W. \quad (10.51)$$

となり、鉛直エネルギーフラックスの収束  $DF_W$  によって、全機械的エネルギーが変化する。ここで、平均場の位置エネルギー  $P_M$  はある (定義できる) けれど、そのエネルギーを運動エネルギーに変換できないことに注意しよう。この枠組みでは、平均場の位置エネルギーは「ポテンシャル」なエネルギーではない。

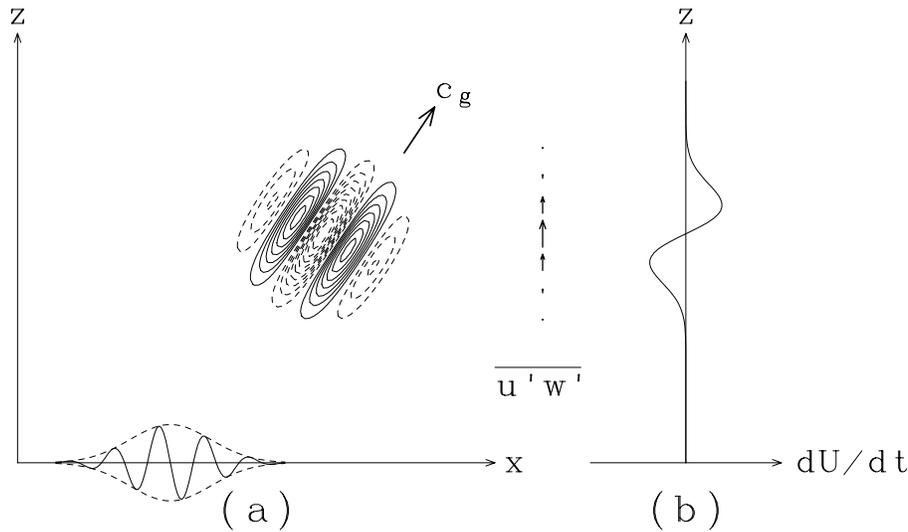


図 10.1: 静止流体中の波束による平均流の加速.

## 10.3 内部重力波の働き

### 10.3.1 静止流体中の波束

最も基本的な状況として、静止した静力学的平衡にある基本場での波束を考える。有限大きさの波板を引っ張ると、波板が流体に仕事をして、有限の領域にエネルギーを注入することになる。引っ張り続けるとエネルギーの注入が続き、波の先頭が波板からどんどん離れていくが、引っ張るのを止めると、図 10.1(a) のように波束となって伝播する。平均流の運動方程式 (10.34) をもう一度書くと、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}), \quad (10.52)$$

である。図 10.1 の波束では、波の振幅が空間的に変化しているので、右辺の括弧内は図の上向き太矢印のようになる。すなわち、波の先頭部分では運動量フラックスの収束があり、流れを加速する (図 10.1 b)。一方、波の後端部分ではフラックスの発散となり、流れが減速される。波束が通過中には平均流が誘起されるが、通過してしまうと元の静止状態に戻るようになる。

### 10.3.2 シアー流中の波束

シアー流中の波束の伝播は、WKB 解析をまじめにやれば、その伝播の様子や平均流への作用を知ることができる。Lindzen(1990; 第 10 章) や竹広ノート (1989) を参照のこと。

## 10.4 エリアッセン-パームの関係式

Eliassen and Palm(1961) は、この章でここまで準備してきた枠組みを使って、内部重力波の伝播に伴った平均流との相互作用を初めて解析した。その内容は、大きく 2 つに分れるので、それぞれを順に見ていく

ことにする. 詳細は, Lindzen(1990; 第 8 章) を参照のこと.

### 10.4.1 第 1 定理

まず, 次の正弦波解を仮定する:

$$u'(x, z, t) = \text{Re}[U(z)e^{ik(x-ct)}]. \quad (10.53)$$

波の水平方向運動方程式 (10.31) で, 最初の 2 項は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' = (-ikc + ik\bar{u})u' = (\bar{u} - c)\frac{\partial u'}{\partial x}, \quad (10.54)$$

と変形できるので, 両辺に  $\bar{\rho}$  をかけて整理すると,

$$\bar{\rho}(\bar{u} - c)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\rho}w'\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0, \quad (10.55)$$

となる.  $\bar{\rho}, \bar{u}, c$  は  $x$  に依存しないので,

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\bar{\rho}(\bar{u} - c)u' + p'\} + \bar{\rho}w'\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0, \quad (10.56)$$

と書き直すことができる. 両辺に左辺第 1 項の  $\{ \}$  をかけた後,  $x$  方向の平均をとると, 次を得る:

$$\bar{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \{\overline{\bar{\rho}(\bar{u} - c)u'w'} + \overline{p'w'}\} = 0. \quad (10.57)$$

ここで,  $\bar{\rho} \neq 0$  であるので, もし平均流に鉛直シアアがあれば ( $\partial\bar{u}/\partial z \neq 0$ ),

$$\overline{p'w'} = -\bar{\rho}(\bar{u} - c)\overline{u'w'}, \quad (10.58)$$

という関係式が成り立つ. 実は, 鉛直シアアがなくても (10.56) 式で,  $\{ \} = \text{一定}$ , となるので, この両辺に  $w'$  をかけて  $x$  方向の平均をとると, 同じ式が得られる. この式は, 波に伴う鉛直エネルギーフラックス (圧力による仕事) と運動量フラックスを関係付けるもので, エリアッセン-パームの第 1 定理と呼ばれる.

この式より, 内部重力波の平均流に対する働きに関連して, 次のことがいえる:

波に伴う運動量フラックスは, もし平均流に作用するならば, 平均流を波の位相速度に近づける傾向をもつ符合をとる.

図 10.2 をもとにこれを示そう. まず,  $\overline{p'w'} > 0$  として, エネルギーが上方に伝播している場合を考える. (a) のように  $c > \bar{u}$  であれば, エリアッセン-パームの第 1 定理 (10.58) より,  $\overline{u'w'} > 0$  である. 正の運動量の鉛直 (上方) フラックスがあることになる. もしも, この波が減衰して運動量を平均流に渡すならば,  $\partial(\overline{u'w'})/\partial z < 0$  となって平均流の運動方程式 (10.34) の右辺が正符合となるので, 平均流を加速する. すなわち, 平均流を波の位相速度に近づけることになる. 一方, (b) のように  $c < \bar{u}$  であれば  $\overline{u'w'} < 0$  であり, 負の運動量の鉛直 (上方) フラックスがあることになる. この波が減衰するとき,  $\partial(\overline{u'w'})/\partial z > 0$  となって平均流を減速する. 結局, この場合にも平均流を波の位相速度に近づけることになる. ここで,  $\overline{u'w'}$  の符合が, 鉛直シアアに依存していないことに注意しておこう.

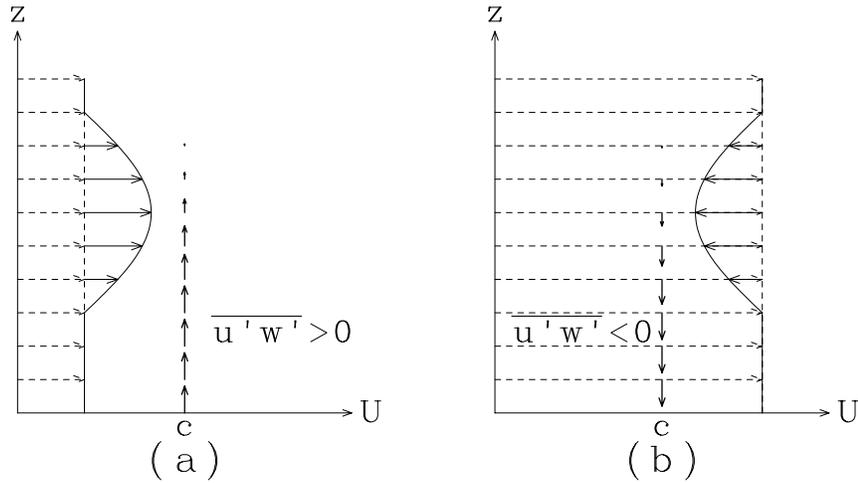


図 10.2: エリアッセン-パームの第 1 定理の例示 ( $\overline{p'w'} > 0$ ).

### 10.4.2 第 2 定理

波のエネルギーに関する式 (10.43), (10.44) を辺々加えて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(P_W + K_W) &= C_K + DF_W, \\ &= \bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) - \bar{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'u}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{p'w'}), \\ &= -\bar{\rho}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}(\overline{u'w'}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{p'w'}), \end{aligned} \quad (10.59)$$

と変形できる. さらに, エリアッセン-パームの第 1 定理 (10.58) を代入して,

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_W + K_W) = (\bar{u} - c)\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho u'w'}), \quad (10.60)$$

を得る. ここで, 運動量フラックスの発散を与える表式に変形すると,

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho u'w'}) = \frac{1}{\bar{u} - c}\frac{\partial}{\partial t}(P_W + K_W), \quad (10.61)$$

となる. これがエリアッセン-パームの第 2 定理の一表現である.

この式より次のことがいえる:

- i) 波の強制・散逸がない,
- ii) 定常である,
- iii) クリティカルレベルがない,

ならば, 波に伴う運動量フラックスの収束発散がなく, 平均流は加速されない.

ここで, クリティカルレベルとは,  $\bar{u}(z_c) = c$  となる高度  $z_c$  のことである. これを非加速定理 (non-acceleration theorem) と呼ぶ. また, この条件が成り立つとき,  $\overline{\rho u'w'}$  = 一定なので, エリアッセン-パームの第 1 定理より,  $\overline{p'w'}/(\bar{u} - c)$  が一定に保存されることがわかる. これを, 波の作用 (wave action) と呼ぶ. 波に伴う鉛直

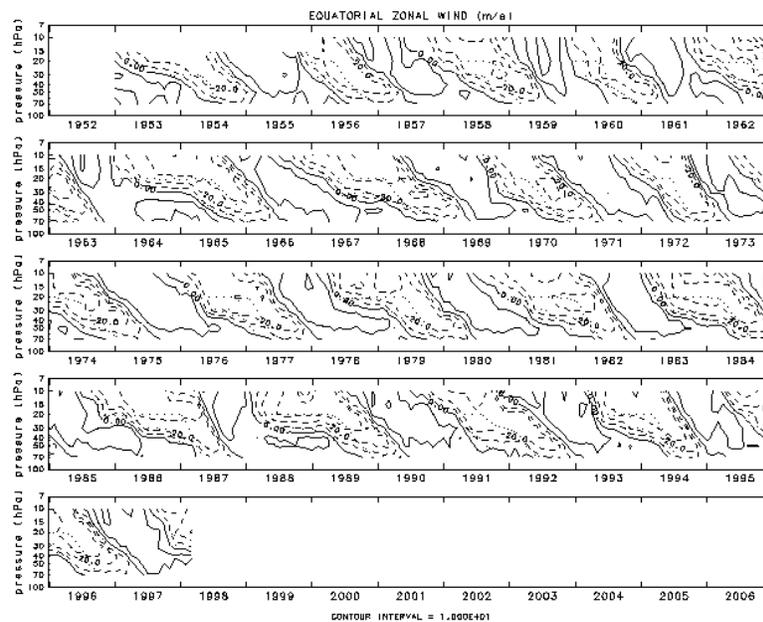


図 10.3: 赤道域東西風の時間 (横軸)-高度 (気圧; 縦軸) 断面図. 陰影をつけた部分が東風で, 他の部分は西風 (データはベルリン自由大学 Barbara Naujokat さん提供). <http://www-mete.kugi.kyoto-u.ac.jp/mete/J/benkyo/QBO/>

エネルギーフラックス  $\overline{p'w'}$  は保存されず, 波の作用が保存されることに注意しておこう. この状況は, 古典力学における断熱不変量のアナロジーとなっている.

非加速定理の対偶をとると, 平均流が加速しているときには, 上の i)~iii) の少なくとも一つは破れていることになる. 次節で紹介するように, 非加速定理が破れて平均流が加速される現象が, 大気中には多くある. その時には, どの過程が重要か吟味していくことになる.

断熱不変量の例 (アーノルド, 1980,; p. 290): 振子の長さがその固有振動に対してゆっくり変化するとき, 振子のエネルギー  $E$  と振動数  $\omega$  は大きく変化するが, それらの比  $E/\omega$  はほとんど変化しない. この量を物理学者は断熱不変量と名付けた.

## 10.5 大気現象

中層大気力学のつぎの三題嚙は, とともに波と流れの相互作用が重要な役割を果たす現象である. この章で紹介した枠組みは, 基本的にこれらの現象の理論的解明を行なう過程で産み出されてきたものである.

- 赤道大気準二年周期変動 (QBO: Quasi-Biennial Oscillation; 図 10.3)
  - Reed et al.(1961), Veryard and Ebdon(1961)  
赤道域下部成層圏で, 東西風が準二年 (22~34ヶ月) 周期で振動していることを発見した.

- Lindzen and Holton(1968), Holton and Lindzen(1972)  
赤道域を対流圏から成層圏へと伝播する波 (内部重力波, 赤道波) と平均帯状流との相互作用で周期振動が可能である, という波と流れの相互作用に基づく QBO 理論を構築した.
- Plumb(1977), Plumb and McEwan(1978)  
Lindzen と Holton の理論を発展させ, 室内実験により波と流れの相互作用により自励的振動が起ることを実証し, QBO 理論を検証した.
- 乙部・酒井・余田・塩谷 (1998)  
Plumb and McEwan(1978) の室内実験を再現し, 振動する流れのなかの重力波を初めて可視化した.
- 中間圏界面弱風層
  - 気候図 (例えば, Andrews et al., 1987: Fig. 5.2)  
成層圏界面から中間圏かけて強い帯状平均流 (50~100 m/s) があっても, 中間圏界面付近では帯状平均流が弱い. どの季節でも数 10 m/s 以下である.
  - Lindzen(1981), Matsuno(1982)  
対流圏から上方伝播する重力波は, 中層大気中で  $\bar{u} - c$  の大きさに依存して選択的に減衰するが, 生き残った波も中間圏界面付近で砕波, 減衰し, 平均流を減速する, という中間圏界面弱風層理論を構築した.
- 成層圏突然昇温現象 (図 10.4)
  - Scherhag(1952)  
ベルリンでの成層圏ゾンデ観測により, 冬季成層圏で数日間に 40 K 以上温度が上昇する現象を発見した. 北半球天気図 (マップ) 解析により, 惑星規模の周極渦崩壊に伴う現象であることが明らかになった.
  - Matsuno(1971)  
対流圏から伝播するロスビー波の増幅 (非定常性) とクリティカルレベルの存在により, 非加速定理が破れて平均流加速が生じ, 周極渦の崩壊に至る, という成層圏突然昇温理論を構築した.

## 参考文献

- Andrews, D.G., J.R. Holton and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, 489pp.
- アーノルド, V.I., 1980: 「古典力学の数学的方法」, 岩波書店, 492pp.
- Eliassen, A. and E. Palm, 1961: On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geofysiske Publ.*, **22**, 1–23.
- 岸保 勘三郎・田中 正之・時岡 達志, 1982: 「大気の大循環」大気科学講座 4, 東京大学出版会, 256pp.
- Holton, J.R. and R.S. Lindzen, 1972: An updated theory for the quasi-biennial oscillation of the tropical stratosphere. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1076–1080.
- Lindzen, R.S., 1981: Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.*, **86**, 9707–9714.
- Lindzen, R.S., 1990: *Dynamics in Atmospheric Physics*, Cambridge University Press, 310pp.
- Lindzen, R.S. and J.R. Holton, 1968: A theory of the quasi-biennial oscillation. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 1905–1107.

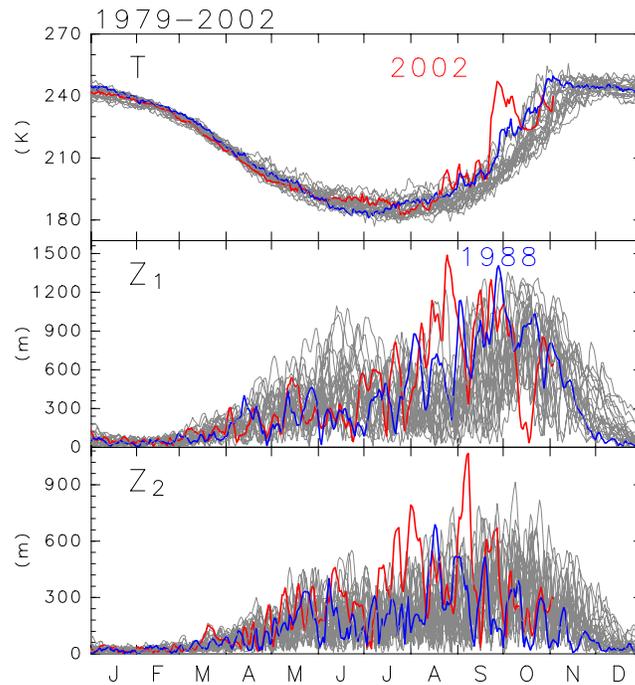


図 10.4: 2002 年 9 月南半球で起った成層圏突然昇温現象. 人工衛星による全球気象観測が可能となった過去 24 年間で, 南半球では初めての突然昇温現象. プラネタリー波の活動度も例年と異なっている.

Matsuno, T., 1971: A dynamical model of the stratospheric sudden warming. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1479–1494.

Matsuno, T., 1982: A quasi one-dimensional model of the middle atmosphere circulation interacting with internal gravity waves. *J. Met. Soc. Japan*, **60**, 215–226.

乙部 直人・酒井 敏・余田 成男・塩谷 雅人, 1998: QBO 実験における内部重力波の可視化と WKB 解析. *ながれ multimedia*, **17-3**, [http://www.nagare.or.jp/mm/98/index\\_ja.htm](http://www.nagare.or.jp/mm/98/index_ja.htm)

Plumb, R.A., 1977: The interaction of two internal waves with the mean flow: implications for the theory of the quasi-biennial oscillation. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1847–1858.

Plumb, R.A. and A.D. McEwan, 1978: The instability of a forced standing wave in a viscous stratified fluid: A laboratory analogue of the quasi-biennial oscillation. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1827–1839.

Scherhag, R., 1952: Die explosionsartigen Stratosphärenwärmungen des Spätwinters 1951/1952. *Ber. Deut. Wetterd. in der US-Zone*, **Nr. 38**, 51–63.

竹広 真一, 1989: 竹広ノート. (現在所属: 九州大学地球惑星科学科)

寺沢 寛一 (編), 1960: 「自然科学者のための数学概論 応用編」, 岩波書店, 714pp.

# 第11章 安定性の基本概念

これからの数章では流れの安定性に関する話題を取り上げる。地球流体を意識して、重力場の中におかれた流体の安定性 (例えば、熱対流) や回転系でのシア一流の安定性 (例えば、順圧不安定) を解析する。この章では、その準備として安定性の基本概念を解説する。

## 11.1 安定性

安定性について、理化学辞典 (第3版) には次のような説明がある：

安定性 (stability) おもに平衡状態の安定状態、不安定状態、準安定状態の区別をいうが、微分方程式の相軌道を含めた運動に対しても同様に用いられる。系のある平衡状態あるいは運動が外乱によって変化させられた場合、始めの偏差が小さければいつまでも小さいままであるとき、もとの平衡状態あるいは運動は安定であるという。...

まず、実例として重力場 ( $g$ ) のなかに置かれた質点の運動を考えて、安定性の概念を思い出しておこう (図 11.1)。 $x$  方向に凹凸  $f(x)$  を考え、その斜面上に質量  $m$  の質点を置く。斜面方向の距離を  $s$ 、勾配を  $\alpha$  とし、運動方程式は、

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \alpha, \quad (11.1)$$

である。 $x = s \cos \alpha$  なので、水平方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g \sin \alpha \cos \alpha = -g \tan \alpha \cos^2 \alpha, \quad (11.2)$$

となるが、 $\tan \alpha = \frac{df}{dx}$  であり、 $|\alpha| \ll 1$  とすると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \simeq -g \frac{df(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}, \quad (11.3)$$

となり、ポテンシャル  $F(x) \equiv gf(x)$  の勾配系で書ける。

まず、方程式 (11.3) の定常解 (steady solution)  $\bar{x}$  を求める。質点が運動しない点 ( $d\bar{x}/dt = d^2\bar{x}/dt^2 = 0$ ) のことで、 $dF(\bar{x})/dx = 0$  である。図 11.1 で  $f(x)$  の極大または極小を与える  $x$  が定常解である。これらの定常解  $\bar{x}$  に加えた微小な変位  $\delta x$  が時間とともに大きくなる場合には、この定常解は不安定 (unstable) であり、逆に、小さくなる (または小さいままである) 場合には安定 (stable) である。

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta x) = -\frac{dF(\bar{x} + \delta x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( F(\bar{x}) + \frac{dF(\bar{x})}{dx} \delta x + O(\delta x^2) \right) = -\frac{dF(\bar{x})}{dx} - \frac{d^2 F(\bar{x})}{dx^2} \delta x + \dots, \quad (11.4)$$

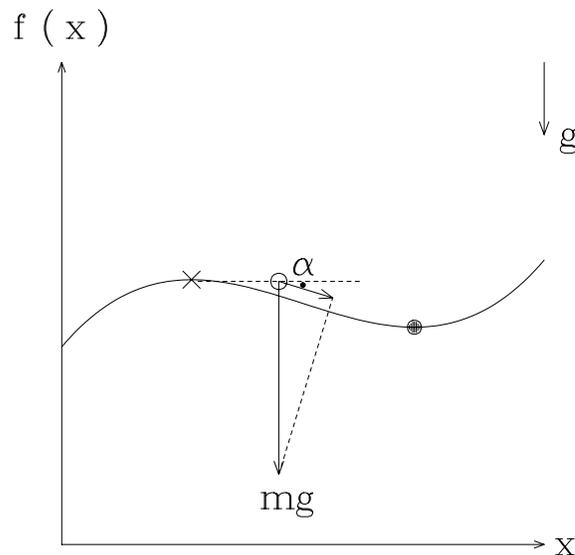


図 11.1: 重力場のなかの質点の運動. • は安定定常解, × は不安定定常解である.

より, 微小な変位に対して次のように近似できる:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta x) = -\frac{d^2 F(\bar{x})}{dx^2} \delta x. \quad (11.5)$$

初速度を 0 ( $d(\delta x)/dt = 0$ ) とすると, 結局,  $d^2 F/dx^2 > 0$  ( $f(x)$  が下に凸) ならば, 変位は  $\delta x \propto e^{\pm i\sqrt{d^2 F/dx^2} t}$  で定常解のまわりの (微小振幅の) 振動となり, 定常解は安定である. 一方,  $d^2 F/dx^2 < 0$  ( $f(x)$  が上に凸) ならば, 変位は  $\delta x \propto e^{\pm\sqrt{|d^2 F/dx^2|} t}$  となり時間とともに指数関数的に増大しうるので, 定常解は不安定である.

## 11.2 パーセル法: 静力学的不安定

流体の安定性を考える場合にも, 前節でみた質点の安定性と同様の議論をすることがある. 一般にパーセル法 (parcel method) と呼ばれている手法である. 仮定による制約が大きいため流体運動の詳細を知ることはできないが, 流体の安定・不安定を素朴に認識する上では有益な方法である. ここではまず, パーセル法を用いて静力学的不安定について考える. 重力 (浮力) が鍵となる不安定である.

### 11.2.1 非圧縮完全流体の場合

重力場の中で静止している非圧縮完全流体を考える. 空間座標  $z$  を鉛直上向きにとり, 流体の密度分布を  $\bar{\rho}(z)$  とする. 単位体積の流体塊 (パーセル) には  $-\bar{\rho}g$  の重力が働いているが, 同じ大きさの気圧傾度力に支えられている (静力学的平衡). このパーセルを流体層から取り去り, 代わりに密度  $\rho$  のパーセルを入れると, このパーセルには,  $(\bar{\rho} - \rho)g$  の浮力 (buoyancy force) が働く.  $\bar{\rho} > \rho$  ならば上向き,  $\bar{\rho} < \rho$  ならば下向きである.

いま、ある単位体積のパーセルを鉛直方向に  $\delta z$  だけ変位させる。この変位に伴ってまわりの場が乱されないと仮定すると、パーセルの密度とまわりの密度の差  $\delta\rho$  は、 $\delta\rho = -(d\bar{\rho}/dz)\delta z$  で表される。浮力は  $-g\delta\rho$  なので、パーセルの運動方程式は、

$$\rho \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \delta z, \quad (11.6)$$

で与えられる。  $N^2 \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$  として、(11.6) の解は、

$$\delta z = Ae^{iNt} + Be^{-iNt}, \quad (11.7)$$

となる。いま、 $N^2 > 0$  とすると、このパーセルは元の位置を中心として上下に振動するだけである。すなわち、 $d\bar{\rho}/dz < 0$  で鉛直上方に密度が減少するときには、この場は安定である。このような状況を静力学的に安定 (statically stable) といい、そのような成層を安定 (密度) 成層 (stable stratification) という。また、パーセルの振動数  $N$  を浮力振動数 (buoyancy frequency) またはブランチ・バイサラ振動数 (Brunt-Väisälä frequency) という。これが、第 8 章で解析したように重力波が存在できる状況である。

一方、 $N^2 < 0$  の場合には、浮力がパーセルの変位を増大させる向きに働き、パーセルは元の位置から時間とともに指数関数的に離れていく。すなわち、 $d\bar{\rho}/dz > 0$  で鉛直上方に密度が増大するときには、この場は不安定である。このような状況を静力学的に不安定 (statically unstable) といい、そのような成層を不安定 (密度) 成層 (unstable stratification) という。このような不安定な状況での流体運動は次章で解析するが、一般に対流 (convection) と呼ばれている。

### 11.2.2 理想気体の場合

圧縮性の流体の場合には、パーセルの変位とともにその密度が変化するので、その効果を陽に評価しなければならない。温位  $\theta$  (第 1.5.3 節) は理想気体の断熱的な変位に対する保存量であったので、それを用いてパーセルの運動方程式を書く：

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}}, \quad (11.8)$$

ここで、 $\theta$  および  $\bar{\theta}$  は、それぞれパーセルおよびまわりの場の温位である。ただし、パーセルの圧力は変位とともにまわりの場の圧力に瞬時に一致すると仮定している ( $\rho\theta = \text{一定}$ )。前節と同様に、 $z = 0$  から  $z = \delta z$  に断熱的に変位したパーセルの温位とまわりの温位の差は、

$$\theta(\delta z) - \bar{\theta}(\delta z) = \bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(\delta z) = -\frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z, \quad (11.9)$$

で表されるので、パーセルの運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -N^2 \delta z, \quad (11.10)$$

$$N^2 \equiv g \frac{d \ln \bar{\theta}}{dz}, \quad (11.11)$$

となる。つまり、(11.11) で定義した  $N^2$  が正ならば静力学的に安定であり、パーセルは上下に振動するだけである。平均的な対流圏の条件では、浮力振動数  $N \sim 1.2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  なので、振動周期  $2\pi/N$  は、約 8.7 分である。一方、 $N^2 < 0$  の場合には、静力学的に不安定である。

これらの結果を温位を用いて書き直すと、次のような乾燥大気に対する静力学的安定性の条件となる：

$$\begin{cases} d\bar{\theta}/dz > 0 & \text{静力学的に安定,} \\ d\bar{\theta}/dz = 0 & \text{静力学的に中立,} \\ d\bar{\theta}/dz < 0 & \text{静力学的に不安定.} \end{cases} \quad (11.12)$$

不安定な領域があれば、そこでは速やかに対流によるひっくり返りが起こり安定化する。十分に混合されれば温位一定の領域 ( $d\bar{\theta}/dz = 0$ ) が出現するが、理想気体 ( $p = \rho RT$ ) で静力学的平衡 ( $dp/dz = -\rho g$ ) にあるとすると、温度減率は乾燥断熱減率 ( $dT/dz = -g/c_p$ ) となる。地球大気の場合、 $c_p = 1004 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ 、 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  なので、 $dT/dz = -9.76 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$  であり、高度が 100m あがるごとに、約 1 度温度が下がる。晴れた日に地面付近に発達する混合層では、およそこのような温度減率となっている。

実際には、総観規模では対流圏の大気は中立でなく常に安定成層状態にある。温度減率は、およそ 0.6K/100m 程度である。上のような不安定条件下での混合過程を把握したうえで、対流圏大気が  $d\bar{\theta}/dz > 0$  となっていることを理解するためには、水蒸気を含む湿潤大気 (moist atmosphere) の湿潤対流 (moist convection) についてちゃんと考察する必要がある。

### 11.3 パーセル法：慣性不安定

前小節では重力場のなかで静止した流体の安定性を考えたが、流れのある場の安定性も同じように考えることができる。ここでは、やはりパーセル法を用いて、(ある特別な条件の下での) 回転系における流れの不安定、慣性不安定 (inertial instability) について考える。

コリオリパラメータを  $f = \text{一定}$  とし、水平 2 次元の流体を考える。空間座標は、 $(x, y)$  をそれぞれ、東向き、北向きとする。基本場は、 $x$  に依存せず経度方向に流れる地衝風  $\bar{u}_g(y)$  とする：

$$\bar{u}_g(y) = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (11.13)$$

この流れの中にあるパーセルを考えて、その変位が圧力場を変化させないと仮定すると、パーセルの運動方程式は次のようになる：

$$\frac{Du}{Dt} = fv = f \frac{Dy}{Dt}, \quad (11.14)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f(u - \bar{u}_g). \quad (11.15)$$

いま、 $y = y_0$  において  $\bar{u}_g(y_0)$  で流れるパーセルを、流れを横切って  $\delta y$  だけ変位させる。そのときパーセルの  $u$  は、(11.14) を積分して、

$$u(y_0 + \delta y) = \bar{u}_g(y_0) + f\delta y, \quad (11.16)$$

である。一方、その位置での地衝風速は次のように近似できる：

$$\bar{u}_g(y_0 + \delta y) = \bar{u}_g(y_0) + \frac{d\bar{u}_g}{dy} \delta y. \quad (11.17)$$

これら (11.16)(11.17) を用いて、 $y = y_0 + \delta y$  でのパーセルの  $y$  方向の運動方程式 (11.15) の右辺を見積もると、

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{D^2}{Dt^2}(\delta y) = -f \left( f - \frac{d\bar{u}_g}{dy} \right) \delta y = -f \frac{dM}{dy} \delta y, \quad (11.18)$$

となる。ここで、絶対運動量 (absolute momentum)  $M$  を  $M \equiv fy - \bar{u}_g$  と定義した。基本場の絶対渦度は、絶対運動量の  $y$  微分に等しいことに注意しよう：

$$\bar{q} = f + \bar{\zeta} = f - \frac{d\bar{u}_g}{dy} = dM/dy. \quad (11.19)$$

方程式 (11.18) は、前小節の (11.10) と数学的に同様な形となっている。すなわち、北半球 ( $f > 0$ ) において  $dM/dy$  が正ならば、このパーセルは元の位置を中心として南北に振動するだけであり、地衝風  $\bar{u}_g$  は慣性安定 (inertially stable) である。一方、 $dM/dy$  が負ならば、パーセルは元の位置から時間とともに指数関数的に離れていくので、地衝風  $\bar{u}_g$  は慣性不安定 (inertially unstable) である。これらの結果をまとめると、慣性不安定に対する絶対運動量の場の条件が次のように書ける：

$$\begin{cases} fdM/dy > 0 & \text{慣性安定,} \\ fdM/dy = 0 & \text{中立,} \\ fdM/dy < 0 & \text{慣性不安定.} \end{cases} \quad (11.20)$$

## 11.4 流体の安定性の実例

### 11.4.1 例 1：Rayleigh-Bénard 対流

重力場  $g$  の中に置かれた流体の物性定数のうち粘性係数を  $\nu$ 、熱伝導率を  $\kappa$ 、体積膨張率を  $\gamma$  とする。深さ  $D$  の流体層の上下で  $\Delta T$  の温度差 (下端の方が高温) をつけると、次で定義される無次元数、レイリー (Rayleigh) 数の値によって様々な流れが出現する：

$$Ra = \frac{\gamma g \Delta T D^3}{\kappa \nu}. \quad (11.21)$$

レイリー数が臨界値 (両端とも粘着条件の場合、 $Ra_c = 1708$ ) より小さければ、熱伝導状態が出現し、流れは生じない。レイリー数がこの臨界値を越えたところで、熱伝導状態が不安定となり、別の熱輸送形態である対流状態となる。このとき、熱伝導の状態は解としては存在するが、不安定な解なので実際に出現することはない。さらにレイリー数が大きな値になると、二次元定常流から三次元定常流、さらに非定常な流れへと、より複雑な流れ (乱流) まで段階的に対称性を低下させながら遷移する。

### 11.4.2 例 2：Reynolds の実験

パイプ内の粘性流の安定性を調べた実験である。流れ方向に構造をもたない 2 次元流、ハーゲン-ポアズイユ (Hagen-Poiseuille) 流が定常解として存在する。最大流速を  $U$ 、パイプの半径を  $L$ 、流体の動粘性率を  $\nu$  として、レイノルズ (Reynolds) 数  $Re = UL/\nu$  がある臨界値より小さければ、乱れのない流れ、層流 (laminar flow) が出現する。すなわち、ハーゲン-ポアズイユ流が安定であり、それが実現する。いっぽう、臨界値より大きければ、乱流 (turbulent flow) となる。この場合、ハーゲン-ポアズイユ流は定常解として存在するが不安定であり、別の流れの形態 (3 次元非定常流) が出現する。この場合には、層流から乱流へと突然に遷移する。

### 11.4.3 気象の例

大気現象の中にも流体力学的不安定により生じていると考えられるものが多くある。それらはおよそ, i) 熱的に不安定, ii) 運動学的に不安定, iii) 両者の組み合わせ, に分けることができる。以下の数章でそれぞれの具体例を見ていくことにする。

## 11.5 力学系における安定性の概念

第 11.1 節でみた質点の運動方程式 (11.3) は,

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (11.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dF(x)}{dx}, \quad (11.23)$$

と, 2次元の力学系 (時間に関する常微分方程式系) とみなすことができる。流体力学, 気象力学の基礎方程式系は偏微分方程式系であるが, その数値モデルは, 有限差分近似または直交関数展開 (スペクトル法) により, 多次元の連立常微分方程式系で近似されるので, それらを力学系とみなすことができる。ここでは, 力学系における安定性の概念をまとめておこう。

### 11.5.1 定常解と固有値問題

一般に,  $n$  次元の力学系を考える:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu). \quad (11.24)$$

ここで,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  である。  $\mu$  は, 外部パラメータで, 時間に依存しないとする。このような系を自励系 (autonomous system) という。この系の, ある定常解を  $\bar{\mathbf{x}}$  とすると,

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \mu) = 0. \quad (11.25)$$

である。

定常解  $\bar{\mathbf{x}}$  からの微小な摂動を  $\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$  とすると, その時間発展は,

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}', \quad (11.26)$$

と近似できる。ここで,  $\mathbf{J}$  は  $\mathbf{F}$  の  $\bar{\mathbf{x}}$  におけるヤコビアン行列 (Jacobian matrix) で, その  $ij$  成分は,  $J_{ij} = (\partial F_i / \partial x_j)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$  で与えられる。いま, 摂動が

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}_0 e^{\sigma t}, \quad (11.27)$$

と, 指数関数型であるとすると, その時間発展は  $\sigma$  によって決まり,  $\sigma$  は式 (11.26) より, ヤコビアン行列  $\mathbf{J}$  の固有値で与えられる。すべての固有値の実部が負のときには, どんな摂動も時間と共に減衰するので, この定常解は安定である。一方, 一つでも固有値の実部が正であれば, 摂動は時間と共に増幅しうるので, 定常解は不安定である。このとき, 固有値の虚部が 0 (実固有値) であれば, 摂動は単調に増大し, 固有値の虚部が 0 でなく複素固有値であれば, 摂動は振動しながら増幅する。増幅する摂動の「構造」は対応する固有ベクトルによって与えられる。

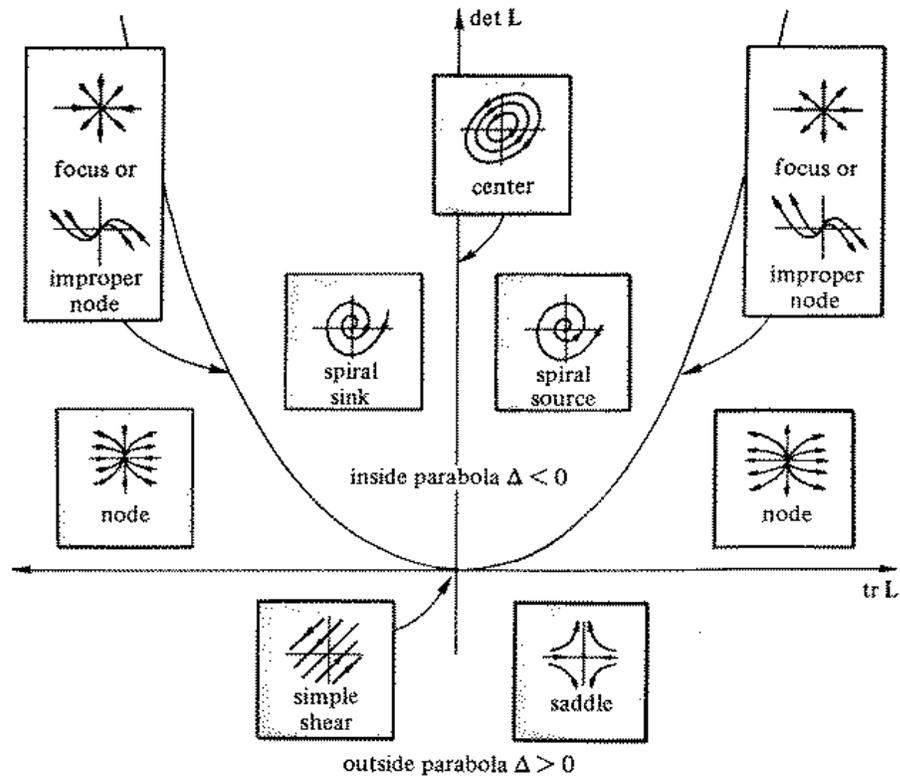


図 11.2: 2次元線型力学系の分類. 放物線は  $\Delta = 0$  の線. Ottino(1989; Fig. E2.5.2) より.

### 11.5.2 2次元線型力学系の場合

多次元系の性質をもつ最も簡単な例として, 2次元の線型力学系を考える (スモールとハーシュ, 1976) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C. \tag{11.28}$$

ここで, 従属変数  $(x, y)^t$  および各係数は実数とする. また, 一般性を失うことなく,  $C = 0$  とできる. このとき, 定常解は,  $x = y = 0$  である. この定常解の安定性は, 係数行列  $J$  の固有値で与えられるので, 特性方程式

$$(a - \sigma)(d - \sigma) - bc = 0, \tag{11.29}$$

を解けばよい. 整理すると,

$$\sigma^2 - (a + d)\sigma + ad - bc = \sigma^2 - \text{tr}(J)\sigma + \det(J) = 0, \tag{11.30}$$

となる. この判別式を  $\Delta \equiv \{\text{tr}(J)\}^2 - 4\det(J)$  と書くと, 固有値は,

$$\sigma = \frac{1}{2} \left\{ \text{tr}(J) \pm \sqrt{\Delta} \right\}, \tag{11.31}$$

で与えられる. 結局,  $\text{tr}(J)$  と  $\det(J)$  の大きさにより固有値が分類できて, 摂動の時間発展の様子がわかることになる (図 11.2).

まず、図 11.2 中の  $\Delta = 0$  の放物線より上では、複素固有値となり、摂動は時間的に振動型となる。  $\text{tr}(J)$  の符号が正か 0 か負かによって安定性が異なり、それぞれ、原点 (定常解にあたる) は不安定な渦状点 (spiral source), (中立な) 渦心点 (center), 安定な渦状点 (spiral sink) と呼ばれる。ちょうど  $\Delta = 0$  の放物線の上では固有値が重根となる。係数行列  $J$  が対角化できるかどうかで、焦点 (focus) または変格結節点 (improper node) となる。やはり、  $\text{tr}(J)$  の符号の正負で、不安定か安定かが決まる。

図 11.2 中の  $\Delta = 0$  の放物線より下では、実固有値となり、摂動は時間とともに単調に変化する。まず、  $\det(J) > 0$  のときには、  $\text{tr}(J)$  の符号の正負によって、それぞれ、  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$  または  $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$  となり、不安定または安定な結節点 (node) となる。最後に、  $\det(J) < 0$  では、つねに  $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$  となるので、不安定であり、原点は鞍点 (saddle) と呼ばれる。結局、図 11.2 で第 2 象限内が安定、第 1 象限と第 2 象限の境が中立、それ以外は不安定である。

### 11.5.3 有限評価期間に対する安定性 (特異値問題)

これまでみてきた固有値解析は、無限評価期間に対して摂動の振舞いを捉えようとするものである。これに対して、ある有限期間内に摂動が発達するかどうかを調べることを考える。やはり、2 次元の線型力学系 (11.28) で  $C = 0$  とする。原点  $x = y = 0$  が定常解で、摂動の時間発展は、同じ線型方程式系で与えられる。

いま、初期値  $x(t_0)$  を与えて、有限時間  $\tau$  後にこれがどうなるかを考えると、(11.28) 式より

$$\mathbf{x}(t_0 + \tau) = M(\tau)\mathbf{x}(t_0), \quad (11.32)$$

と線型の写像で書ける。この写像  $M$  は、系が線型 ( $J$  が一定) なので、評価時間  $\tau$  だけに依存し、行列  $\tau J$  の指数関数で書ける：

$$M(\tau) = e^{\tau J}. \quad (11.33)$$

このとき、  $J$  の固有値を  $\sigma_i$ 、それぞれに属する固有ベクトルを  $\xi_i$  とすると、行列の指数関数の性質 (スモールとハーシュ, 1976) より、  $M(\tau)$  は、固有値  $e^{\tau\sigma_i}$ 、固有ベクトル  $\xi_i$  をもつ。

ここで、初期時刻  $t_0$  での摂動  $x(t_0)$  が定常解のまわりにランダムで等方的に与えられたとすると、相空間内の等確率密度面は、

$$\mathbf{x}^t(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \varepsilon^2 = \text{const}. \quad (11.34)$$

という半径  $\varepsilon$  の  $n$  次元球となる。これが、(11.32) 式より時刻  $t_0 + \tau$  では

$$\mathbf{x}^t(t_0 + \tau)[M(\tau)M^t(\tau)]^{-1}\mathbf{x}(t_0 + \tau) = \varepsilon^2, \quad (11.35)$$

となり、  $n$  次元球が  $n$  次元楕円体に変形される (Lorenz, 1965)。半正值対称行列  $MM^t$  の固有値を大きい順に並べたときの  $i$  番目を  $\Gamma_i(\tau)$ 、対応する正規化された固有ベクトル (対称行列だから直交系をなす) を  $\zeta_i(\tau)$  とすると、楕円体の主軸長は  $\varepsilon\Gamma_i^{1/2}$ 、主軸方向は  $\zeta_i$  で与えられる。

一方、時刻  $t_0 + \tau$  で楕円体の主軸となるベクトルが初期時刻  $t_0$  ではどうであったかは、半正值対称行列  $M^tM$  の固有ベクトルで与えられる (野村, 1991; 余田 他, 1992)。まず、半正值対称行列  $M^tM$  の固有値を大きい順に並べたときの  $i$  番目を  $e^{2\lambda_i(\tau)\tau}$ 、それに対応する正規化された固有ベクトル (直交系をなす) を  $f_i(\tau)$  とする：

$$M^t(\tau)M(\tau)f_i(\tau) = e^{2\lambda_i(\tau)\tau}f_i(\tau). \quad (11.36)$$

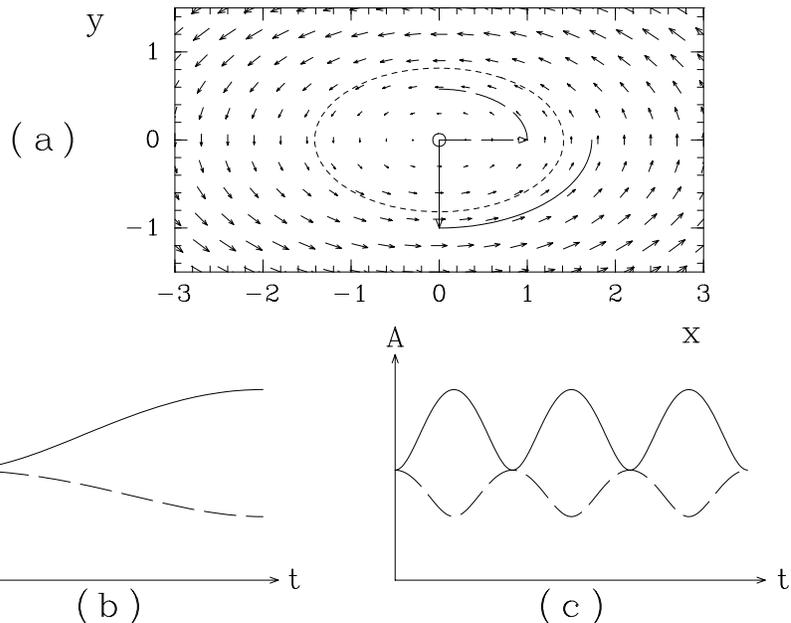


図 11.3:  $dx/dt = -3y, dy/dt = x$  で与えられる 2 次元線型力学系における摂動の振舞い. (a) 相空間内の軌道. 原点 (白丸) は定常解. 実線および破線矢印の二つの初期値からの時間発展. 一般に, 解軌道は点線で示すような楕円 (の一部) である. (b) (a) に示した二つの時間発展に伴う摂動の振幅  $A$  の変化. (c) (b) で積分時間を長く続けた場合.

両辺に左から  $f_i(\tau)^t$  をかけて,  $\|f_i(\tau)\| = 1$  を使うと, 最終的に次を得る:

$$\lambda_i(\tau) = \frac{1}{\tau} \log \|M(\tau) f_i(\tau)\|. \tag{11.37}$$

ここで,  $\tau \rightarrow \infty$  の極限をとれば, 一般の場合のリアプノフ (Lyapunov) 指数に一致するので,  $\lambda_i(\tau)$  を有限評価期間リアプノフ指数,  $f_i(\tau)$  を有限評価期間リアプノフベクトルと呼ぶ.  $\lambda_i > 0$  であれば,  $f_i$  方向に離れた摂動は評価時間  $\tau$  に対して指数関数的に増大することになる. 先ほどの楕円体の主軸との関連は,

$$\Gamma_i(\tau) = e^{2\lambda_i(\tau)\tau}, \tag{11.38}$$

$$e^{\lambda_i(\tau)\tau} \zeta_i(\tau) = M(\tau) f_i(\tau). \tag{11.39}$$

であり, 有限評価期間リアプノフベクトル  $f_i(\tau)$  は評価時間  $\tau$  後に誤差楕円体の主軸方向  $\zeta_i(\tau)$  を向くベクトルで, 等方的ランダム初期誤差の適当な正規直交基底であることがわかる.

非線型な系では, ヤコビアン行列  $J$  が, 解軌道に依存する. 解軌道自体は, 初期値を決めれば一意に定まるので, 写像  $M$  は, 評価時間  $\tau$  に加えて初期値  $x(t_0)$  に依存することになる. また, 定常解のまわりだけでなく, 時間的に変化する解の安定性も同様にして同様に調べることができる. このような安定性解析をまとめてリアプノフ安定性解析という.

### 11.5.4 有限評価期間では「不安定」な例

一般に、リアプノフ安定性解析は、線型安定性解析 (固有値解析) を時間依存する系に拡張したものではない。ここでの有限評価期間に対するリアプノフ指数に基づく安定性は、固有値解析とは異なるものである。両者の違いをみるために、第 11.5.2 節の 2 次元線型力学系に戻って考えよう。

$\text{tr}(J) = 0$ ,  $\det(J) > 0$  の場合、 $J$  の固有値は純虚数となり、摂動は時間とともに振動するだけである (中立な渦心点)。2 次元線型力学系の場合には、適当な座標変換により、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (11.40)$$

と書ける系である。具体例として、図 11.3(a) の渦心点を考えよう。初期値として実線矢印のように摂動を与えると、ある期間 (振動周期  $2\pi/\sigma_i$  の  $1/4$  の期間)、振幅が増大する (図 11.3(b))。つまり、このように限定された期間に対して、初期値をこのように選ぶと定常解は「不安定」であるといえる。一方、初期摂動を破線矢印のように与えると、それは最初減衰する。これがリアプノフ安定性を有限評価期間に対して定義し直した有限期間リアプノフ安定性の例示である。一般に、前述の方法によって、ある与えられた有限評価期間に最大発達する摂動を求めることができる。もっとも、評価時間を十分に長くとってやれば、摂動は時間とともに振動するだけ (図 11.3(c)) なので、この定常解は中立であり、固有値解析の結果と矛盾しない。

## 11.6 固有値問題と初期値問題

前節で紹介した有限期間リアプノフ安定性の問題を不安定の初期値問題ということがある。ヤコビアン行列  $J$  の固有ベクトルは一般に直交していないので、初期値をうまく選んでやると、最大不安定固有値に属する固有ベクトル (固有モード) よりも初期段階ではより急激に増幅する摂動が存在する。もっとも、十分に時間が経てば、指数関数的に増幅する固有モードに勝るものはないので、後者が支配的となる。結局、固有値問題 (固有値解析) では、無限小の摂動、つまり、無限大の評価時間に対して定常解の安定性を評価していることになる。これに対して、初期値問題 (有限期間リアプノフ安定性解析) では、線型化できる程度に小さな摂動が、ある有限評価時間内にどう発達するかを調べていることになる。

流体力学における流れの安定性解析に関する教科書として、巽・後藤 (1976) がある。この教科書では、線型安定性理論のはじめのところで、この問題では固有値問題と初期値問題の二つ枠組みがあると述べられている。基礎方程式が偏微分方程式系からなる問題で、ラプラス変換により具体的に摂動に対する境界値・初期値問題を解くか、摂動に対して幾つかの条件を課して固有値問題に持ち込むか、の違いである。固有値問題が安定性解析のすべてではないことを覚えておこう。

気象力学の分野に置いて、流れの安定性問題は固有値問題に帰着させて解くのが普通であった。近年、最適励起問題 (optimal excitation problem) という呼び名で、有限期間リアプノフ安定性解析が行なわれるようになってきた。例えば、温帯低気圧の成因は南北に温度差のある東西一様流の不安定性 (傾圧不安定性) であるとされ、従来、固有値問題として調べられてきた (後章参照)。しかし、現実に存在する個々の低気圧の発達は、あるときに与えられた「初期値」がどれだけ発達するか最適励起問題として考えるべきであるという指摘 (Farrell, 1988, 1989) も出てきた。評価時間  $\tau$  というパラメータが増えて綺麗でないが、現実の低気圧のように人為的に摂動を無限小にできない場合の安定性解析には有効であろう。

## 参考文献

- Farrell, B.F., 1988: Optimal excitation of neutral Rossby waves. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 163–172.
- 1989: Optimal excitation of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1193–1206.
- Lorenz, E.N., 1965: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, **17**, 321–333.
- 野村 真佐子, 1991: 予測誤差の時間的・空間的変動に関する理論的研究. 京都大学大学院理学研究科 修士論文, 56pp.
- スメール, ハーシュ(田村 一郎 他 訳), 1976: 力学系入門, 岩波書店, 388pp.
- 巽 友正・後藤 金英, 1976: 「流れの安定性理論」, 数理解析とその周辺 13, 産業図書, 275pp.
- 余田 成男・木本 昌秀・向川 均・野村 真佐子, 1992: カオスと数値予報 —局所的リアプノフ安定性と予測可能性—. *天気*, **39**, 593-604.



## 第12章 熱対流

重力場の中に置かれたある深さの粘性流体を考える。これを下端で加熱し上端で冷却すると、静力学的に不安定な状況となる。浮力の効果が粘性の効果よりも勝れば対流運動が生じる。流体運動を通して熱エネルギーが下端から上端へと輸送されることになる。一方、熱伝導の状態ではマクロな運動は生じず、分子運動によって熱エネルギーが運ばれている。両者の熱輸送形態は対照的である。

大気中では、このような熱対流がまさに「対流圏」で起こっている。太陽から放射されたエネルギーの多くは途中で反射・吸収されることなく地表面に到達し、そこを加熱する。この入射したエネルギーはさまざまなエネルギーに変換され、輸送されて、最終的には大気上端から赤外放射（熱放射）として宇宙空間に射出される。地球系に入るエネルギーと出ていくエネルギーがほとんど釣り合っており、ほぼ平衡した状態つまり「気候」が維持されている。対流は地表面から対流圏界面へと熱エネルギーを運ぶ主要な形態の一つである。

海洋の場合、基本的には上端の海面付近で加熱されるので、不安定成層になりにくい。しかし、夜間には冷却が上端から起こるので不安定になりうるし、海面からの蒸発が盛んであれば高塩分の海水となりやはり不安定な状況となる。海洋の深層水はおもに北大西洋で形成されるが、それは基本的に対流過程によって沈み込んでいく。

ここでは、まず実験室に立ち戻り、ある理想的な条件下での対流運動を流れの安定性という視点から考察する。そして、関連する室内実験や数値実験、大気海洋の現象について触れる。

### 12.1 支配方程式系

重力場  $g$  の中に置かれた動粘性率が  $\nu$  の粘性流体を考える。速度を  $u$ 、密度を  $\rho$ 、圧力を  $p$  として、運動方程式は次である：

$$\frac{Du}{Dt} = g - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta u. \quad (12.1)$$

ここで、 $D/Dt$  はラグランジュ微分である。また、連続方程式は次である：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} u = 0. \quad (12.2)$$

エネルギー方程式は、熱伝導率を  $\kappa$  (=一定) として熱伝導の効果を陽に考える：

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \Delta T. \quad (12.3)$$

そして、流体の状態方程式は液体を念頭に置いて  $\rho = \rho(T)$  とし、体積膨張率を  $\gamma (> 0)$  とおいて次のようにする：

$$\rho = \rho_0 \{1 - \gamma(T - T_0)\}. \quad (12.4)$$

(12.1), (12.2), (12.3), (12.4) は従属変数  $(u, \rho, p, T)$  で閉じており, これらを支配方程式系とする.

運動の境界条件としては, 上端  $(z = D)$ , 下端  $(z = 0)$  とともにスリップ (摩擦応力が 0) する固定面とする:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0. \quad (12.5)$$

ここで,  $w = 0$  は, 流体が境界を通して出入りしないという運動学的条件である. また, 熱の境界条件としては,

$$\left. \begin{array}{l} \text{上端 } (z = D) : T = T_T, \\ \text{下端 } (z = 0) : T = T_B, \end{array} \right\} \quad (12.6)$$

として, それぞれの温度が一定の値に維持されるとする. 大きな熱溜に接している状況に相当する. さらに, 横方向の境界は深さに対して十分遠くにあるとして, 無限遠方に置く.

## 12.2 定常熱伝導解

まず, 流れがなく  $(u = 0)$ , 定常  $(D/Dt = 0)$  な熱伝導解を求める. この解を  $\overline{(\cdot)}$  で表すとすると, エネルギー方程式 (12.3) は,

$$\kappa \Delta \overline{T} = 0, \quad (12.7)$$

となる. 境界条件 (12.6) より熱伝導解の温度分布は,

$$\overline{T}(z) = T_B - \frac{T_B - T_T}{D} z, \quad (12.8)$$

となり, 高さ  $z$  の線型関数である. ここで, 上下端の温度差を  $\Delta T \equiv T_B - T_T$  と置く. (微分演算子  $\Delta$  と混同しないように注意すること.) 熱伝導解の領域平均温度  $(T_B + T_T)/2$  を基準温度  $T_0$  として (12.8) を状態方程式 (12.4) に代入すると, 密度分布が次のように得られる:

$$\overline{\rho}(z) = \rho_0 \left\{ 1 + \gamma \Delta T \left( \frac{z}{D} - \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (12.9)$$

状態方程式から明らかであるが, 温度が高さ  $z$  の線型減少関数であれば, 密度は線型増加関数である. また, 運動方程式 (12.1) の鉛直成分は,

$$0 = -g - \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z}, \quad (12.10)$$

となり, 静力学平衡となるので, 圧力分布はこれを上端  $(z = D)$  からある高さ  $z$  まで積分して,

$$\overline{p}(z) - \overline{p}(D) = \rho_0 g \left\{ \left( 1 - \frac{\gamma \Delta T}{2} \right) (D - z) + \frac{\gamma \Delta T}{2D} (D^2 - z^2) \right\}, \quad (12.11)$$

となる. 結局, 定常熱伝導解は, 熱力学的状態変数  $\overline{p}, \overline{\rho}, \overline{T}$  がそれぞれ (12.9), (12.11), (12.8) で与えられ,  $\overline{u} = 0$  となる解である.

## 12.3 熱伝導解の線型安定性

### 12.3.1 擾乱方程式

前節で求めた定常熱伝導解に微小な擾乱を加えて、その時間発展を考える。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \\ p &= \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t) \\ T &= \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}'(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

これらを支配方程式系 (12.1), (12.2), (12.3), (12.4) に代入し、擾乱の 2 次以上の項を無視して線型化する。ただし、運動方程式の鉛直成分の浮力項  $\rho g$  を除いて密度一定 ( $\rho \rightarrow \rho_0$ ) とする、ブシネスク近似を用いる。熱伝導解が (12.8), (12.9), (12.11) で与えられていることを用いて整理すると、最終的に次の擾乱に対する線型化方程式系を得る：

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\gamma T' \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' + \nu \Delta \mathbf{u}', \quad (12.13)$$

$$\text{連続方程式} \quad \text{div} \mathbf{u}' = 0, \quad (12.14)$$

$$\text{エネルギー方程式} \quad \frac{\partial T'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{T}}{dz} = \kappa \Delta T'. \quad (12.15)$$

ただし、運動方程式 (12.13) では、線型化した状態方程式  $\rho' = -\rho_0 \gamma T'$  を用いている。エネルギー方程式 (12.15) に基本場である定常熱伝導解の温度勾配  $d\bar{T}/dz$  が入っている。線型方程式系 (12.13), (12.14), (12.15) は  $(\mathbf{u}', p', T')$  を従属変数として閉じた方程式系となっている。外部パラメータとしては、重力の大きさ  $g \equiv |g|$ 、流体の物性定数  $\rho_0, \nu, \gamma, \kappa$ 、および、基本場の  $d\bar{T}/dz$  である。

運動方程式の水平成分は、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) u' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (12.16)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) v' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (12.17)$$

なので、これの水平発散をとり、連続方程式の

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (12.18)$$

を用いると、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p', \quad (12.19)$$

となる。いっぽう、運動方程式の鉛直成分は、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) w' = \gamma T' g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (12.20)$$

であるので、これらから  $p'$  を消去して、次を得る：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta w' = \gamma g \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T'. \quad (12.21)$$

この式とエネルギー方程式 (12.15) とで、 $(w', T')$  を従属変数とする閉じた方程式系となっている。

### 12.3.2 無次元化

この段階で、各変数の特徴的な大きさでそれぞれを無次元化しておく：

$$\left. \begin{array}{l} \text{次元つき変数} \\ (x, y, z) \\ t \\ w' \\ T' \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{無次元変数} \\ D(x^*, y^*, z^*) \\ (D^2/\kappa)t^* \\ (\kappa/D)w^* \\ (\Delta T)T^* \end{array} \right\} \quad (12.22)$$

ここで、特徴的な空間スケールとして流体の深さ  $D$  をとり、特徴的な時間スケールとして熱伝導の時間スケールをとっている。鉛直速度の特徴的なスケールは深さ  $D$  を時間  $(D^2/\kappa)$  で割ったものであり、温度擾乱の特徴的なスケールは上下端の温度差  $\Delta T$  である。無次元変数  $(x^*, y^*, z^*, t^*), (w^*, T^*)$  は、それぞれ  $O(1)$  の大きさとなっている。

これらを (12.15), (12.21) に代入すると、無次元をあらわす記号  $(\cdot)^*$  を省略して次のようになる：

$$\frac{\partial T}{\partial t} - w = \Delta T, \quad (12.23)$$

$$\left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w = Ra \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T. \quad (12.24)$$

ここで、 $\partial \bar{T} / \partial z = -\Delta T / H$  の関係式を使っている。また、二つの無次元数  $Pr, Ra$  は次のように定義している：

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} : \text{プラントル数}, \quad (12.25)$$

$$Ra \equiv \frac{\gamma g \Delta T D^3}{\kappa \nu} : \text{レイリー数}. \quad (12.26)$$

また、境界条件 (12.5), (12.6) は、上端 ( $z = 1$ ) および下端 ( $z = 0$ ) で次のようになる：

$$\left. \begin{array}{l} \text{スリップ条件} : \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \\ \text{運動学的条件} : w = 0, \\ \text{熱的条件} : T = 0. \end{array} \right\} \quad (12.27)$$

ここで、スリップ条件は連続方程式を  $z$  で微分して得られる。熱的条件は境界で温度の摂動がないということである。

### 12.3.3 指数関数型擾乱

方程式系 (12.23), (12.24) を満たす解として、次の指数関数型擾乱を考える：

$$\begin{pmatrix} w(x, y, z, t) \\ T(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \end{pmatrix} e^{i(kx+ly)+\sigma t} \right]. \quad (12.28)$$

これを (12.23), (12.24) に代入して整理すると、

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 - \sigma \right) \Theta = -W, \quad (12.29)$$

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) W = Ra \alpha^2 \Theta, \quad (12.30)$$

となる。ただし、 $\alpha^2 = k^2 + l^2$  である。さらに、これらから  $\Theta$  を消去すると、最終的に次の  $W$  に対する 6 階の常微分方程式となる：

$$\left\{ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 - \sigma \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) + Ra\alpha^2 \right\} W = 0. \quad (12.31)$$

また、境界条件は上端 ( $z = 1$ ) および下端 ( $z = 0$ ) で次のようになる：

$$\left. \begin{array}{l} \text{スリップ条件} : \frac{d^2 W}{dz^2} = 0, \\ \text{運動学的条件} : W = 0, \\ \text{熱的条件} : \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) W = 0. \end{array} \right\} \quad (12.32)$$

ただし、熱的条件は (12.30) を用いて  $W$  に関する条件に書き直している。

6 階の定係数線型常微分方程式で境界条件が 6 個与えられるから、これらを満たす解が求められるはずである。

### 12.3.4 積分定理

具体的に安定性の解析を行なう前に、前小節の方程式系の性質を調べておく。(12.30) の両辺に  $W$  の複素共役  $W^*$  (以下この章では、 $(\cdot)^*$  は無次元ではなく複素共役を表すことに注意) をかけて  $z = 0$  から  $z = 1$  まで積分する。境界条件 (12.32) を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 W^* \frac{d^2 W}{dz^2} dz &= W^* \frac{dW}{dz} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dW^*}{dz} \frac{dW}{dz} dz, \\ &= - \int_0^1 \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz, \end{aligned} \quad (12.33)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W^* \frac{d^4 W}{dz^4} dz &= W^* \frac{d^3 W}{dz^3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dW^*}{dz} \frac{d^3 W}{dz^3} dz, \\ &= - \frac{dW^*}{dz} \frac{d^2 W}{dz^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d^2 W^*}{dz^2} \frac{d^2 W}{dz^2} dz, \\ &= \int_0^1 \left| \frac{d^2 W}{dz^2} \right|^2 dz, \end{aligned} \quad (12.34)$$

と変形できるので、最終的に次を得る：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \left| \frac{d^2 W}{dz^2} \right|^2 + 2\alpha^2 \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^4 |W|^2 \right) dz + \frac{\sigma}{Pr} \int_0^1 \left( \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |W|^2 \right) dz \\ = Ra\alpha^2 \int_0^1 \Theta W^* dz. \end{aligned} \quad (12.35)$$

同様に、(12.29) の複素共役に  $\Theta$  をかけて  $z = 0$  から  $z = 1$  まで積分すると、

$$\int_0^1 \left( \left| \frac{d\Theta}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |\Theta|^2 \right) dz + \sigma^* \int_0^1 |\Theta|^2 dz = \int_0^1 \Theta W^* dz, \quad (12.36)$$

となる.

(12.35) と (12.36) で右辺の  $\Theta W^*$  の積分項を消去すると次を得る :

$$\int_0^1 \left\{ \left| \frac{d^2 W}{dz^2} \right|^2 + 2\alpha^2 \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^4 |W|^2 - Ra\alpha^2 \left( \left| \frac{d\Theta}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |\Theta|^2 \right) \right\} dz + \frac{\sigma}{Pr} \int_0^1 \left( \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |W|^2 \right) dz - \sigma^* Ra\alpha^2 \int_0^1 |\Theta|^2 dz = 0. \quad (12.37)$$

$\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  として, この式の実部をとると,

$$\int_0^1 \left\{ \left| \frac{d^2 W}{dz^2} \right|^2 + 2\alpha^2 \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^4 |W|^2 - Ra\alpha^2 \left( \left| \frac{d\Theta}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |\Theta|^2 \right) \right\} dz + \sigma_r \left\{ \frac{1}{Pr} \int_0^1 \left( \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |W|^2 \right) dz - Ra\alpha^2 \int_0^1 |\Theta|^2 dz \right\} = 0, \quad (12.38)$$

となる.  $Ra \leq 0$  すなわち  $\Delta T \leq 0$  のとき, 第一項の積分値と第二項の  $\sigma_r$  の係数がともに正となるので,  $\sigma_r < 0$  でなければならない. すなわち,  $Ra \leq 0$  のとき定常熱伝導解が微小な擾乱に対して安定であることが証明できたわけである. パーセル法による直観では“自明”に近いが, 数学的にちゃんとやろうと思えばこのような手続きとなる. 逆に, 熱伝導解が不安定 ( $\sigma_r > 0$ ) であるための必要条件は  $Ra > 0$  である. ただし, これは十分条件ではない.

次に (12.37) の虚部をとると,

$$\sigma_i \left\{ \frac{1}{Pr} \int_0^1 \left( \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 + \alpha^2 |W|^2 \right) dz + Ra\alpha^2 \int_0^1 |\Theta|^2 dz \right\} = 0, \quad (12.39)$$

となる.  $Ra > 0$  のとき  $\{ \}$  内は正であるので,  $\sigma_i = 0$  でなければならない. すなわち, 擾乱が増幅するときには, その水平位相速度が 0 である. したがって, 安定・不安定の臨界状態にある中立擾乱は  $\sigma = 0$  で与えられる. 一般に中立擾乱は  $\sigma_r = 0$  で与えられるが, この場合には実部虚部ともに 0 であることに注意しよう.

### 12.3.5 臨界状態

$\sigma = 0$  として臨界状態の解析をする. この場合, 微分方程式 (12.31) は,

$$\left\{ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right)^3 + Ra\alpha^2 \right\} W = 0, \quad (12.40)$$

となり, 上端 ( $z = 1$ ) および下端 ( $z = 0$ ) での境界条件 (12.32) は, 次のようになる :

$$\left. \begin{array}{l} \text{スリップ条件} : \frac{d^2 W}{dz^2} = 0, \\ \text{運動学的条件} : W = 0, \\ \text{熱的条件} : \frac{d^4 W}{dz^4} = 0. \end{array} \right\} \quad (12.41)$$

ここで, 熱的境界条件は  $(d^2/dz^2 - \alpha^2)^2 W = 0$  より, 上二つの条件を用いている.

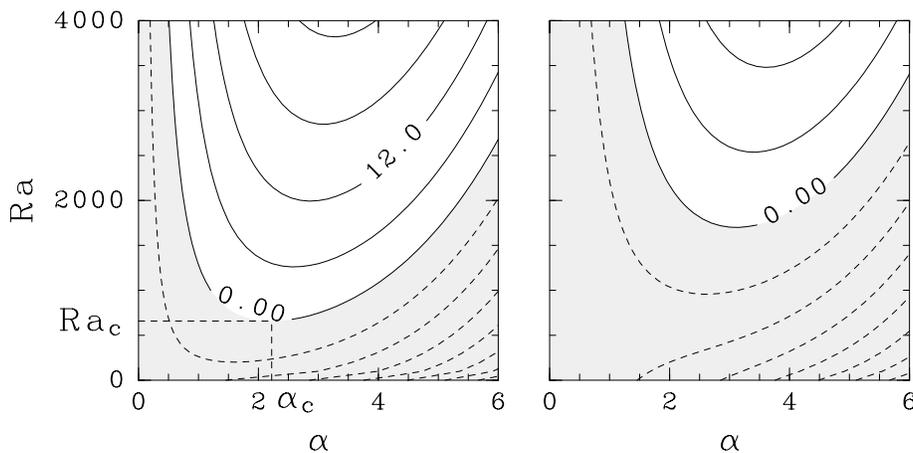


図 12.1: 安定性ダイアグラム. 擾乱の発達率の波数とレイリー数に対する依存性を示したもの. (左) 上下端ともスリップ境界条件, (右) 上下端とも粘着境界条件. 斜線部は擾乱が減衰する領域.

方程式 (12.40) の解で境界条件 (12.41) を満たすものは,

$$W(z) = W_0 \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{12.42}$$

である. これに対応する固有値方程式は,  $-(n^2\pi^2 + \alpha^2)^3 + Ra\alpha^2 = 0$  となり,

$$Ra = \frac{1}{\alpha^2}(n^2\pi^2 + \alpha^2)^3, \tag{12.43}$$

で臨界状態となるレイリー数が水平波数  $\alpha$  の関数として与えられる. 横方向の境界を無限遠にとっているため, 水平波数は離散的にならない. このような臨界状態のうち最小のレイリー数を与えるものを臨界レイリー数という.

$$\frac{dRa}{d\alpha} = \frac{2}{\alpha^3}(n^2\pi^2 + \alpha^2)^2(2\alpha^2 - n^2\pi^2), \tag{12.44}$$

なので, 臨界波数が  $n = 1$  に対して  $\alpha_c = \pi/\sqrt{2} = 2.22$  となり, 臨界レイリー数は  $Ra_c = \frac{2}{\pi^2}(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2})^3 = \frac{27}{4}\pi^4 = 657.5$  で与えられる.

同様に, 上下端とも粘着条件 ( $u = v = w = 0$ ) で臨界レイリー数を求めることができる. この場合には,  $\alpha_c = 3.12$ ,  $Ra_c = 1708$  となり, スリップ条件の場合よりも大きな臨界レイリー数となる.

図 12.1 はスリップ条件および粘着条件で固有値問題を解き, 擾乱の発達率  $\sigma_r$  の波数およびレイリー数に対する依存性を示したものである. 斜線部は  $\sigma_r < 0$  であり, 擾乱が発達しないパラメータ領域である.  $Ra < Ra_c$  ならば, どんな波数の擾乱も発達せず熱伝導解は安定に存在する. これに対して,  $\sigma_r = 0$  の臨界曲線より上では熱伝導解が不安定であり, 対流が生じると予測できる. 実際に, 熱対流の室内実験でレイリー数 (上下端の温度差  $\Delta T$ ) を徐々に上げていくと, このような理論値に近いところで対流が始まり, 出現した対流の水平波数も理論値に近いものとなる.

### 12.3.6 擾乱の構造

臨界レイリー数を与える鉛直速度の擾乱は  $n = 1$  より,

$$w(x, y, z, t) = \text{Re}[W_0 \sin \pi z e^{i(kx+ly)}] \quad (12.45)$$

である. 方程式 (12.30) で  $\sigma = 0$  とし, この解を代入すると,

$$\Theta = \frac{(\pi^2 + \alpha^2)^2}{Ra\alpha^2} W_0 \sin \pi z, \quad (12.46)$$

となるので, 温度擾乱は

$$T(x, y, z, t) = \frac{(\pi^2 + \alpha^2)^2}{Ra\alpha^2} w(x, y, z, t), \quad (12.47)$$

となる. これより, 臨界状態では  $T$  と  $w$  が同位相であることがわかる. すなわち, 上昇域は高温であり, 下降域は低温である.

同様に, 臨界状態での圧力や水平速度場の位相関係を求めることができる. 結果だけをまとめて書くと次になる:

$$u = \frac{k\pi}{\alpha^2} \cos \pi z \text{Re}[iW_0 e^{i(kx+ly)}], \quad (12.48)$$

$$v = \frac{l\pi}{\alpha^2} \cos \pi z \text{Re}[iW_0 e^{i(kx+ly)}], \quad (12.49)$$

$$w = \sin \pi z \text{Re}[W_0 e^{i(kx+ly)}], \quad (12.50)$$

$$\rho = -\frac{\rho_0 \gamma (\alpha^2 + \pi^2)^2}{Ra\alpha^2} \sin \pi z \text{Re}[W_0 e^{i(kx+ly)}], \quad (12.51)$$

$$p = -\frac{\rho_0 \nu (\alpha^2 + \pi^2) \pi}{\alpha^2} \cos \pi z \text{Re}[W_0 e^{i(kx+ly)}], \quad (12.52)$$

$$T = \frac{(\alpha^2 + \pi^2)^2}{Ra\alpha^2} \sin \pi z \text{Re}[W_0 e^{i(kx+ly)}]. \quad (12.53)$$

臨界状態での擾乱の空間パターンを考えてみる. 臨海波数は  $\alpha = \sqrt{k^2 + l^2}$  が与えられるだけなので, 線型解析では  $k, l$  まで一意的に決まらない. また, 単純な格子状の解に加えて, よく知られた六角形の蜂の巣状の解とともに可能であり, 空間パターンについて何重にも縮退していることになる. また, 位相の任意性もあるので, 並進と回転に対しても縮退している. 水平に無限の境界条件ではなく有限容器を考えれば並進に対する縮退は解けるが, 円筒容器の場合などでは回転に対する縮退が残る. 具体的に縮退を解くには非線型定常解を求めてそれらの安定性を調べなければならない.

擾乱の空間構造を具体的にイメージするために, 簡単な例としてロール状対流を考える.  $l = 0$  として  $y$  方向の構造がない鉛直 2 次元の構造を求めると,  $W_0, T_0$  を正の実数として,

$$\begin{aligned} u &= -(\pi/k)W_0 \cos \pi z \sin kx, \\ w &= W_0 \sin \pi z \cos kx, \\ T &= T_0 \sin \pi z \cos kx, \\ \rho &= -\rho_0 \gamma T_0 \sin \pi z \cos kx, \end{aligned} \quad (12.54)$$

である. この構造を模式的に図 12.2 に示す. 高温で密度の低い部分が上昇し, 低温で密度の高い部分が下降している. このような運動によって流体のもつ位置エネルギーが減少し, その分が対流の運動エネルギーに変換している. また,  $u$  と  $w$  の位相関係は連続方程式の通りで, 下層で水平収束があるところで上昇流となり, その上層では水平発散となっている.

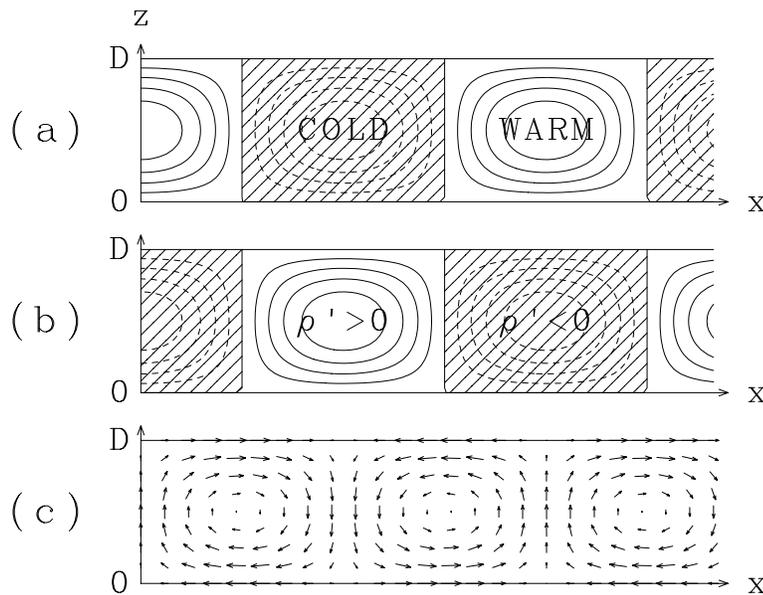


図 12.2: 鉛直 2 次元ロール状対流の模式図 (スリップ条件). (a) 温度の擾乱成分, (b) 密度の擾乱成分, (c) 流れ.

## 12.4 室内実験・大気海洋現象

レイリー理論の室内実験による検証は、古くより行なわれてきた。対流の発生する臨界値を調べるだけでなく、幅広いパラメータ領域でどのような空間・時間構造の対流運動が生じるかが調べられている。具体的には、浅井 (1983) や木村 (1983) を参照のこと。ここにまとめた内容よりもさらに理論的な扱いは巽・後藤 (1976) にある。

現実大気の大気への応用を考える場合には、いくつか留意すべき点がある。まず、熱源と冷源であるが、熱エネルギーの流入は、おもに下端境界からのフラックス、流出は大気から宇宙空間への熱輻射であり、温度を一定値に固定したいまの境界条件通りではない。境界層の過程や大気輻射をちゃんと考えないといけない。また、対流の時間スケールによっては地球の回転効果が効いてくる場合もある。積極的に、回転系での熱対流を考える必要もある。さらに、忘れてはならないのは、水蒸気を含んだ大気の大気では、雲ができることである。雲ができれば、凝結熱の放出により、運動場に大きなフィードバックがかかる。積雲対流、湿潤対流などの言葉で語られる話題である。積雲対流の組織化など、ドライな対流とは大きく異なる運動形態になることが多い。大気の大気に関する最近の教科書として、Emanuel(1994) を挙げておく。

海洋中での対流は、この章で解析したような単純な熱対流ではない。河口付近では真水に近いし、蒸発や氷結の盛んな所では塩分濃度が高い。温度と組成比 (塩分濃度) で密度が決まり、その分布によって対流が起る。大気での温位 (potential temperature) に対応する量としてポテンシャル密度 (potential density) を定義し、静的安定度の診断に使うことがある (Gill, 1982; 第 3.7.5 節)。また、このような対流によって駆動される深層循環を熱塩循環という。

## 参考文献

- 浅井 富雄, 1983: 「大気対流の科学」, 気象学のプロムナード 14, 東京堂出版, 220pp.
- Emanuel, K.A., 1994: *Atmospheric Convection*, Oxford Univ. Press, 580pp.
- Gill, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, 662pp.
- 木村 竜治, 1983: 「地球流体力学入門」, 気象学のプロムナード 13, 東京堂出版, 247pp.
- 巽 友正・後藤 金英, 1976: 「流れの安定性理論」, 数理解析とその周辺 13, 産業図書, 275pp.

# 第13章 順圧不安定

第8章でみたように安定密度成層した場では浮力を復元力とする重力波が存在し、他方、第12章でみたように不安定成層の場合には不安定を解消するために対流が生じる。また、第9章では絶対渦度保存則を束縛とする波動のロスビー波を考えたが、ここでは、それに対応する枠組みで不安定になりうる状況を考える。回転球面上の2次元非圧縮流体で回転軸対称な基本帯状流は、その緯度構造に依存して安定な場合と不安定な場合とがある。このように基本流の絶対渦度の水平分布に依存した流れの不安定性を順圧不安定 (barotropic instability) という。

成層圏の東進口ロスビー波や熱帯域の偏東風波動など、大気中には流れの順圧不安定に起因すると考えられる波動擾乱が存在する。

## 13.1 支配方程式

第9.4.1節で導入した中緯度  $\beta$  平面上 ( $f = f_0 + \beta y$ ) での2次元非圧縮流体運動を考える。 $\beta$  平面近似をした渦度方程式は (9.42) で与えられる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

ここで、 $t$  は時刻、 $(x, y)$  はそれぞれ、東向き、北向きの空間座標 (直交直線座標系) であり、2次元ラプラシアンを  $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、2次元ヤコビアンを  $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$  と表記している。これは流線関数  $\psi(x, y, t)$  について閉じた方程式である。水平速度  $(u, v)$  は流線関数より、

$$(u, v) = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (13.2)$$

で与えられる。相対渦度を  $\zeta \equiv \Delta_2 \psi$ 、絶対渦度を  $q \equiv \zeta + f_0 + \beta y$  とすると、上の渦度方程式は、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(x, y)} = \frac{Dq}{Dt} = 0, \quad (13.3)$$

となり、絶対渦度が流れとともに保存されるラグランジュ的な保存量となる。

境界条件としては、 $x$  方向には長さ  $L$  で周期境界とし、 $y$  方向には  $y = \pm W/2$  にスリップする壁を置く：

$$\left. \begin{array}{l} \text{東西} : \psi(x, y, t) = \psi(x + L, y, t), \\ \text{南北} : v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = \pm W/2, \end{array} \right\} \quad (13.4)$$

## 13.2 帯状流の線型安定性

東西方向に流れる流れを帯状流 (zonal flow) という。帯状流が東西に構造をもたなければ、それは支配方程式 (13.1) の定常解となっている。これを基本解として、流れの安定性解析を行なう。すなわち、積分定理を求め、固有値解析を行なうことにする。

### 13.2.1 基本場：南北 1 次元定常帯状流

東西方向に構造を持たない南北 1 次元の定常な帯状流  $\bar{\psi}(y)$  は、支配方程式 (13.1) の解となっている。この解を基本場として、その安定性を解析する。基本場の速度と絶対渦度は、

$$\bar{u}(y) = -\frac{d\bar{\psi}}{dy}, \quad (13.5)$$

$$\bar{v} = 0, \quad (13.6)$$

$$\bar{q} = -\frac{d\bar{u}}{dy} + f_0 + \beta y = \frac{d^2\bar{\psi}}{dy^2} + f_0 + \beta y, \quad (13.7)$$

である。

### 13.2.2 擾乱方程式

南北 1 次元の定常帯状流  $\bar{\psi}(y)$  を基本場として、それに加えた微小な擾乱  $\psi'(x, y, t)$  の時間発展を考える。 $\psi(x, y, t) = \bar{\psi}(y) + \psi'(x, y, t)$  を (13.1) に代入し、擾乱の 2 次の項を無視して線型化する：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_2 \psi' + \left( \beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (13.8)$$

ここで、

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re} \left[ \Psi(y) e^{ik(x-ct)} \right], \quad (13.9)$$

という型の正弦波解を仮定すると、 $\Psi(y)$  に対する微分方程式が次のよう得られる：

$$(\bar{u} - c) \left( \frac{d^2\Psi}{dy^2} - k^2\Psi \right) + \frac{d\bar{q}}{dy} \Psi = 0. \quad (13.10)$$

ただし、 $d\bar{q}/dy = \beta - d^2\bar{u}/dy^2$  である。

境界条件 (13.4) は擾乱に対して、

$$\left. \begin{array}{l} \text{東西} : k = 2\pi n/L, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \text{南北} : \Psi(-W/2) = \Psi(W/2) = 0, \end{array} \right\} \quad (13.11)$$

となる。

2 階線形常微分方程式 (13.10) は  $\Psi$  に対して  $y = \pm W/2$  での (2 つの) 境界条件 (13.11) を与えることで、固有値を  $c$  とする固有値問題とみなすことができる。 $c = c_r + ic_i$  ( $c_r, c_i$  は実数) として、 $k > 0$  の場合には

(13.9) の時間依存性より,

$$\begin{cases} c_i < 0 & \text{安定,} \\ c_i = 0 & \text{中立,} \\ c_i > 0 & \text{不安定,} \end{cases} \quad (13.12)$$

と,  $c_i$  の符号により基本場の安定性を判断できる.

### 13.2.3 積分定理

(13.10) の両辺を  $-(\bar{u} - c)$  で割り,  $\Psi$  の複素共役  $\Psi^*$  をかけて, 南北に積分する.  $y = \pm W/2$  での境界条件を用いると,

$$\int_{-W/2}^{W/2} \left( \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{\bar{u} - c} \frac{d\bar{q}}{dy} dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} (\bar{u} - c^*) dy, \quad (13.13)$$

となる.  $c = c_r + ic_i$  として, この両辺の虚部をとると,

$$0 = c_i \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} dy, \quad (13.14)$$

となる. これより,  $-W/2 \leq y \leq W/2$  で  $d\bar{q}/dy \neq 0$  ならば, すなわち, 絶対渦度  $\bar{q}$  が  $y$  の単調な関数であるならば, この基本場は中立 ( $c_i = 0$ ) である. つまり, 不安定 ( $c_i > 0$ ) となる必要条件是「基本場の絶対渦度の緯度微分  $d\bar{q}/dy$  が領域 ( $-W/2 \leq y \leq W/2$ ) 内で符号を変える」として与えられる. このような基本流が不安定となる必要条件是, 静止系ではレイリー (Rayleigh), 回転系ではクオ (Kuo) によって導かれたので, レイリー-クオの条件と呼ばれている. また, この条件が満たされて生じ得る不安定は順圧不安定 (barotropic instability) またはシア-不安定 (shear instability) と呼ばれている.

図 13.1 はレイリー-クオの条件で安定性が判別できる順圧流である. 線型シア- (上段) の場合,  $\bar{q} = \beta =$  一定なので  $c_i = 0$  でなければならず, 安定 (中立安定) の十分条件を満たしている. (中段) のような余弦関数型ジェットの場合にも, 絶対渦度  $\bar{q}$  は単調増大関数であり中立安定である. 一方, 同じ余弦関数型ジェットの場合でも (下段) の例では,  $d\bar{q}/dy$  が領域内で符号を変えるので, 基本流が不安定となる必要条件を満たしている. 実際に固有値解析をすると, この流れが不安定であることがわかる.

つぎに, (13.13) の両辺の実部をとると,

$$\int_{-W/2}^{W/2} \left( \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} (\bar{u} - c_r) dy, \quad (13.15)$$

となり, 不安定 ( $c_i > 0$ ) の場合, これは (13.14) を用いて,

$$\int_{-W/2}^{W/2} \left( \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} \bar{u} dy, \quad (13.16)$$

と書き直せる. すなわち, レイリー-クオの条件とは別に, 不安定の必要条件として (13.16) 式の左辺が正であることを課することができる. つまり, 「 $\frac{d\bar{q}}{dy} \bar{u} > 0$  となる領域が存在しなければならない」という条件である. 別の言い方をすれば, 基本場の絶対渦度勾配と速度とが基本的に正の相関にあるという条件である. この不安定の必要条件是フヨルトフト (Fjörtoft) の条件と呼ばれている. フヨルトフトの条件が満たされて

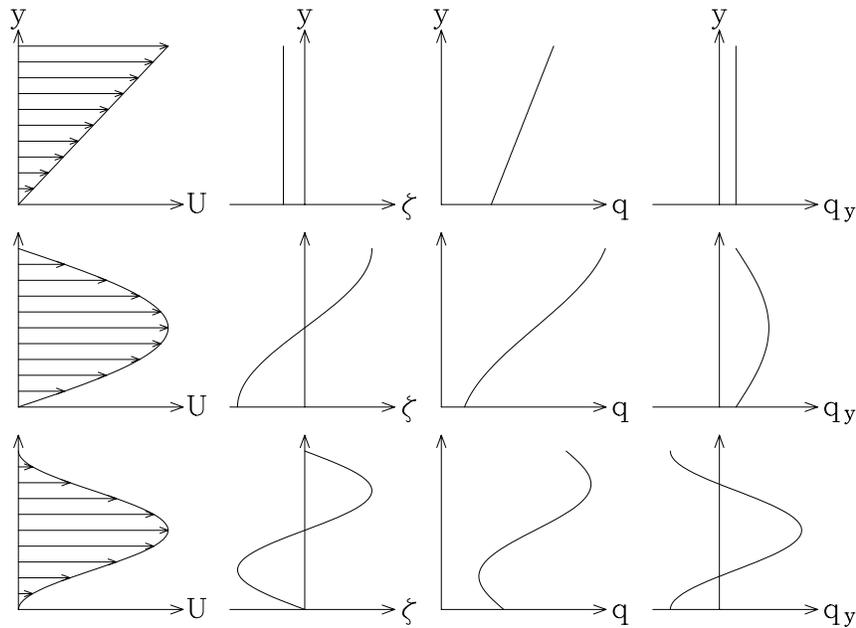


図 13.1: レイリー-クオの条件で判別できる順圧安定な流れ(上・中段)と不安定の可能性がある流れ(下段)の例. (上段)  $\bar{u}(y) = ay + b$ , (中段)  $\bar{u}(y) = a \cos(\pi y/W) + b$ , (下段)  $\bar{u}(y) = a \cos(2\pi y/W) + b$ .

いればレイリー-クオの条件も自動的に満たされているので、フョルトフトの条件のほうがレイリー-クオの条件よりも厳しい条件である.

図 13.2 に示す速度プロファイルはどれも  $d\bar{q}/dy$  が領域内で符号を変えるので、レイリー-クオの不安定条件を満たしている. ところが, (上段) の流れはどこでも  $\frac{d\bar{q}}{dy}\bar{u} \leq 0$  であり, (13.16) の条件を満たさないので安定である. 一方, (中・下段) の例はフョルトフトの条件も満たしており, 不安定である可能性がある. (下段) の  $\tanh$  関数で  $b$  を大きくすると点線で示す階段型の関数(渦シートプロファイル; vortex sheet profile)になるが, これはシア-不安定な流れの典型として知られている.

### 13.2.4 固有値問題: 2点折れ線モデル

具体的に基本場  $\bar{u}$  が与えられた場合には, 固有値問題を解いて線形安定性解析を行なうことになる. 複雑な流れの場合には, 差分近似などにより数値的に固有値・固有関数を求めることになるが, 簡単な流れの場合には手解析で固有値・固有関数を求めることができる.

具体例として,  $\beta = 0, W = \infty (-\infty < y < +\infty)$  の状況で, 基本場が

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} +1 & (+1 < y < +\infty) & : \text{領域 1} \\ y & (-1 \leq y \leq +1) & : \text{領域 2} \\ -1 & (-\infty < y < -1) & : \text{領域 3} \end{cases} \quad (13.17)$$

で与えられるときの流れの安定性を調べよう(石岡, 1994).

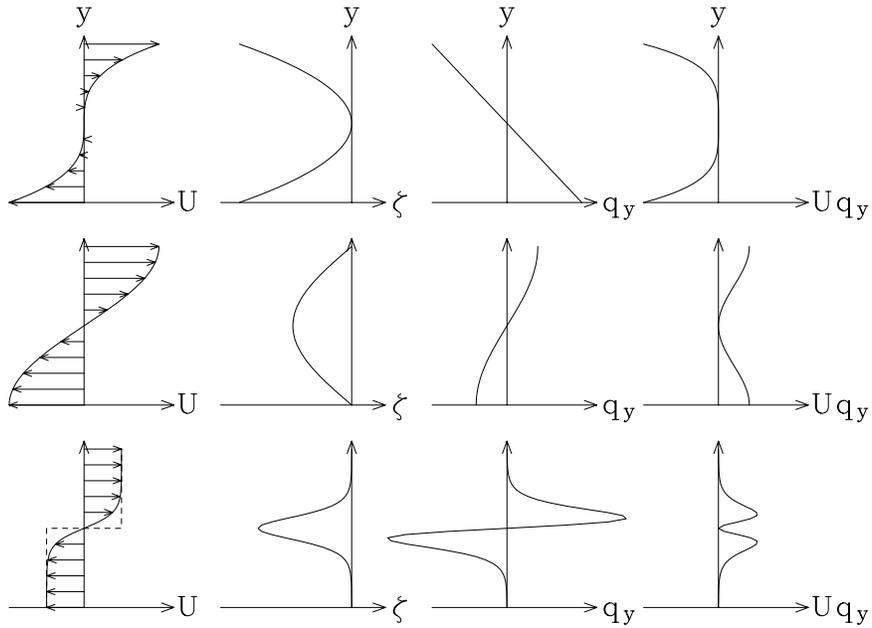


図 13.2: フヨルトフトの条件で判別できる順圧安定な流れ (上段) と不安定の可能性がある流れ (中・下段) の例. (上段)  $\bar{u}(y) = ay^3 + b$ , (中段)  $\bar{u}(y) = a \sin(\pi y/W) + b$ , (下段)  $\bar{u}(y) = a \tanh(by) + c$ . ただし,  $f = 0$  (非回転系) とした.

まず, 解くべき微分方程式 (13.10) で  $\beta = 0$  とすると,

$$(\bar{u}(y) - c) \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi \right) - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \Psi = 0, \quad (13.18)$$

となる. 各領域内では  $d^2 \bar{u}/dy^2 = 0$  であるから,  $\bar{u} - c \neq 0$  とすると, (13.18) 式は以下のように簡単になる:

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi = 0. \quad (13.19)$$

境界条件は,  $W = \pm\infty$  で擾乱の振幅が 0 であるとする:

$$\Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0. \quad (13.20)$$

また,  $\bar{u}(y)$  の折れ目 ( $y = \pm 1$ ) での解の接続の条件は,  $\Psi(y)$  の連続性により,

$$[\Psi(y)]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (13.21)$$

となる. また, (13.18) の  $y$  微分を差分で置き換えることにより,

$$(\bar{u}(y) - c) \left( (2\epsilon)^{-1} \left[ \frac{d\Psi}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} - k^2 \Psi(y) \right) - (2\epsilon)^{-1} \left[ \frac{d\bar{u}}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \Psi(y) = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (13.22)$$

と書けるので,  $d\Psi(y)/dy$  の接続条件は,

$$(\bar{u}(y) - c) \left[ \frac{d\Psi}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} - \Psi(y) \left[ \frac{d\bar{u}}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (13.23)$$

となる.

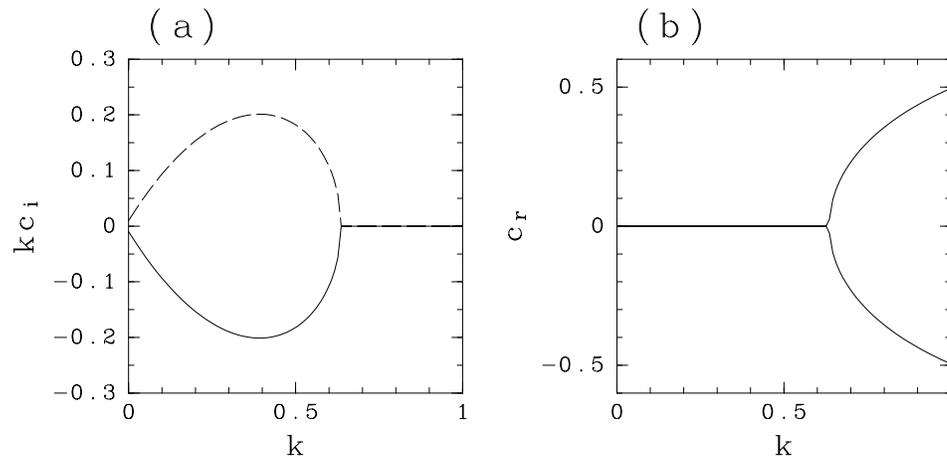


図 13.3: 2 点折れ線モデルの安定性解析. (a) 擾乱の発達率,  $kc_i$ ; (b) 擾乱の位相速度  $c_r$ .

微分方程式 (13.19) より, 各領域での解  $\Psi(y)$  は,

$$\Psi(y) = \begin{cases} A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky}, & (+1 < y < +\infty) : \text{領域 1} \\ A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}, & (-1 \leq y \leq +1) : \text{領域 2} \\ A_3 e^{ky} + B_3 e^{-ky}, & (-\infty < y < -1) : \text{領域 3} \end{cases} \quad (13.24)$$

とおける. ここで,  $k > 0$  とする. 境界条件 (13.20) および接続条件 (13.21), (13.23) を用いて, 自明でない解が存在するとすると, 固有値  $c$  が次のように求められる:

$$c^2 = \frac{(1 - 2k)^2 - e^{-4k}}{4k^2}. \quad (13.25)$$

擾乱は,  $\psi'(x, y, t) = \text{Re} [\Psi(y) e^{ik(x-ct)}] = \text{Re} [\Psi(y) e^{ik(x-c_r t)} \times e^{ikc_i t}]$  であるから, その発達率 (増幅率) は  $kc_i$  であり, 位相速度は  $c_r$  である. 固有値を与える (13.25) 式より, 擾乱の発達率と位相速度を波数  $k$  の関数として求めたのが図 13.3 である. この基本流は,  $k < k_c \simeq 0.635$  の短波数 (長波長) の擾乱に対して不安定であり,  $k = 0.4$  の擾乱が最大発達をする. このような基本流の不安定性により発達する擾乱を不安定擾乱または不安定波という. 今の場合, 不安定擾乱の位相速度は 0 である. これに対して,  $k > k_c$  の擾乱は中立であり, 正または負の位相速度をもつ.

(13.25) 式が成立している場合に対して, 各固有値に対応する固有関数  $\Psi(y)$  は,  $A_n, B_n (n = 1, 2, 3)$  の関係を求めることによって与えられる. 求められた  $\Psi(y)$  を式 (13.9) に代入すると, 各擾乱の空間構造を求めることができる. 図 13.4 に幾つかの例を示す. (左上) は最も不安定な擾乱である. シアーのある  $-1 \leq y \leq +1$  の領域で, その位相が基本流のシアーと逆の向きに傾いているのが特徴である. これに対して (左下) は安定な擾乱で, ちょうど不安定擾乱を東西に折り返した構造になっている. 右の 2 例は中立擾乱の対で, 上は東進 ( $c_r > 0$ ) し, 下は西進 ( $c_r < 0$ ) する. 中立擾乱の位相は南北に変化せず,  $y = +1$  または  $y = -1$  付近で振幅が最大である. 近年, このような解析の発展として, 不安定問題を二つの中立波の共鳴として捉える考え方が提案されている (Sakai, 1989; 伊賀, 1996). つまり,  $y = +1$  と  $y = -1$  付近に存在する二つの中立波の位相速度が近い値になると, 相互に影響を及ぼしあって共鳴的に増幅するようになる.

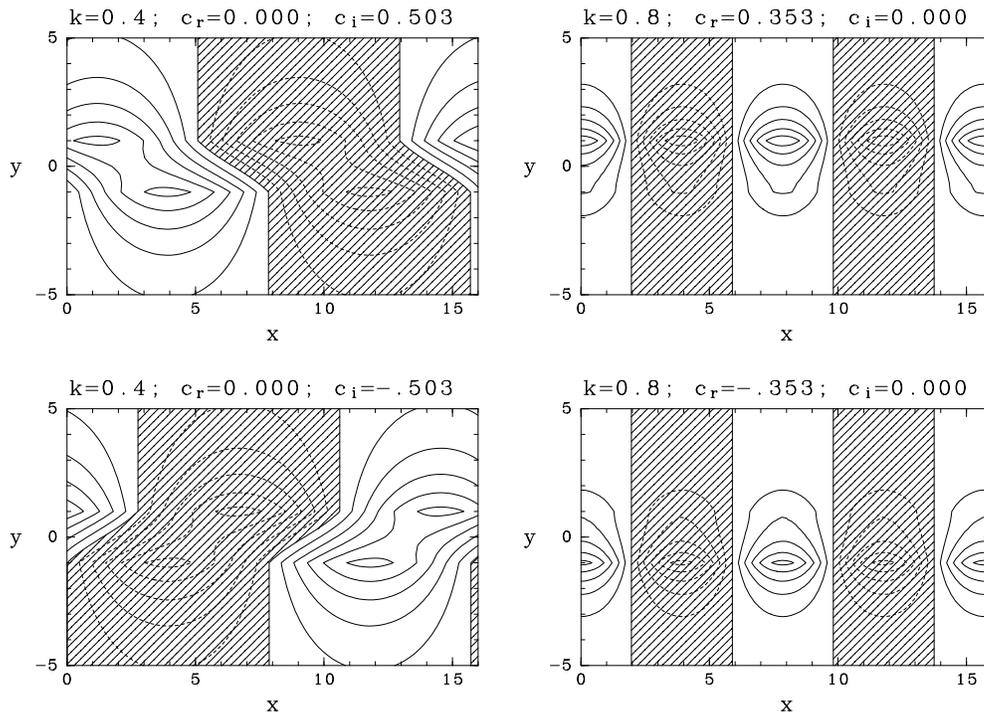


図 13.4: 2点折れ線モデルの固有関数. (左上) 不安定擾乱, (左下) 安定擾乱, (右) 中立擾乱.

不安定擾乱の位相の傾きより, この擾乱に伴う運動量フラックスを推定することができる:

$$\overline{u'v'} = \int_0^{2\pi/k} u'v' dx = \int_0^{2\pi/k} -\frac{\partial\psi'}{\partial y} \frac{\partial\psi'}{\partial x} dx, \quad (13.26)$$

であり,  $-1 \leq y \leq +1$  の領域では擾乱の位相が北西-南東の向きに傾いているので, 基本的に  $\partial\psi'/\partial y$  と  $\partial\psi'/\partial x$  は正相関である. つまり, この領域では運動量フラックスが負であり,  $y = \pm 1$  より外側では 0 なので,  $y = +1$  付近では運動量フラックスの発散,  $y = -1$  付近では収束があることになる. 結局, 不安定擾乱に伴う運動量フラックスの発散・収束は, 基本流のシアを弱めるように働いている. 基本流が不安定な場合に発達する擾乱は, その不安定性を解消するように働く空間構造となっている.

### 13.3 順圧不安定に関するエネルギー論

Charney(1973) p.248

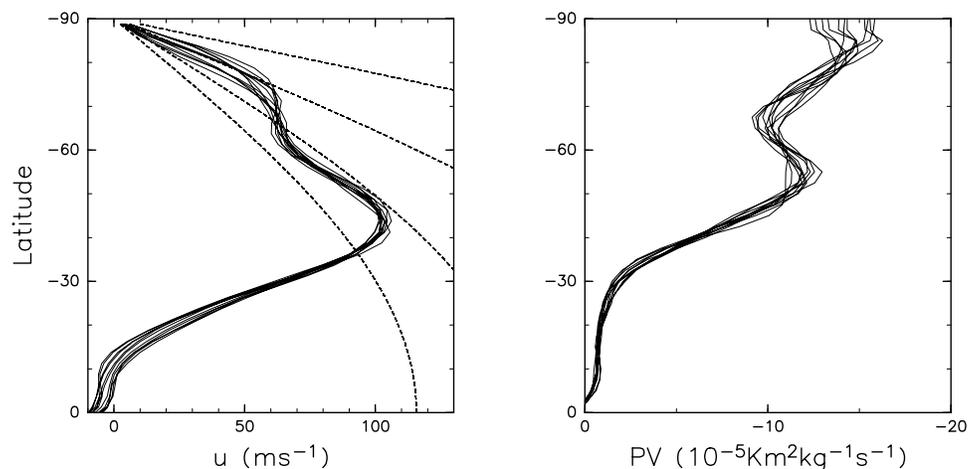


図 13.5: 1800K の等温位面上における南半球帯状平均流の様子. 1999 年 7 月 1-10 日. (左) 帯状平均帯状流の緯度分布, (右) 帯状平均ポテンシャル渦度の緯度分布. 左図の点線はそれぞれ剛体回転する風速場を示す.

## 13.4 現実大気における順圧不安定

### 13.4.1 成層圏の東進ロスビー波

Hartmann(1983), Ishioka and Yoden(1994) の理論・数値実験のイントロダクションで, 冬季成層圏で観測される東進ロスビー波に関するレビューがある.

図 13.5, 13.6 に, 最近の事例を示す (Mizuta and Yoden, 2001). 図 13.5 は, 上部成層圏 (1800K の等温位面) での帯状平均した帯状流およびポテンシャル渦度の緯度分布を示す. 1999 年 7 月上旬の 10 日分を各実線で重ね書きしている. 帯状平均帯状流は 45 度付近に最大値をもつジェット構造 (「極夜ジェット」と呼ばれている) をしているが, その極側に膨らみをもつ風速分布となっている. この風速分布に対応して, 帯状平均ポテンシャル渦度はその緯度微分の符号を変えており, レイリー-クオの条件を満たしている. 実際, 図 13.6 に示すように, この期間にこの緯度帯では東西波数 1 の擾乱が増幅し, 周期 4 日程度で東進している. 「4 日波」と呼ばれる擾乱で, 基本的に極夜ジェットの順圧不安定によって生じたと考えられている.

### 13.4.2 熱帯域の偏東風波動

Charney(1973)

## 参考文献

- Charney, J.G. 1973: Planetary fluid dynamics, *Dynamic Meteorology*. P.Morel Ed., D.Reidel Pub.Co., 97-351.
- 伊賀 啓太, 1996: 水路内の回転浅水波系における遷移モード. 「ながれ」, 15, 84-92.
- 石岡 圭一, 1994: 課題演習 D5 ノート.

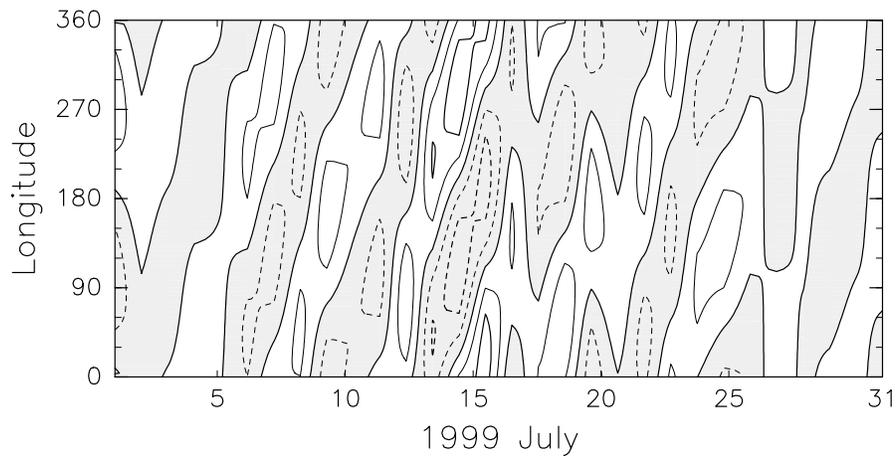


図 13.6: 1800K の等温位面で南緯 60 度でのポテンシャル渦度偏差の経度-時間図 (ホフメラー ダイアグラム). 東西波数 1 成分だけを取り出したもの.

Mizuta, R. and S. Yoden, 2001: Interannual variability of the 4-day wave and isentropic mixing inside the polar vortex in midwinter of the Southern Hemisphere upper stratosphere. submitted to *J. Geophys. Res.*

Sakai, S., 1989: Rossby-Kelvin instability: a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **202**, 149–176.



# 第14章 傾圧不安定

重力場のなかで回転する系で安定密度成層した流体を水平加熱差により駆動する状況を考える。具体的には、太陽放射と地球放射の差として、低緯度が正味の加熱、高緯度が正味の冷却となる大気循環の状況である。または、室内の“回転水槽実験”で実現する状況である。軸対称な強制場に対して軸対称な解が存在するが、流れの状態によっては力学的に不安定であり、非軸対称な流れとなる。このような流れの不安定性を傾圧不安定 (baroclinic instability) という。

温帯低気圧やそれに関連するジェット気流の蛇行は、大気の傾圧不安定性に起因すると考えられている。

## 14.1 回転水槽実験とイーディ問題

### 14.1.1 実験の概要

回転水槽 (rotating annulus) を用いた傾圧不安定波 (baroclinic waves) の実験 (例えば, Hide and Mason, 1975; 瓜生, 1973, 1977) では、同軸円筒間に実験流体を満たし、外壁を加熱、内壁を冷却して水平温度差を与えることにより流れを駆動する。装置全体を回転台に載せてまわせば、系の回転が流れに及ぼす影響を調べることができる。回転がなければ、外壁付近で上昇し内壁付近で下降する軸対称な対流となる。表面付近の流れをアルミ粉で可視化すれば、内壁に向かう放射状の流れとなる。水平温度差を一定に保ったまま系を回転させたとき、回転数が小さければ、表面の流れパターンが同心円的な軸対称流 (axisymmetric flow) が出現する (図 14.1(a))。回転数がある臨界値を越えると、接線方向に波構造をもつ非軸対称流 (non-axisymmetric flow) が出現する (図 14.1(b))。軸対称な流れが傾圧不安定となり、3次元的な擾乱が発達した結果である。このような擾乱を傾圧不安定波という。実験パラメータに依存して、波が時間変化せず一定の位相速度でドリフトする定常波動 (steady waves)、波形や振幅が周期的に変化するバシレーション (vacillation)、擾乱が空間・時間ともに不規則に変化する乱流 (turbulent flow; 図 14.1(c)) など様々な流れが出現する。このように実験パラメータに依存して、軸対称流や非軸対称流が出現するが、前者をハドレー循環 (またはハドレーレジーム)、後者をロスビー循環 (ロスビー レジーム) という。

実験で得られる流れレジームは、おもに次の外部パラメータからなる無次元数に依存している (Hide and Mason, 1975) :

$$Ro_T \equiv \frac{gH\gamma(T_w - T_c)}{\Omega^2 W^2} \quad : \quad \text{熱ロスビー数,} \quad (14.1)$$

$$Ta \equiv \frac{4\Omega^2 W^5}{\nu^2 H} \quad : \quad \text{テイラー数,} \quad (14.2)$$

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \quad : \quad \text{プラントル数.} \quad (14.3)$$

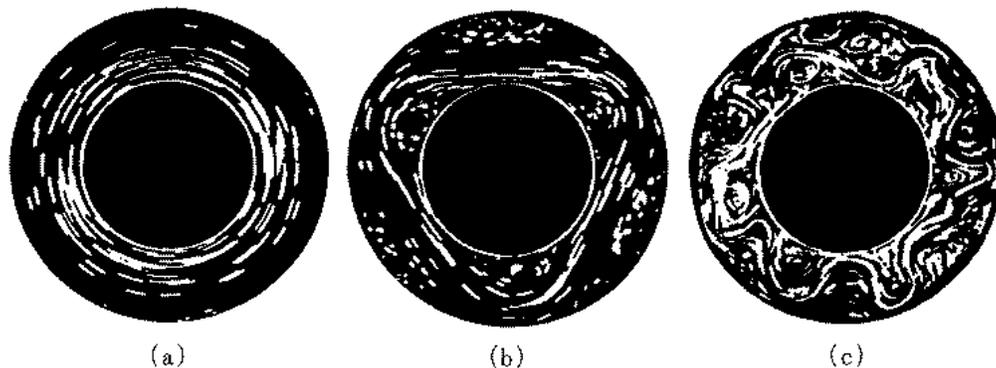


図 14.1: 回転水槽を用いた傾圧不安定波の実験で得られた流れパターン (Hide and Mason, 1975 より). (a) 軸対称流, (b) 定常波動, (c) 乱流.

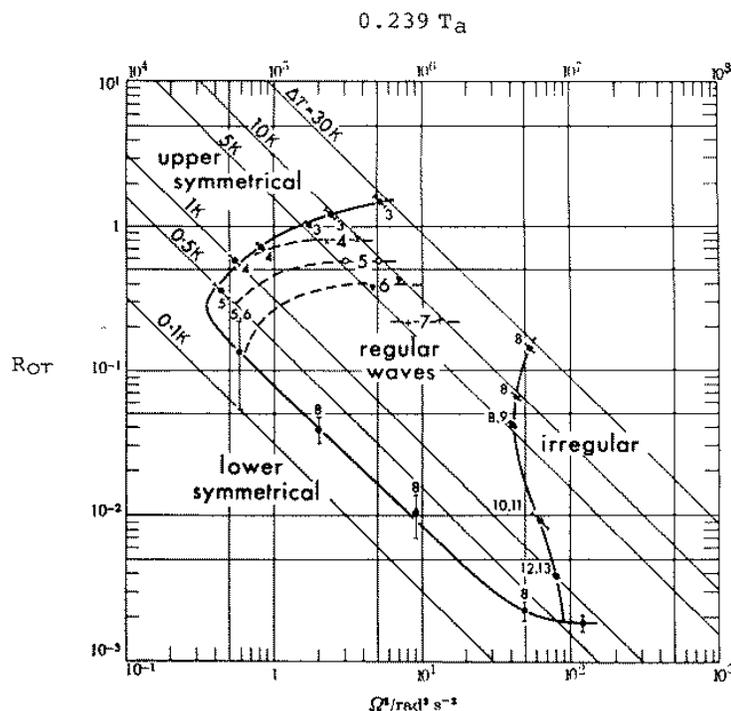


図 14.2: 回転水槽を用いた傾圧不安定波の実験で得られたレジームダイヤグラム (Hide and Mason, 1975).

ここで、流体の物性に依存したパラメータとしては、動粘性率  $\nu$ 、熱伝導率  $\kappa$ 、体積膨張率  $\gamma$  が含まれており、容器の大きさとして、横幅  $W$  と深さ  $H$ 、および重力加速度  $g$  が含まれている。実験パラメータとして変化させるのは、おもに横壁間の温度差  $T_w - T_c$  と回転角速度  $\Omega$  である。図 14.2 は、得られた流れレジームのテイラー数 (横軸) と熱ロスビー数 (縦軸) に対する依存性を示したものである (Hide and Mason, 1975)。横壁間の温度差を一定に保ったまま回転角速度を増加させると、このダイヤグラムで右下がりの直線上を右下に動くことになる。横壁間の温度差が小さい場合 (約 0.2K 以下) には軸対称流が出現するだけで、回転角速度を変えても不安定にならない。一方、温度差がそれ以上の場合には、回転角速度を増すと軸対称流が不安定となり、非軸対称流へと遷移する。さらに、回転数をあげると定常波動やバシレーションという規則的な波動 (regular waves) を経てやがて不規則な流れ (irregular flow) へと遷移していく。

回転水槽を用いた傾圧不安定波の実験は、略して回転水槽実験といわれることがある。後節でみるように傾圧不安定波は上下に熱を運ぶと同時に水平にも熱を運んでいるので、傾斜対流 (sloping convection) と呼ばれることもある。この実験は、1960年代から70年代にかけて、大気大循環の力学的エッセンスを取り出した実験として注目され、盛んに研究された。流れのレジームが軸対称流から乱流まで段階的に遷移するので、流体における分岐現象の実例としても注目されてきた (例えば, Lorenz, 1962, 1963)。もっとも, Hide(1953)が最初に行なった動機は、地球中心核 (外核) の運動を研究するためであったが。

### 14.1.2 支配方程式系

熱対流の章 (第12章) で導入したブシネスク流体の近似をする。すなわち、非圧縮に近い流体を考えて、浮力項のみ密度変化を残し、他のところでは密度を一定とする。系は一定角速度  $\Omega$  で回転するとするが、遠心力は重力に比べて小さいとして、陽には扱わない。円筒間隔が円筒の半径に比べて十分小さいとして、円筒の曲率を無視 (チャンネル近似) し直線直交座標系  $(x, y, z)$  で記述する。このとき、支配方程式系は次で与えられる：

$$\text{運動方程式} : \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\Omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\text{grad}p + \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{g}, \quad (14.4)$$

$$\text{連続方程式} : \text{div}\mathbf{u} = 0, \quad (14.5)$$

$$\text{エネルギー方程式} : \frac{DT}{Dt} = \kappa\Delta T, \quad (14.6)$$

$$\text{状態方程式} : \rho = \rho_0\{1 - \gamma(T - T_0)\}. \quad (14.7)$$

これらは、従属変数  $(p, \rho, T, \mathbf{u})$  について閉じた方程式系となっている。外部パラメータは、流体の物性に依存した、平均密度  $\rho_0$ 、平均温度  $T_0$ 、動粘性率  $\nu$ 、熱伝導率  $\kappa$ 、体積膨張率  $\gamma$  と、系の回転角速度  $\Omega$ 、および重力加速度  $g$  である。

チャンネルは  $x$  方向に伸び、 $y = 0$  と  $y = W$  に横壁があり、 $z = 0$  に底、 $z = H$  に蓋があるとして、それぞれの境界で粘着条件を課する。すなわち、 $\mathbf{u} = 0$  とする。(蓋をせず上端 ( $z = H$ ) は大気に接するとして、スリップ条件を仮定することもある。) 温度の境界条件としては、両横壁を異なる温度で維持して、水平加熱差を課する： $T(y = 0) = T_w$ ,  $T(y = W) = T_c$ ,  $T_w > T_c$ 。また、上下の境界では、熱フラックスがない ( $\partial T/\partial z$ ) とする断熱条件を課する。ここで、実験パラメータは容器の大きさ ( $W, H$ ) と横壁の温度 ( $T_w, T_c$ ) である。

### 14.1.3 定常軸対称流

加熱場を含めて境界条件が軸対称である、すなわち、 $x$  依存性がないとすると、これと同一の空間対称性をもつ軸対称解が可能である。さらに、時間対称性を仮定して定常軸対称解を求めよう。支配方程式系で、 $\partial/\partial t = \partial/\partial x = 0$  として、

$$\left(\bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{u} - f\bar{v} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{u}, \quad (14.8)$$

$$\left(\bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{v} + f\bar{u} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{v}, \quad (14.9)$$

$$\left(\bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{w} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{w} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}g, \quad (14.10)$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (14.11)$$

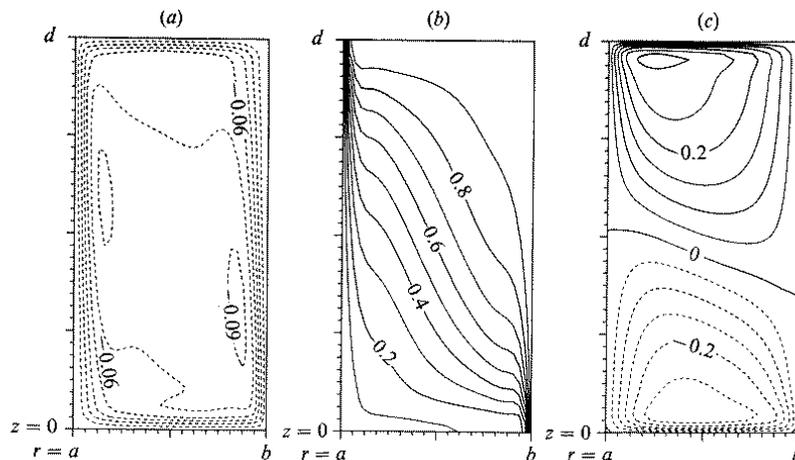


図 14.3: 数値的に求めた定常軸対称解の例 (Sugata and Yoden, 1991; Fig.3). (a) 子午面循環の流れ関数 ( $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ ), (b)  $[0,1]$  で規格化した温度, (c) 帯状流 ( $\text{cm s}^{-1}$ ). 実験流体は水で,  $Ta = 8.46 \times 10^5$ ,  $Ro_T = 0.791$  の場合.  $T_w - T_c = 5.15 \text{ K}$ ,  $\Omega = 1.01 \text{ s}^{-1}$ .

$$\left( \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{T} = \kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{T}, \quad (14.12)$$

$$\bar{p} = \rho_0 \{1 - \gamma(\bar{T} - T_0)\}. \quad (14.13)$$

をとる. ここで,  $f = 2\Omega$  である. これらは,  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{T}$  について閉じた方程式系なので, 解が求められれば, それが定常軸対称解である. しかし, 左辺の移流項は 2 次の非線型であり, 一般に解析的に解を求めることができない.

数値的に定常軸対称解を求めて, そのパラメータ依存性を調べることができる (例えば, Sugata and Yoden, 1992). 図 14.3 に一例を示すが, 流れ場はふつう境界層と内部領域に分けられる. いま考えている状況ではエクマン数が小さい ( $E_V = \nu/(2\Omega W^2) \leq 10^{-3}$ ) ので, 上下の境界にはエクマン層ができる (第 6 章参照). 外壁から内壁への熱輸送は, おもに境界層内の流れ (子午面循環) によってなされている. 内外の横壁付近には熱と粘性がともに寄与する境界層ができ, その厚さは  $l = 2 \left( \frac{\nu \kappa H}{g \gamma (T_w - T_c)} \right)^{-1/4}$  で見積もられる (McIntyre, 1968). 一方, いま考えている状況の内部域ではロスビー数も小さいので,  $x$  方向の運動方程式は地衡流平衡の式

$$f \bar{u} \sim -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad (14.14)$$

で近似できる. また, 同様に,  $z$  方向の運動方程式は静力学的平衡の式

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \sim -\bar{\rho} g, \quad (14.15)$$

で近似できる. これらより  $\bar{p}$  を消去して, 状態方程式を用いれば,

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\gamma g \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (14.16)$$

という, 温度風関係式 (thermal wind relation) を得る. 水平帯状流の鉛直シアーがその流れに直交する向きの水平温度勾配に比例するという関係である. 鉛直にのびた仮想的な柱に働くトルクを考えると, コリオリ力によるトルクと安定成層化のトルクが釣合う関係であることがわかる.

## 14.1.4 内部域軸対称解の線型安定性：イーディ問題

基本場として次のような内部域軸対称解を考える。まず、チャンネルに沿う  $x$  方向の流れが  $y$  に依存せず、

$$\bar{u}(z) = \Lambda z + \bar{u}_0, \quad (14.17)$$

とする。ここで、 $\bar{u}_0$  は  $z = 0$  での帯状流速である。  $d\bar{u}/dz = \Lambda = \text{一定}$  なので、温度風関係より

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\frac{f}{\gamma g} \frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{f\Lambda}{\gamma g}, \quad (14.18)$$

である。これを  $y$  方向に積分して、

$$\bar{T}(y, z) = \bar{T}(0, z) - \frac{f\Lambda}{\gamma g} y, \quad (14.19)$$

となる。ここで、 $\Gamma \equiv d\bar{T}/dz = \text{一定} > 0$  として、安定密度成層をしているとすると、基本温度場は

$$\bar{T}(y, z) = \Gamma z - \frac{f\Lambda}{\gamma g} y + \bar{T}_{00}, \quad (14.20)$$

で与えられる。ここで、 $\bar{T}_{00}$  は、 $y = z = 0$  での温度である。また、子午面 ( $y, z$  平面) 内の速度は 0 とする：

$$\bar{v} = \bar{w} = 0. \quad (14.21)$$

ここで、このような基本場に加えられた 3 次元の微小擾乱を考える：

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}(z) + u'(x, y, z, t), \\ v &= v'(x, y, z, t), \\ w &= w'(x, y, z, t), \\ \rho &= \bar{\rho}(y, z) + \rho'(x, y, z, t), \\ p &= \bar{p}(y, z) + p'(x, y, z, t), \\ T &= \bar{T}(y, z) + T'(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

これを支配方程式系 (14.4)~(14.7) に代入して線型化する。ただし、 $\nu = \kappa = 0$  であるとする、擾乱に対する線型方程式系は次になる：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f v' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (14.23)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) v' + f u' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (14.24)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g, \quad (14.25)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (14.26)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) T' + \left( v' \frac{\partial}{\partial y} + w' \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{T} = 0, \quad (14.27)$$

$$\rho' = -\rho_0 \gamma T'. \quad (14.28)$$

境界条件としては、チャンネルの横壁と上下に置いた水平壁でスリップ条件を課する：

$$v' = 0, \quad \text{at } y = 0, W, \quad (14.29)$$

$$w' = 0, \quad \text{at } z = 0, H. \quad (14.30)$$

擾乱についてもロスビー数が小さく、ほぼ静力学的平衡が成り立つとすると、これらの線型方程式系から準地衡ポテンシャル渦度方程式が導出できて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(z)\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{f^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) p' = 0, \quad (14.31)$$

となる。ここで、プラント-バイサラ振動数  $N = (g\gamma\Gamma)^{1/2}$  である。境界条件は  $p'$  について書き直して、

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = 0, W, \quad (14.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(z)\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial p'}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad \text{at } z = 0, H, \quad (14.33)$$

となる。Eady(1949) は、中緯度対流圏の帯状流を念頭に置いてこのような枠組をつくり、基本場の安定性を固有値問題として解析した。ここでは、彼のとった道を真似て、回転水槽実験での軸対称流の安定性解析を行なう。

横壁での境界条件 (14.32) を満たす次の正弦波解を考える：

$$p'(x, y, z, t) = \text{Re} \left[ \Psi(z) \sin(n\pi y/W) e^{ik(x-ct)} \right]. \quad (14.34)$$

これを (14.31) 式に代入して整理すると、

$$(\bar{u}(z) - c) \left( k^2 + \frac{n^2\pi^2}{W^2} - \frac{f^2}{N^2} \frac{d^2}{dz^2} \right) \Psi(z) = 0, \quad (14.35)$$

となる。上端が蓋なしの場合には  $\bar{u}_0 = 0$  となり、境界条件 (14.33) は、

$$\left. \begin{aligned} -c \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Lambda \Psi &= 0, & \text{at } z = 0, \\ (\Lambda H - c) \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Lambda \Psi &= 0, & \text{at } z = H, \end{aligned} \right\} \quad (14.36)$$

となる。(14.35) 式を満たす解は、

$$\Psi(z) = A \exp(\alpha z) + B \exp(-\alpha z), \quad (14.37)$$

となり、 $\alpha^2$  は、

$$\alpha^2 = \frac{N^2}{f^2} \left( k^2 + \frac{n^2\pi^2}{W^2} \right), \quad (14.38)$$

で与えられる。(14.37) を境界条件 (14.36) に代入して、自明でない解をもつとすると、固有値  $c$  は、

$$c^2 - \Lambda H c + \frac{\Lambda^2}{\alpha^2} (\alpha H \coth(\alpha H) - 1) = 0, \quad (14.39)$$

の解として与えられる。 $\coth a = \{\tanh(a/2) + \coth(a/2)\}/2$  という関係式を用いて整理すると、

$$c = \frac{\Lambda H}{2} \pm \frac{\Lambda}{\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha H}{2} - \tanh \frac{\alpha H}{2} \right) \left( \frac{\alpha H}{2} - \coth \frac{\alpha H}{2} \right) \right]^{1/2}, \quad (14.40)$$

となる。 $(\alpha H)/2 - \tanh\{(\alpha H)/2\}$  は常に正なので、

$$\frac{\alpha H}{2} - \coth \frac{\alpha H}{2} < 0, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{\alpha H}{2} < 1.1997 = \frac{\alpha_c H}{2}, \quad (14.41)$$

の場合には、 $c$  が複素共役固有値となり、基本流は不安定である。ここで、安定と不安定を分ける臨界値が  $\Lambda$  に依らないことに注意すべきである。もっとも、擾乱の発達率は  $k c_i \propto \Lambda/\alpha$  なので、鉛直シアー（南北温度

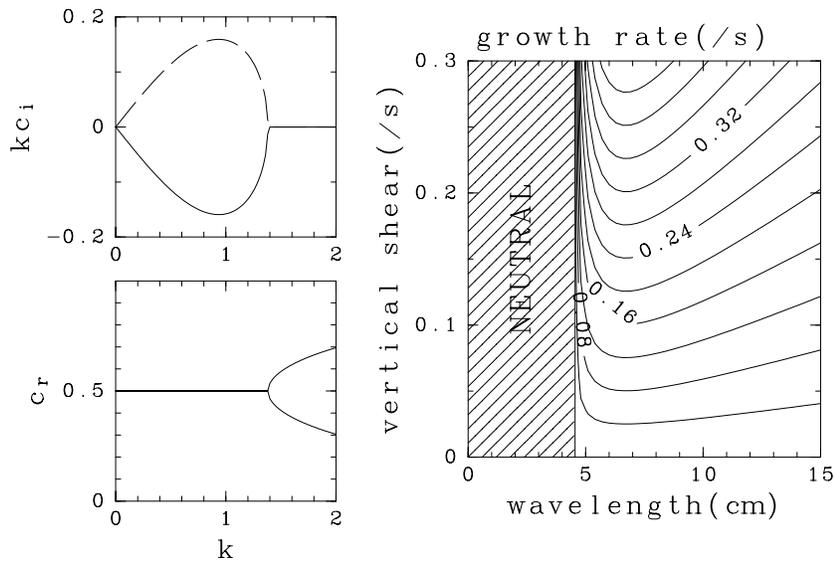


図 14.4: 回転水槽実験に対応するイーディ問題での固有値解析. 実験パラメータは,  $H = 10$  cm,  $W = 5$  cm,  $N^2 = 0.1$  s $^{-2}$ ,  $\Omega = 1$  s $^{-1}$ . (左) 擾乱の発達率  $kc_i$ (上) と位相速度  $c_r$ (下) の帯状波数  $k$  依存性. ただし,  $\Lambda = 0.1$  s $^{-1}$ . (右) 擾乱の発達率  $kc_i$ (s $^{-1}$ ).

差) が大きいほど不安定である. 静的安定度  $N$ (つまり  $\Gamma = d\bar{T}/dz$ ) が増せば  $\alpha$  も増すので, 擾乱の発達率は小さくなる.

水槽実験に近い値に対して固有値  $c$  の帯状波数  $k$  依存性を求めた結果を図 14.4(左) に示す. ある臨界波数よりも小さな波数の擾乱に対して基本場は不安定であり, そのときの位相速度  $c_r$  は  $z = H/2$  での基本流の速度に等しい. このグラフは順圧不安定の 2 点折れ線モデルの結果 (図 13.3) と類似しており, やはり, 上端 ( $z = H$ ) と下端 ( $z = 0$ ) 付近に存在する二つの中立波の位相速度が近い値になった時の共鳴によって, 基本場が不安定になっていると考えられる. 図 14.4(右) は別の表現で, 擾乱の発達率  $kc_i$  を擾乱の水平波長 ( $2\pi/k$ ) と鉛直シア ( $\Lambda$ ) の関数としてプロットしたものである. 臨界波長や最大発達擾乱の波長は鉛直シアに依存しないが, 発達率自体は鉛直シアが大きいほど大きい. ここで与えたパラメータの場合, 水平波長が 7cm に近い擾乱が最大発達する. もっとも, 現実の水槽では接線 ( $\theta$ ) 方向に周期的であり, 擾乱の波数は離散的な値しかとれない ( $p' \propto e^{is\theta}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ) ことを思い出しておこう.

各固有値に対応する固有関数は擾乱の空間構造を与える. 図 14.4(左) の状況で成長率が最大に近い不安定擾乱の構造を図 14.5 に示す. 擾乱の圧力場は高さと共に「西」に傾き, 温度場は「東」に傾いている. これらの位相がおよそ  $\pi/2$  ずれていることに注意. 鉛直流は温度場と正相関があり基本的に  $\overline{T'w'} > 0$  で, この擾乱によって熱エネルギーは下から上へと輸送される. 第 12 章の熱対流の場合と同様に, 基本場の位置エネルギーから擾乱の運動エネルギーへの変換が起っている. また, 水平構造をみると「南北流」と温度場とが正相関で  $\overline{T'v'} > 0$  であり, 高温壁から低温壁へと熱エネルギーが輸送されている. このような状況に基づいて傾圧不安定擾乱による熱輸送形態を傾斜対流 (sloping convection) ということがある.

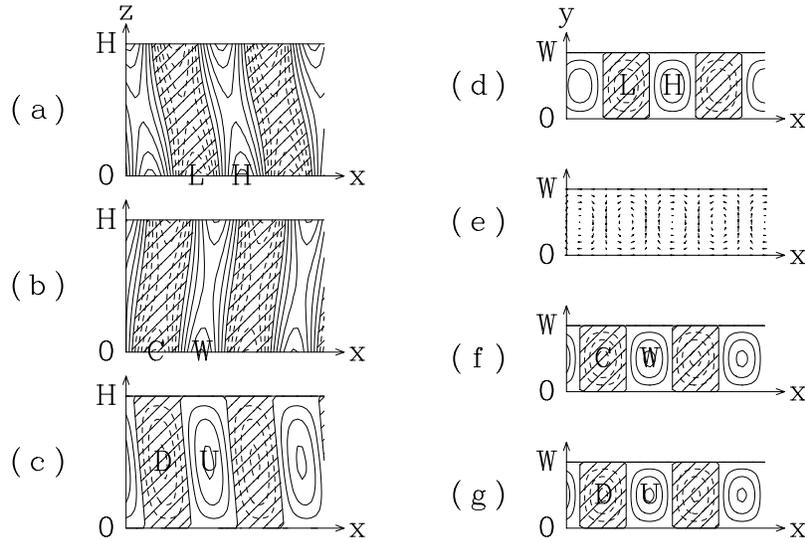


図 14.5: 回転水槽実験に対応するイーディ問題で得られた発達する擾乱の空間構造. 実験パラメータは,  $H = 10$  cm,  $W = 5$  cm,  $N^2 = 0.1$  s $^{-2}$ ,  $\Omega = 1$  s $^{-1}$ ,  $\Lambda = 0.1$  s $^{-1}$  で, 擾乱の波長は  $2\pi/k = 7$  cm. (左) 水路中央 ( $y = W/2$ ) での鉛直断面図: (a)  $p'(x, z)$ , (b)  $T'(x, z)$ , (c)  $w'(x, z)$ . (右) 半分の深さ ( $z = H/2$ ) での水平断面図: (d)  $p'(x, y)$ , (e)  $(u'(x, y), v'(x, y))$ , (f)  $T'(x, y)$ , (g)  $w'(x, y)$ .

## 14.2 温帯低気圧の成因論：準地衡方程式系での傾圧不安定理論

### 14.2.1 準地衡ポテンシャル渦度方程式

ほぼ静力学的平衡が成り立ち, 流れがおよそ地衡風的であるという仮定の下に, 第 2.6 節で構築した中緯度  $\beta$  平面気圧座標での準地衡方程式系をもう一度まとめておく:

$$\text{水平運動方程式} : \frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g, \quad (14.42)$$

$$\text{連続方程式} : \nabla_p \cdot \mathbf{v}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (14.43)$$

$$\text{エネルギー方程式} : \frac{D_g T'}{Dt} - S_{p0}(p) \omega = \frac{Q}{c_p}, \quad (14.44)$$

$$\text{地衡風平衡} : \mathbf{v}_g = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi, \quad (14.45)$$

$$\text{静力学的平衡} : \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT'}{p}. \quad (14.46)$$

ここで従属変数  $\mathbf{v}_g, \mathbf{v}_a, \omega, \Phi, T'$  は, それぞれ, 水平風の地衡風成分, 水平風の非地衡風成分, 鉛直  $p$  速度, ジオポテンシャル, 温度の標準状態  $T_0(p)$  からのズレ, である. また, 地衡風近似のラグランジュ式時間微分  $D_g/Dt$  と静的安定度パラメータ  $S_{p0}$  は, それぞれ, 次で与えられる:

$$\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_p = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}, \quad (14.47)$$

$$S_{p0}(p) = \frac{RT_0(p)}{c_p p} - \frac{\partial T_0(p)}{\partial p}. \quad (14.48)$$

地衡風の渦度の鉛直成分を  $\zeta_g$  とすると, (14.45) 式を用いて,

$$\zeta_g = \mathbf{k} \cdot \nabla_p \times \mathbf{v}_g = \frac{1}{f_0} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} (\nabla_p \cdot \nabla_p \Phi)) = \frac{1}{f_0} \Delta_2 \Phi = \frac{1}{f_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi, \quad (14.49)$$

と, ジオポテンシャルの水平 2 次元ラプラシアンで書ける. つぎに,  $\mathbf{k} \cdot \nabla_p \times$  (14.42) をとり, 地衡風の水平発散が 0 であることを用いると, 次の準地衡渦度方程式を得る:

$$\frac{D_g \zeta_g}{Dt} = -f_0 \nabla_p \cdot \mathbf{v}_a - \beta v_g. \quad (14.50)$$

(14.43) 式を用いると, 準地衡絶対渦度  $\zeta_g + f_0 + \beta y$  に関する表式が次のように得られる:

$$\frac{D_g}{Dt} (\zeta_g + f_0 + \beta y) = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (14.51)$$

地衡風で近似した絶対渦度の鉛直成分が, 惑星回転 ( $f_0$ ) がある場での水平発散に伴う気柱の伸長によってラグランジュ的に時間変化することを表わしている. ここで, 渦管の伸長に伴う渦度変化は第 3.3 節での議論を思い出すこと. 次に, エネルギー方程式 (14.44) は, 静力学的平衡の式 (14.46) を用いて,

$$\frac{D_g}{Dt} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = \sigma \omega + \frac{R}{c_p p} Q, \quad (14.52)$$

と書き直せる. ここで, 静的安定度パラメータを新たに  $\sigma(p) \equiv R S_{p0}(p)/p$  と定義し直している. 地衡風近似のラグランジュ式時間微分は,

$$\frac{D_g a}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + f_0^{-1} \frac{\partial (\Phi, a)}{\partial (x, y)}, \quad (14.53)$$

と, ジオポテンシャルを用いて書き表せるので, 結局, 準地衡渦度方程式 (14.51) とエネルギー方程式 (14.52) が, 従属変数 ( $\Phi, \omega$ ) に関して閉じた方程式系となっている.

ここで, 断熱 ( $Q = 0$ ) を仮定して, エネルギー方程式 (14.52)/ $\sigma$  を  $p$  微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial p} &= -\frac{D_g}{Dt} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \cdot \nabla_p \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \\ &= -\frac{D_g}{Dt} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right), \end{aligned} \quad (14.54)$$

となる. ここで,  $\partial \mathbf{v}_g / \partial p = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p (\partial \Phi / \partial p)$  は  $\nabla_p (\partial \Phi / \partial p)$  と直交することを使っている. これを準地衡渦度方程式 (14.51) に代入して整理すると,

$$\frac{D_g}{Dt} \left[ \zeta_g + f_0 + \beta y + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] = \frac{D_g q_g}{Dt} = 0, \quad (14.55)$$

と書ける. ここで,  $q_g$  は準地衡ポテンシャル渦度 (quasi-geostrophic potential vorticity) であり,

$$q_g \equiv \zeta_g + f_0 + \beta y + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = \frac{1}{f_0} \Delta_2 \Phi + f_0 + \beta y + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right), \quad (14.56)$$

と, ジオポテンシャル  $\Phi$  を用いて定義できる. 準地衡ポテンシャル渦度方程式 (14.55) は, 地衡風によって準地衡ポテンシャル渦度  $q_g$  が保存することを示している. スカラー量  $q_g$  は渦度の次元 [ $s^{-1}$ ] を持ち, 等圧面上のジオポテンシャルの分布だけで決まる. 第 3.4 節で考えたエルテルのポテンシャル渦度とその保存則と類似した関係にあるが, 両者の次元は異なり, 後者は 3 次元速度にのってのラグランジュ的保存量である点に留意すべきである. この意を込めて準地衡ポテンシャル渦度を擬ポテンシャル渦度 (pseudo-potential vorticity) ということがある. 準地衡ポテンシャル渦度方程式より  $q_g$  の時間発展を求めることができるが, ある時刻での  $q_g$  が求めれば, 境界値問題として (14.56) 式を解いてジオポテンシャル  $\Phi$  が得られる. ジオポテンシャルがわかれば, 地衡風は (14.45) 式より, 温度は (14.46) 式より求められる. また, 次節で見ると鉛直もジオポテンシャル場より診断的に求められる.

### 14.2.2 オメガ方程式

前小節では準地衡渦度方程式 (14.51) とエネルギー方程式 (14.52) で、従属変数  $\omega$  を消去して準地衡ポテンシャル渦度方程式を導出したが、もう一つの従属変数  $\Phi$  の局所時間変化項を消去すると、鉛直  $p$  速度  $\omega$  に関する方程式を得る。まず、(14.51) 式を  $p$  で微分し、 $f_0/\sigma$  倍する。次に、(14.52) の  $\Delta_2$  をとり  $\sigma$  で割って、これらを足し合わせ整理すると、最終的に次のオメガ方程式 (omega equation) 得る：

$$\left( \Delta_2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{v}_g \cdot \nabla_p (\zeta_g + f_0 + \beta y)] + \frac{1}{\sigma} \Delta_2 \left[ \mathbf{v}_g \cdot \nabla_p \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]. \quad (14.57)$$

ここで、ある時刻のジオポテンシャル場が与えられれば右辺の各項は求められるので、適当な境界条件のもとに 3 次元楕円型方程式 (14.57) を解けば、鉛直速度  $\omega$  が求まることになる。右辺各項の物理的イメージは、Holton(1992, 第 6.4.1 節) や小倉 (1978, 第 5.1 節) を参照のこと。

総観規模の時間・空間スケールで鉛直速度場を直接観測することは、ほとんど不可能である。他の観測量に基づいてこれを推定することになるが、いくつかの方法が考えられる。連続方程式 (14.43) に基づいて推定しようとする、水平風を非地衡風成分までちゃんと観測する必要がある。また、エネルギー方程式 (14.44) を使おうとすると、温度の時間変化項を見積るために 2 回以上の観測が必要であり、潜熱の放出や放射過程が重要な場合にはそれらによる加熱量  $Q$  をちゃんと見積る必要がある。これらに対して、オメガ方程式を用いれば、診断型の方程式なので 1 回の観測で見積ることが可能であり、その観測精度も地衡風の精度で良い。このような利点から、総観規模での鉛直流の推定には、オメガ方程式を用いることが多い。また、同様の利点を追求して B. Hoskins の提唱した「 $Q$  ベクトル」を用いる方法もある (Holton, 1992, 第 6.4.2 節を参照のこと)。

### 14.2.3 安定性問題の枠組み

支配方程式は準地衡ポテンシャル渦度方程式 (14.55) である：

$$\frac{D_g q_g}{Dt} = 0. \quad (14.58)$$

ここで、ジオポテンシャルを  $f_0$  で割って  $\psi$  とすると、各物理量は

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \Phi / f_0, \\ \zeta_g &= \Delta_2 \psi, \\ q_g &= \zeta_g + f_0 + \beta y + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right), \\ \mathbf{v}_g &= \mathbf{k} \times \nabla_p \psi, \\ T' &= -\frac{f_0}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \ln p}, \end{aligned} \right\} \quad (14.59)$$

で与えられる。上下の境界条件としては、上端 ( $p_T$ ) および下端 ( $p_B$ ) で、 $\omega = 0$  を課する。静力学的平衡の近似のもとでは  $\omega = -\rho g w$  となるので、上下の境界に剛体壁を置くことに相当する。断熱を仮定したエネルギー方程式で  $\omega = 0$  として、

$$\frac{D_g}{Dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) = 0, \quad \text{at } p = p_T, p_B, \quad (14.60)$$

となる。また、チャンネル近似のもと南北の境界条件は、壁面で  $v_g = 0$  とする：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = 0, W. \quad (14.61)$$

準地衡ポテンシャル渦度方程式は移流項が 2 次の非線型であり、解析が困難である。例によって、現実の状況を理想化して基本帯状流に微小な擾乱が加わったと仮定し、線型解析を行なうことにする。

中緯度対流圏を念頭に置いて、東西に一樣な帯状流が流れている基本場を考える。ある変数  $a$  の帯状平均を  $\bar{a}$  で表わすと、その基本的性質により、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_g &= -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \equiv \bar{u}, & (\text{添字 } g \text{ を省略}) \\ \bar{v}_g &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.62)$$

である。また、エネルギー方程式より  $\bar{\omega} = 0$  である。静力学的平衡も流れ関数で書き換え、上の地衡風関係と結び付けると、温度風関係式が次のように書ける：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \ln p} = \frac{R}{f_0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}. \quad (14.63)$$

高緯度ほど低温である ( $\partial \bar{T} / \partial y < 0$ ) とすると、帯状流は気圧とともに減少 (高さとともに増加) することになる。対流圏界面に亜熱帯ジェット気流が存在する状況を思い浮かべれば良い。

流れ関数が  $\psi(x, y, p, t) = \bar{\psi}(y, p) + \psi'(x, y, p, t)$  であるとして、最終的に次のように線型化した準地衡ポテンシャル渦度方程式を得る：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad (14.64)$$

ただし、

$$q' = \Delta_2 \psi' + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right), \quad (14.65)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \beta - f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right) \quad (14.66)$$

である。上下の境界条件は、線型化して、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial p} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad \text{at } p = p_T, p_B, \quad (14.67)$$

となる。また、南北の境界条件は、

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = 0, W. \quad (14.68)$$

となる。以下の節では、これらの線型化した方程式と境界条件をもとに、基本帯状流の安定性を調べていくことになる。

#### 14.2.4 積分定理

#### 14.2.5 チャーニイ問題

#### 14.2.6 エネルギー論

### 14.3 現実の温帯低気圧

#### 14.3.1 観測事例：爆弾低気圧

#### 14.3.2 初期値問題としての捉え方

### 参考文献

- Eady, E.T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52.
- Hide, R., 1953: Fluid motion in the Earth's core and some experiments on thermal convection in a rotating liquid. *Fluid Models in Geophysics*, R.R. Long(Ed.), U.S. Govt., Washington, 101–116.
- Hide, R. and P.J. Mason, 1975: Sloping convection in a rotating fluid. *Adv. Phys.*, **24**, 47–100.
- Holton, J.R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, 507pp.
- Lorenz, E.N., 1962: Simplified dynamic equations applied to the rotating-basin experiments. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 39–51.
- Lorenz, E.N., 1963: The mechanics of vacillation. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 448–464.
- McIntyre, M.E., 1968: The axi-symmetric convective régime for a rigidly bounded rotating annulus. *J. Fluid Mech.*, **32**, 625–655.
- 小倉 義光, 1978: 「気象力学通論」, 東京大学出版会, 249pp.
- Sugata, S. and S. Yoden, 1991: The effects of centrifugal force on the stability of axisymmetric viscous flow in a rotating annulus. *J. Fluid Mech.*, **229**, 471–481.
- Sugata, S. and S. Yoden, 1992: Steady axi-symmetric flow due to differential heating in a rotating annulus and its dependence on experimental parameters. *J. Meteor. Soc. Japan*, **70**, 1005–1017.
- 瓜生 道也, 1973: 回転水槽実験のはなし. *天気*, **20**, 323–333.
- 瓜生 道也, 1977: 回転水槽に現れる流れの構造とその安定性. *日本物理学会誌*, **32**, 642–648.

# 第15章 大気の乱流

大気は、渦や波という秩序だった運動形態をとることもあるが、基本的には不規則で非周期的な運動をする。この章では、3次元及び2次元の乱流理論を概観し、大気では考慮すべきシアーや成層、系の回転などがある状況での乱流を考える。

## 15.1 3次元乱流のあらまし

まず、巽 (1982, 1986, 1995) の教科書を中心に3次元乱流の要点をまとめておく。

### 15.1.1 乱流とは?

レイノルズ数 ( $Re \equiv LU/\nu$ ,  $L$ : 代表的長さ,  $U$ : 代表的速度,  $\nu$ : 運動粘性率) の低い粘性流は一般に外部からの擾乱に対して安定であり、規則的な流れ (層流) となる。これに対して、不規則な速度や圧力の変動を伴う流れを乱流という。レイノルズ数が高くなり、粘性の影響が相対的に小さくなると、流れは不安定となって層流から乱流へと遷移する。さまざまな実験で得られる乱流への遷移過程は、次の二つの型に分類できる。より複雑な空間的構造をもつ層流や時間とともに周期的に変動する流れを経て段階的に乱流へと遷移するスペクトル変化型遷移 (緩やかな遷移) と、流れの不安定性によって発生した擾乱により一挙に急激に遷移する突発型遷移 (速い遷移) とがある。

速度や圧力など流体力学における従属変数は、決定論的な流体力学方程式に従っているが、乱流においては一見偶然的に変動する。したがって、乱流理論ではこれらの分布関数や各種の平均値などを考察の対象とすることになる。決定論的な力学系の運動の中に偶然性が入り込んでくる過程は、カオスの発生機構 (例えば、蔵本, 1986) と密接に関連している。カオスには敏感な初期値依存性があるので、一定の時間スケールを越えた長期間の予測は不可能である。この時間スケールは系の自由度が増すととも減少するものと考えられ、乱流のように極めて多数の自由度をもつ系では、時間スケールは感知できないほどに短くなる。つまり、ほとんどすべての時刻において予測不可能であり、乱流は偶然的な時間変化の属性をもつといえる。

### 15.1.2 乱流の記述

簡単のために均質非圧縮で密度が一定値  $\rho_0$  の粘性流体を考える。運動方程式および連続方程式は次で与えられる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad}p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}, \quad (15.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (15.2)$$

ここで,  $\mathbf{u}$  は速度,  $p$  は圧力であり, 外力  $\mathbf{K}$  は偶然的でないとする.

統計的記述法により乱流を記述する. まず, 任意の物理量  $a$  を平均値  $\langle a \rangle$  と偏差  $a'$  に分ける:

$$a = \langle a \rangle + a', \quad \langle a' \rangle = 0. \quad (15.3)$$

ここで, 平均は時間, 空間あるいはアンサンブルの平均である. 平均値の表す流れを平均流, それからの偏差を乱れという. 式 (15.1), (15.2) の  $\mathbf{u}$  と  $p$  を平均と偏差に分け, 両辺の平均をとると次になる:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \operatorname{grad} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \langle (\mathbf{u}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \langle p \rangle + \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{K}, \quad (15.4)$$

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (15.5)$$

平均流の運動方程式 (15.4) はレイノルズ方程式と呼ばれる. 一方, 平均をとる前の式からこれらを引くことにより, 乱れに対する各方程式を得る:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \operatorname{grad}) \langle \mathbf{u} \rangle \\ + (\mathbf{u}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' - \langle (\mathbf{u}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' + \nu \Delta \mathbf{u}', \end{aligned} \quad (15.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0. \quad (15.7)$$

乱流の平均流と乱れの場合は, これらの方程式 (15.4)~(15.7) を解くことによって決定される.

平均流に対する運動方程式で  $\langle (\mathbf{u}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' \rangle$  の項は, 乱れが平均流に及ぼす効果を表している. それ以外の項は平均流の変数だけで記述されており, もとの方程式 (15.1) と同形である. ここで,  $\langle (\mathbf{u}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u}' \rangle$  を成分形式で書くと,

$$\sum_j \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_j \left\langle \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15.8)$$

と変形できる. 最初の等号では (15.7) 式,  $\sum_j \partial u'_j / \partial x_j = 0$  を使っている. ここで,  $\tau_{ij} \equiv \rho_0 \langle u'_i u'_j \rangle$  とすると,  $\tau_{ij}$  は応力の次元をもつテンソルで, レイノルズ応力と呼ばれる. この対角成分の和の 1/2 は, 乱れの運動エネルギーを表している:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_i \langle (u'_i)^2 \rangle. \quad (15.9)$$

### 15.1.3 乱れの構造とエネルギースペクトル: コルモゴロフ理論 (1941)

乱流の乱れ成分は大小さまざまな渦構造から成っている. そのうち比較的大規模なものは平均流の構造の影響を受けているが, 規模が小さくなるにつれて構造性を失い, 空間的に一様かつ等方的になると思われる. 乱流のエネルギーは大規模な渦から小規模な渦へと逐次に伝達され, 最終的には分子粘性によって失われて, 流体の熱エネルギーに変換される. ここでは, 乱れの場合を 3 次元フーリエ級数に展開し, 運動方程式における慣性項の働きを異なる成分波間の非線型相互作用という形で捉えることにする. 一様等方性乱流では, 波数空間でのエネルギー密度は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の絶対値  $k = |\mathbf{k}|$  だけに依存する. 波数  $k$  と  $k + dk$  の間に含まれるエネルギーを  $E(k)dk$  とすると, 乱れのエネルギー (15.9) は,

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty E(k)dk, \quad (15.10)$$

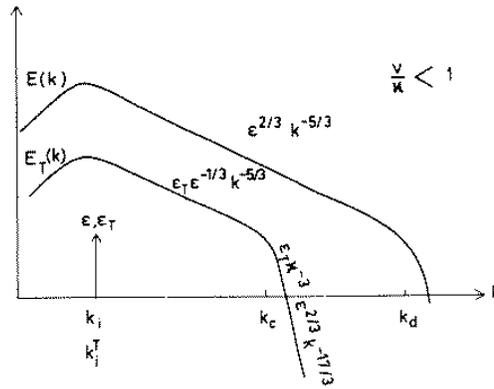


Figure VI-10: schematic inertial-convective and inertial-conductive ranges of the temperature spectrum in the Kolmogorov inertial range of the kinetic energy spectrum (low Prandtl number)

図 15.1: 3次元乱流の運動エネルギースペクトルにおけるコルモゴロフの慣性小領域の模式図 (Lesieur, 1997).

で与えられる.  $E(k)$  をエネルギースペクトルという.

粘性散逸は速度勾配の2乗に比例するので, エネルギーはもっぱら小規模渦において失われる. 小規模渦は波数空間で波数  $k$  が大きな領域に対応する. この領域では, エネルギー損失が小さな波数領域からのエネルギー供給と釣り合っていると考えられる. この平衡領域へのエネルギー供給は, 乱れのエネルギーの減衰率,

$$\epsilon = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (15.11)$$

と等しいと考えてよい. 一方, 粘性によるエネルギー散逸の大きさを運動粘性率  $\nu$  で代表させれば, 平衡領域におけるエネルギー損失は  $\nu$  で表される. 結局, この領域での平衡状態は,  $\epsilon$  と  $\nu$  の2つのパラメータによって決定されると考えられる. これをコルモゴロフの局所相似性仮説という.

乱流の代表的長さの次元の量を  $L$ , 時間の次元の量を  $T$  とすると,  $\epsilon$  と  $\nu$  の次元はそれぞれ,  $[\epsilon] = L^2 T^{-3}$ ,  $[\nu] = L^2 T^{-1}$  である. 逆に,  $L$  と  $T$  の次元は,  $[L] = \epsilon^{-1/4} \nu^{3/4}$ ,  $[T] = \epsilon^{-1/2} \nu^{1/2}$  である. これらより, エネルギースペクトル  $E(k)$  と波数  $k$  の次元は,

$$[E(k)] = L^3 T^{-2} = \epsilon^{1/4} \nu^{5/4}, \quad k = L^{-1} = \epsilon^{1/4} \nu^{-3/4}, \quad (15.12)$$

となる. したがって, 平衡領域の代表的な波数  $k_d$  は,  $k_d = \epsilon^{1/4} \nu^{-3/4}$  で与えられる. また, 平衡領域における  $E(k)$  は (15.12) 式より,

$$E(k) = \epsilon^{1/4} \nu^{5/4} F(k/k_d), \quad (15.13)$$

の形となる. ここで,  $F$  は任意の無次元関数である. これをコルモゴロフの平衡領域スペクトルといい,  $k_d$  をコルモゴロフ波数という. 平衡領域スペクトル (15.12) が成り立つには, 大規模渦と小規模渦が十分に分離していることが必要である. すなわち, 大規模渦の代表的スケールで定義した乱れのレイノルズ数が十分大きくなければならない.

さらに, 乱れのレイノルズ数が極端に大きい場合には, 平衡領域の範囲が広がり, そのなかの低波数側では粘性の影響を受けない部分領域が現れると考えられる. これを慣性小領域という. 慣性小領域において  $E(k)$  が  $\nu$  に依存しないためには, (15.12) の関数  $F$  は  $\nu^{-5/4}$  に比例しなければならず,  $F \propto (k\epsilon^{-1/4}\nu^{3/4})^{-5/3}$  となる. 結局, エネルギースペクトルは,

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (15.14)$$

となる。ここで、 $C$  は無次元定数で、 $F$  と同様に、すべての乱流に対して普遍的なものと考えられる。これをコルモゴロフの慣性小領域スペクトル、または  $-5/3$  乗スペクトルという。この結果を模式的に図示すると図 15.1 となる。

#### 15.1.4 乱流実験・観測・理論

一様等方性乱流に関するコルモゴロフ理論は、室内実験や大気・海洋中の乱流観測によって検証されてきた。レイノルズ数の十分に高い流れでは、 $-5/3$  乗スペクトルが高波数領域に 2 ~ 3 桁の範囲で存在することが確かめられている。図 15.2 は接地境界層内 (地上 21m) で観測されたエネルギースペクトルの実例 (佐々・他, 1995) である。2 桁以上の範囲で  $-5/3$  乗に近い巾則が認められる。また、近年では、方程式系 (15.1), (15.2) の初期値問題をコンピュータを用いて直接数値計算することも可能になってきた。エネルギースペクトルのみならず各種統計量を求めて理論の検証が行われている。

実験や観測で得られる乱流の小規模渦は空間的に一様でなく間欠的に分布しており、コルモゴロフの局所平衡理論で前提とした仮説が完全に成り立っているわけではない。乱流の間欠性を考慮した修正理論が提案されているが、エネルギースペクトルの巾の  $-5/3$  乗からのずれは小さい。ただし、エネルギースペクトルのような 2 次のモーメントではなく、3 次以上のモーメントをみると、それらは普遍的でなく、乱れの全体としてのレイノルズ数に依存している。すなわち、小規模渦は大規模運動に依存していることになる。

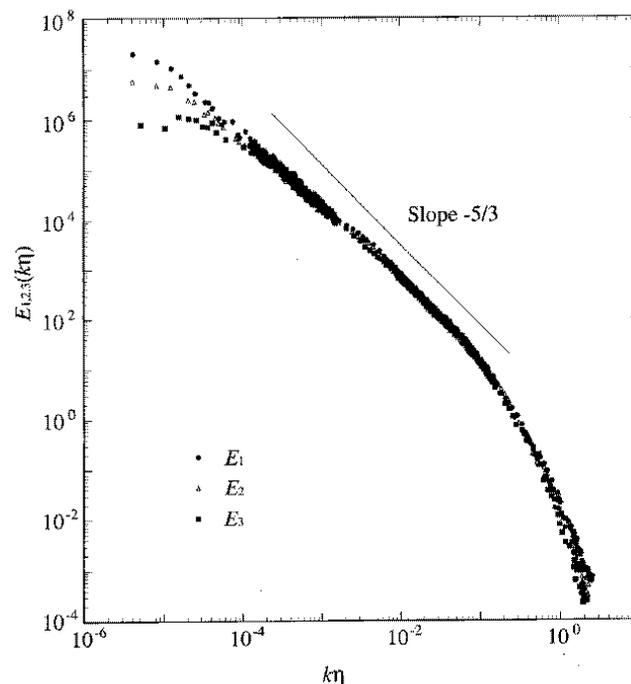


図 15.2: 大気境界層で観測された運動エネルギースペクトル (佐々・他, 1995).

以上の理論は、乱流の本質的特徴をとらえた仮説と相似性の考察に基づいているが、それらが流体力学の基礎方程式と矛盾なく合致するものであるかどうかは保証されていない。これに対して、各種の統計的近似を用いた解析的統計理論は、流体力学方程式から出発して乱流場の統計量をその解として求めようというものである。得られた結果は、これらと独立なコルモゴロフ理論と対比され、仮定の当否が検証されている (巽, 1986)。

## 15.2 地球流体中の 3 次元乱流

現実の大気や海洋などの流れ場は必ずしも一様でなく等方的でもない。それぞれ地表面や陸岸の近くでは境界層が形成され、平均流は境界からの距離に依存して変化する。また、流体は均質非圧縮ではなく、重力場の中で密度成層している。このように流れのシアや密度成層がある状況での乱流を概観する。

ところで、大気や気候のシミュレーションを行なおうとすると、境界層内の乱流に関する知見が必要となる。すなわち、地球規模の数値計算で陽に解像できるスケールは高々数十 km 程度であり、それより小さな規模の乱れに伴う各種物理量の輸送・混合過程が、より大規模な場に及ぼす影響を正しく評価する必要がある。分解能以下の現象の効果をモデルが陽に扱う変数で記述する手法は、パラメタリゼーションと呼ばれるが、その定式化は乱流理論・観測に基づいて行うことになる。

### 15.2.1 シア一流中の乱流

レイノルズ方程式 (15.4) は、レイノルズ応力が未知なので平均流の変数だけで閉じていない。乱れの運動方程式 (15.6) からレイノルズ応力の時間発展方程式を導出すると、乱れの 3 次モーメントを含む項が現れる。以下同様に、 $n$  次モーメントの発展方程式には  $n + 1$  次モーメントが含まれて、いつまでも方程式系が閉じることはない。近似的に解こうとすると、高次のモーメントを低次のモーメントで表現する必要がある。これを方程式系の完結の問題 (closure problem) という。

計算機を用いて流れの直接数値計算をしようとするとき、扱うべき空間スケールの比が大きく、乱流の散逸領域まで陽に含めて計算することは普通は不可能である。乱流の効果を繰り込んで計算するために種々の乱流モデルが提案されてきた。近年、ある波数以上の乱流場を渦粘性として取り込むために平滑操作を定義し、方程式の平滑操作により生じる付加項を評価して繰り込む、ラージ エディ シミュレーションという計算方法が発達した。平均操作と異なり、平滑値の平滑値は必ずしももとの平滑値と一致しないので、レイノルズ応力項以外の 2 次モーメント項も評価することになる (例えば、Lesieur, 1997 参照)。

非一様な乱流のレイノルズ応力を与える最も簡単な方法は渦粘性の仮定をすることである (第 6.2 節参照)。すなわち、

$$\tau_{ij} = \rho_0 \langle u'_i u'_j \rangle = -\nu_T \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \frac{\rho_0}{3} \langle u'_s u'_s \rangle \delta_{ij}, \quad (15.15)$$

として、渦粘性係数  $\nu_T$  を平均流  $\langle u_i \rangle$  で表す。乱流の混合距離理論では、気体運動論における平均自由路程とのアナロジーにより、流体要素が乱流拡散のために個性を失うまでに移動する距離 “混合距離” を  $l$  として、

$$\nu_T = \rho_0 l U, \quad (15.16)$$

とする。ここで、 $U$  は乱れを特徴づける代表的速度である。例えば、自由シア一流の乱流の場合には、 $l$  として層の厚さ、 $U$  として層を挟んでの平均流速の差、を用いる。

地球規模の流体の数値モデルでは、乱流運動は非等方的であるとして、鉛直方向と水平方向に異なる渦粘性係数を仮定する (例えば、Pedlosky, 1987)。鉛直渦粘性係数を  $\nu_{TV}$ 、水平渦粘性係数を  $\nu_{TH}$  として、これらの見積りは  $\langle \quad \rangle$  の空間スケールに依存するが、大気の場合、 $\nu_{TV}$  は地面付近で  $10 \text{ m}^2/\text{s}$  程度、自由大気中ではそれ以下であり、 $\nu_{TH}$  は  $10^5 \text{ m}^2/\text{s}$  程度である。また、海洋の場合、 $\nu_{TV}$  は  $10^{-4} \sim 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$  程度、 $\nu_{TH}$  は  $10^1 \sim 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$  程度と考えられている。これらは分子粘性に比べてはるかに大きな値となっている。もっとも、これらの仮定や値の見積りにはいろいろ曖昧なところがあるので、定量的な議論には適さない。

レイノルズ応力項の働きをみるために、平均流の運動方程式 (15.4) に  $\langle \mathbf{u} \rangle$  をかけ、乱れの運動方程式 (15.6) に  $\mathbf{u}'$  をかけて、各運動エネルギーの時間発展を表す方程式を求める。周期的な境界条件を課して領域積分を行なうと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \sum_i \langle u_i \rangle^2 dV = \\ -2\nu \int_V \sum_i \sum_j \langle s \rangle_{ij}^2 dV + \frac{1}{\rho_0} \int_V \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} dV, \end{aligned} \quad (15.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \sum_i \langle (u'_i)^2 \rangle dV = \\ -2\nu \int_V \sum_i \sum_j \langle (s'_{ij})^2 \rangle dV - \frac{1}{\rho_0} \int_V \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} dV, \end{aligned} \quad (15.18)$$

を得る。ここで、 $\langle s \rangle_{ij}$  と  $s'_{ij}$  は平均流および乱れの変形速度テンソルであり、各右辺の第 1 項は粘性による散逸項である。また、各右辺の第 2 項は平均流と乱れの間の変形エネルギーの交換を表している。平均流のシアーとレイノルズ応力の相関があれば、この交換項があることになる。

## 15.2.2 成層シアー流中の乱流

流体の成層状態は、重力加速度を  $g$ 、鉛直上向を  $z$  として、浮力振動数 ( $N$ ) の 2 乗  $N^2 \equiv -(g/\rho)(\partial\rho/\partial z)$  で特徴づけられる。 $N^2$  が正で上ほど密度が小さい場合を安定成層といい、 $N^2$  が負の場合を不安定成層という。安定成層の場合には、浮力を復元力とする波動“重力波”が存在し、不安定成層の場合には対流運動が生じうる。安定成層していても鉛直シアーのある水平流は、シアーの大きさに依存して不安定になり擾乱が成長する可能性がある。二層流体のシアー不安定は、ケルビン-ヘルムホルツ不安定として知られる。基本場の水平流速  $\bar{u}(z)$  や密度  $\bar{\rho}(z)$  が鉛直になめらかに変化する場合には、リチャードソン数 ( $Ri \equiv N^2/(d\bar{u}/dz)^2$ ) が流れのどこかで  $1/4$  より小さくなる必要がある。

$N^2 > 0$  でも鉛直シアーが大きければ流れは不安定となり、乱流状態が出現する。重力場の中での圧縮性流体の場合、乱れの運動エネルギーの時間変化を表す方程式に浮力による生成・消滅項 ( $\langle \theta' w' \rangle g / \langle \theta \rangle$ ) が加わる。平均場が不安定成層状態にあるならば、温位 (エントロピー) の乱れ  $\theta'$  と鉛直流の乱れ  $w'$  が正相関になり、浮力により乱れの運動エネルギーが生成される。乱流運動によって十分な混合が起これば、運動量や温位、物質は一様化される。

大気境界層を考える。これは地表面の機械的・熱的影響を受けた層で、夜間には数十 m 程度、晴れた日の

午後には 1km 以上の厚さになる。日中は日射により平均場の不安定成層状態が維持されるので、境界層中では乱流混合により平均場が鉛直に一様化される。この一様化された層を混合層という。境界層のうち外部境界層にあたる部分である。混合層は日変化し、朝から発達して午後にはその深さが最大となる。一方、夜間の放射冷却により強い逆転層（安定成層状態）が出現する状況では、浮力項は乱れの運動エネルギーを消滅するように働く（ $\langle \theta'w' \rangle$  が負）ので、鉛直混合が強く抑制されて境界層の厚さは薄くなる。

大気境界層のうち地表面に接するごく薄い気層は、乱れによる水平運動量の鉛直輸送によって維持されている。この層を接地層あるいは接地境界層という。接地層の厚さは成層状態に依存するが、全境界層の厚さの 1/10 程度である。接地層では乱れによる鉛直フラックスがほぼ一定であり、フラックス一定層とも呼ばれる。この層内では、各種乱流統計量が、地表面における鉛直運動量フラックス（ $\langle u'w' \rangle$ ）、鉛直熱フラックス（ $\langle \theta'w' \rangle$ ）、および、浮力パラメータ（ $g/\langle \theta \rangle$ ）の 3 パラメータのみでよく表現される（モニン・オブコフの相似則）。

すなわち、これらのパラメータから

$$\begin{aligned} \text{速度} \quad u_* &\equiv (-\langle u'w' \rangle)^{1/2}, & (\text{摩擦速度}) \\ \text{温度} \quad T_* &\equiv -\frac{\langle \theta'w' \rangle}{u_*}, & (\text{摩擦温度}) \\ \text{長さ} \quad L &\equiv -\frac{1}{\kappa} \frac{u_*^3}{\langle \theta'w' \rangle} \frac{g}{\theta}, & (\text{モニン・オブコフの長さ}) \end{aligned}$$

なる基本スケールが作れて、ある乱流統計量を  $F$ 、その次元を  $u_*$ 、 $T_*$ 、 $L$  で作って  $F_*$  とすると、相似則は

$$\frac{F}{F_*} = \phi_F \left( \frac{z}{L} \right), \quad (15.19)$$

という関係で与えられる。ここで、 $\phi_F$  は  $F$  についての普遍関数であり、 $z/L$  だけの関数として書ける。この普遍的な関係式をもとに、地表面での各種物理量のフラックスを接地層の両端での値だけから求めることができる（最近のレビューとして、例えば、Högström, 1996）。

## 15.3 2次元乱流

一様等方な 2 次元乱流の理論は、3 次元乱流に対するコルモゴロフ理論のアナロジーとして構築された。非粘性の場合にはエネルギーとエントロフィーがともに保存するという 2 次元流体特有の束縛条件により、乱流の様子は 3 次元の場合と大きく異なる。完全に 2 次元な流体運動は仮想的なものであり、その実験的検証はもっぱら直接数値計算によってなされている。

### 15.3.1 2次元流体運動

非圧縮性流体の 2 次元運動（ $\partial/\partial z = 0$ ）において、速度場は  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, 0)$  であり、渦度は  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \text{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, \omega)$  である。運動方程式 (15.1) で  $\text{rot} \mathbf{K} = 0$  とすると、次の渦度方程式が得られる：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \omega = \nu \Delta_2 \omega. \quad (15.20)$$

ここで、 $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  である。非粘性の場合には、渦度  $\omega$  が流体の運動とともにラグランジュ的に保存する。3 次元乱流と違って渦管の伸長がないので、非粘性極限でのエネルギー散逸メカニズムが働く

ない。渦度方程式 (15.20) は、流れ関数  $\psi$  を導入すると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta_2 \omega, \quad \omega = \Delta_2 \psi, \quad (15.21)$$

と書ける。

(15.21) 式に  $\psi$ , あるいは  $\omega$  をかけて平均をとると、乱れの運動エネルギー  $\mathcal{E} = \langle |\text{grad}\psi|^2 \rangle / 2$  およびエンストロフィー  $\mathcal{Q} = \langle \omega^2 \rangle / 2$  の時間変化を表す式が得られる：

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -2\nu\mathcal{Q}, \quad \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = -2\nu\mathcal{P}. \quad (15.22)$$

ここで、 $\mathcal{P} \equiv \langle (\text{grad}\omega)^2 \rangle / 2$  はパリンストロフィーである。まず、(15.22) 式で  $\nu = 0$  と置くと、エネルギーとエンストロフィーが保存することがわかる。これらの束縛のもとでは、より多くのエネルギーが低波数側に伝達され、同時により多くのエンストロフィーが高波数側に伝達される (フヨルトフトの定理; Fjørtoft, 1953)。エネルギーの重みで平均した波数、

$$\bar{k} \equiv \frac{\int_0^\infty k E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}, \quad (15.23)$$

を導入する。初期には、エネルギーの重みで平均した波数  $\bar{k}$  のまわりにエネルギーが集中していたのが、乱流運動により時間とともにスペクトルが広がるとしよう。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (k - \bar{k})^2 E(k) dk > 0, \quad (15.24)$$

である。ここで、 $\bar{k}$  と  $E(k)$  はともに時間の関数である。(15.23) より、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (k - \bar{k})^2 E(k) dk &= \int_0^\infty k^2 E(k) dk - 2\bar{k} \int_0^\infty k E(k) dk + \bar{k}^2 \int_0^\infty E(k) dk \\ &= \int_0^\infty k^2 E(k) dk - \bar{k}^2 \int_0^\infty E(k) dk, \end{aligned} \quad (15.25)$$

であるので、エネルギーとエンストロフィーが保存されるならば、 $\int_0^\infty E(k) dk$  と  $\int_0^\infty k^2 E(k) dk$  が時間変化せず、

$$\frac{\partial \bar{k}^2}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (k - \bar{k})^2 E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk} < 0, \quad (15.26)$$

となる。すなわち、スペクトルが広がるとともにエネルギー重みの平均波数  $\bar{k}$  は低波数側に移動する。また、エンストロフィーの高波数側への伝達も同様に考えることができる。

### 15.3.2 エンストロフィー慣性小領域スペクトル

運動粘性率  $\nu \neq 0$  とき、(15.22) 式よりエンストロフィーが有界に留まるので、 $\nu \rightarrow 0$  の非粘性極限でエネルギーは散逸されない。これは、3次元乱流の場合には、非粘性極限でエンストロフィーが発散してエネルギー散逸が起こると対照的である。2次元乱流では、非粘性極限でパリンストロフィーが発散してエンス

トロフィー散逸が起こる。このとき、エンストロフィーの散逸率を  $\eta = -dQ/dt$  として、コルモゴロフ理論と同様の次元解析を行うと、高波数領域  $k \gg k_0$  では

$$E(k) = \eta^{1/6} \nu^{3/2} F(k/k_d), \quad k_d = \eta^{1/6} \nu^{-1/2}, \quad (15.27)$$

の形のエネルギースペクトル相似則を得る。ここで、 $F$  は任意の無次元関数である。さらに、乱れのレイノルズ数が極端に大きい場合に、粘性の影響を受けないエンストロフィー慣性小領域  $k_0 \ll k \ll k_d$  があるとすれば、そこでのエネルギースペクトルは、

$$E(k) = C_2 \eta^{2/3} k^{-3}, \quad (15.28)$$

となる。ここで、 $C_2$  は無次元普遍定数である。2次元乱流の場合にはエンストロフィー慣性小領域スペクトルが  $-3$  乗となる。

### 15.3.3 エネルギー慣性小領域スペクトル

エネルギーの逆カスケードという概念 (Kraichnan, 1967) は、 $k = k_i$  でエネルギーとエンストロフィーを注入し続ける場合にのみ適用できる。エネルギーの注入率を  $\epsilon$  とすると、それは低波数側に逆カスケードする。あとの議論は3次元乱流のコルモゴロフ理論と同じで、エネルギーの流れる向きが逆になるだけである。すなわち、 $k < k_i$  では、

$$E(k) = C' \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (15.29)$$

となる。ここで、 $C'$  は無次元普遍定数である。2次元の強制乱流では、エネルギーが逆カスケードするエネルギー慣性小領域でスペクトルが  $-5/3$  乗則を示す。これらの結果を模式的に図示すると図 15.3 となる。

### 15.3.4 直接数値計算：秩序渦の形成

2次元乱流のエネルギースペクトルにおける巾則は直接数値計算によって検証されてきた。コンピュータ性能の向上により高分解能の実験が可能となったが、そこで得られるエンストロフィー慣性小領域のスペクトル

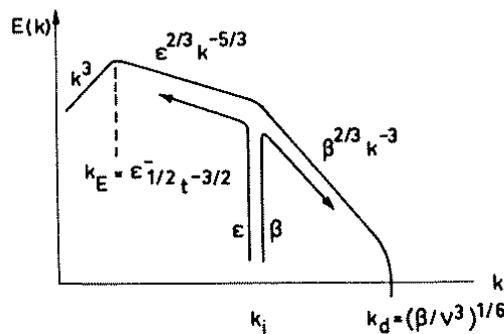


Figure VIII-3: schematic double cascading spectrum of forced two-dimensional turbulence (from Lesieur, 1983)

図 15.3: 2次元乱流のエネルギースペクトルにおけるエネルギー慣性小領域とエンストロフィー慣性小領域の模式図 (Lesieur, 1997).

ルは、理論的に予測された  $-3$  乗ではなく  $-4$  乗にちかい巾則を示す。減衰性乱流の実験でランダムな初期値から時間発展させると、流れ場の中に明瞭な構造を持つ秩序渦 (coherent vortices; McWilliams, 1984) が出現する。一様等方性の仮定が破れた流れ場となったために、スペクトルの巾が理論と異なった値となったと考えられる。渦度場が渦度ジャンプによって特徴づけられ、その空間分布がランダムであるならば、エンストロフィーのスペクトルは  $k^{-2}$  に比例し、エネルギースペクトルは  $k^{-4}$  に比例することになる (Saffman, 1971)。

高分解能のモデルを用いた直接数値計算の結果を見ると、個々の秩序渦は正負いずれかの渦度を持つ。同符号の渦が接近するとペアとなって互いのまわりを回転し、融合して、やがて一つの大きな渦となる。同符号の渦が融合を繰り返すことにより、渦の数は減少し、渦のスケールと渦間の平均距離が増大する。これが、2次元乱流特有のエネルギー逆カスケードの実空間での描像である。一方、渦領域以外では渦度がゼロに近く、その等値線は近くの渦によって細長く引き延ばされている。エンストロフィーの散逸が卓越する領域である。

## 15.4 地球流体中の 2 次元乱流

大気や海洋の地球規模での運動は、鉛直スケールが水平スケールに比べて極端に小さく、著しく異方的である。また、回転と成層の効果により水平 2 次元な流体運動が卓越する性質があるので、2 次元流体という枠組みは地球惑星流体として具体性のあるものである。前節で考えた無限平面領域のみならず、惑星の自転の緯度依存性を考慮した“ $\beta$  平面”領域や回転球面領域においても 2 次元乱流の性質が調べられている。そのような条件で直接数値計算をすると、東西にのびた帯状渦構造や極域の西向き周極渦などの秩序構造が出現する。

### 15.4.1 $\beta$ 平面上の 2 次元乱流

惑星の自転運動に伴う渦度の鉛直成分 (惑星渦度) は、惑星の自転角速度を  $\Omega$ 、緯度を  $\phi$  として、 $f = 2\Omega \sin \phi$  である。 $f$  をコリオリパラメータともいう。(15.21) 式の導出と同様の手続きにより、惑星 (あるいは回転球面) 上での非圧縮性流体の 2 次元運動に対するポテンシャル渦度方程式が得られる (第 9.2.2 節参照) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(\lambda, \mu)} = \nu \left( \Delta_2 + \frac{2}{a^2} \right) q, \quad (15.30)$$

$$q \equiv \omega + f = \Delta_2 \psi + 2\Omega \mu. \quad (15.31)$$

ここで、 $a$  は惑星半径であり、 $\mu = \sin \phi$  である。非粘性の場合、ポテンシャル渦度  $q$  が流体運動とともにラグランジュ的に保存する。

ある緯度  $\phi_0$  での接平面を考える。 $x = a \cos \phi_0 \lambda$ 、 $y = a(\phi - \phi_0)$  として、コリオリパラメータを  $f = f_0 + \beta y$  と線型近似すると、(15.30) 式より  $\beta$  平面近似のポテンシャル渦度方程式が得られる (第??)。渦度  $\omega = \Delta_2 \psi$  を用いて表すと、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \Delta_2 \omega, \quad (15.32)$$

となる。非回転あるいは  $f = \text{一定}$  の場合の渦度方程式 (15.21) と比べると、 $\beta \partial \psi / \partial x$  という線型のベータ項が加わり、支配方程式が非等方的になっている。この項と非線型の慣性項とが同程度となる波数を  $k_\beta \equiv (\beta/U)^{1/2}$

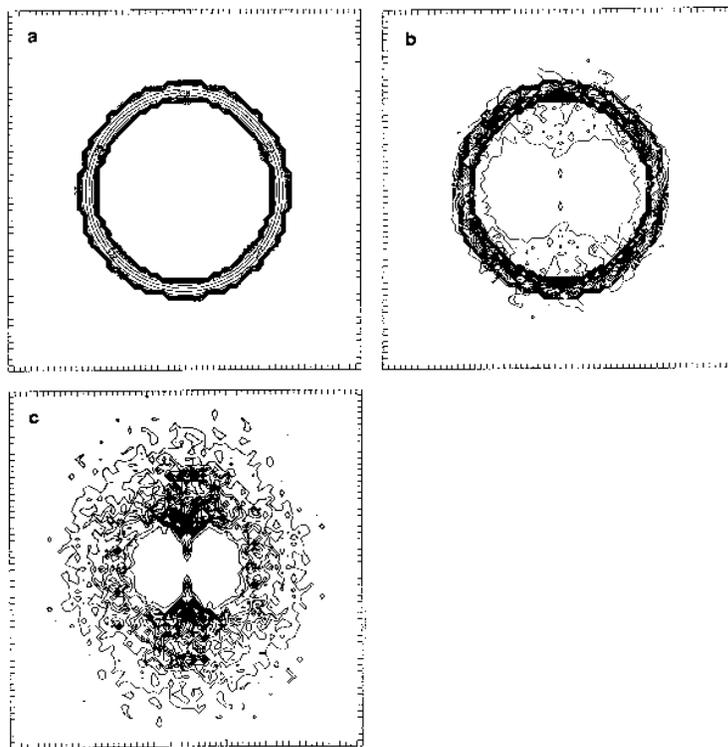


図 15.4:  $\beta$  平面上の 2 次元乱流に関する直接数値計算において得られた 2 次元の波数空間  $(k, l)$  でのエネルギー密度の時間変化 (Vallis and Maltrud, 1993).

( $U$  は代表的速度) とすると,  $k \gg k_\beta$  である小規模な流れではベータ項が無視できて非回転と同じ状況になる. 一方,  $k \ll k_\beta$  である大規模な流れでは, 非線型項が無視できて, 線型のロスビー波が卓越する. すなわち, ポテンシャル渦度方程式 (15.32) で非線型項と粘性項を無視し,  $\psi(x, y, t) = \psi_0 \exp[i(kx + ly - \sigma t)]$  という波動解を仮定すると,

$$\sigma = -\frac{k\beta}{k^2 + l^2}, \quad (15.33)$$

というロスビー波の分散関係式を得る.  $\beta > 0$  なので, 大規模な波ほど速く西進する ( $\sigma/k < 0$ ). (第 9.4.3 節参照)

Rhines(1975) は  $\beta$  平面上の 2 次元乱流に関する直接数値計算を初めて行ない, エネルギースペクトルおよび流れ場の時間発展を調べた. 図 15.4 は Vallis and Maltrud(1993) による直接数値計算の結果で, 2 次元の波数空間  $(k, l)$  でのエネルギー密度の時間変化を表している. 初期値として  $\kappa \equiv (k^2 + l^2)^{1/2} \gg k_\beta$  の領域にエネルギーを与える (a) と, 非回転の場合と同様にエネルギーの逆カスケードが起こる. ベータ項が無視できる間は乱れの場合は等方的である (b). やがて卓越する波数が  $\kappa \sim k_\beta$  となり, 乱れはロスビー波の性質を帯びようになる. ロスビー波の三波相互作用が効果的になり, エネルギー逆カスケードは抑制されて, 乱れ場が非等方性を帯びていく (c). 2 次元エネルギースペクトルの非等方的な分布は, 垂鈴型の低密度領域で特徴づけられる. この境界線は, ロスビー波の時間スケールと渦の時間スケールが等しいとおくことにより見積もれる. 実空間での渦度場には, 東西に引き延ばされた帯状縞構造が出現する. 縞の南北スケールは  $1/k_\beta$  で与えられる.

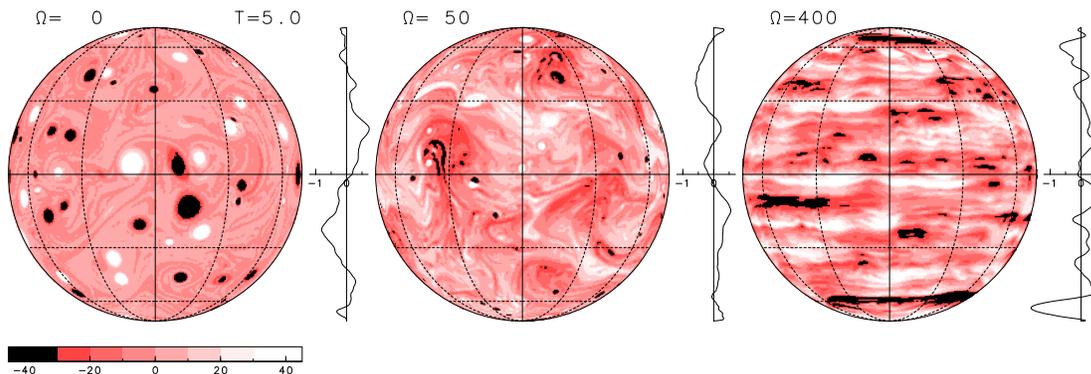


図 15.5: 回転球面上の減衰性 2 次元乱流の直接数値計算で得られた相対渦度場と帯状平均帯状角運動量の緯度分布. 左から  $\Omega = 0$  (非回転), 50(およそ地球のパラメータ), 400(高速回転惑星).

### 15.4.2 回転球面上の 2 次元乱流

$\beta$  平面は回転球面の接平面近似であり, 乱れの空間スケールが大きくなるとこの近似が妥当でなくなる. そのような状況では, 球面上のポテンシャル渦度方程式 (15.30) に戻って直接数値計算する必要がある. Williams(1978) は周期境界条件の球面セクターモデルで強制 2 次元乱流の実験を行ない, 木星を意識した条件設定のもとに観測されるような帯状縞構造を得た.

1990 年代に入ると, 高分解能の全球モデルを用いて 2 次元乱流の直接数値計算が行なえるようになった (Yoden and Yamada, 1993; Nozawa and Yoden, 1997a,b など). 緯度円に沿って平均した東西流の時間発展をみると, 減衰性乱流が強制乱流にかかわらず, 自転角速度が大きな値の場合には高緯度域で西向き強い周極渦が形成される (図 15.5). また, 中・低緯度域では, 西向き流れと東向き流れが南北に交互に並んだ帯状縞構造が出現する. これらの周極渦や縞の位置は時間によってほとんど変化せず, その位置を時間積分の初期の段階まで遡ることができる. 惑星の自転角速度が大きいほど縞の幅が狭く, その本数が多くなる. 相対渦度場をみると, 強い帯状流が出現しているところでは東西に引伸ばされて, 帯状流の南北シアーにより歪んだ形となっている. このような渦度擾乱場と帯状流の相互作用により帯状縞構造が維持されていると考えられる. また, 周極渦の形成は, 弱非線型のロスビー波による角運動量輸送過程や非線型なポテンシャル渦度混合過程によると考えられる.

球面調和関数の帯状 (東西) 波数  $m$  と全波数  $n$  (南北波数のかわり) の 2 次元波数空間でみたエネルギースペクトルを図 15.6 に示す. 図 15.5 で示した時刻での 2 次元エネルギースペクトルを  $n \leq 30$  の低波数域だけ示したものである. 非回転の場合には, 流れ場が等方的であるために基本的に  $m$  に依存しない分布となるが, 回転系の場合にはエネルギー分布は非等方的になり, 全波数が同じ値ならば東西波数が小さな成分の方が大きなエネルギーをもつ.  $\Omega = 400$  の場合,  $m \sim n < 8$  付近にはエネルギーがほとんど輸送されない翼状の領域が現れる. Vallis and Multrad(1993) は,  $\beta$  平面領域モデルでは 2 次元エネルギースペクトルに亜鈴型の空白域が出現する (図 15.4c) ことを初めて指摘したが, 彼らの “波-乱流境界” を表わす理論曲線を援用すると, 回転球面モデルにおける翼状の領域の存在を定性的には説明できる (Nozawa and Yoden, 1997b). この境界線は  $m = Ro \times n^2(n+1)$  (ただし, ロスビー数  $Ro \equiv U/(2\Omega a)$ ) で与えられ, 図中の曲線になる. ロスビー波の三波相互作用の結果として, この境界線の内側にまでエネルギーが入り込んでいる. 系の回転がある場合のエネルギー分布の非等方性は, 線型項つまり惑星の自転効果項の寄与がほとんどない高波数

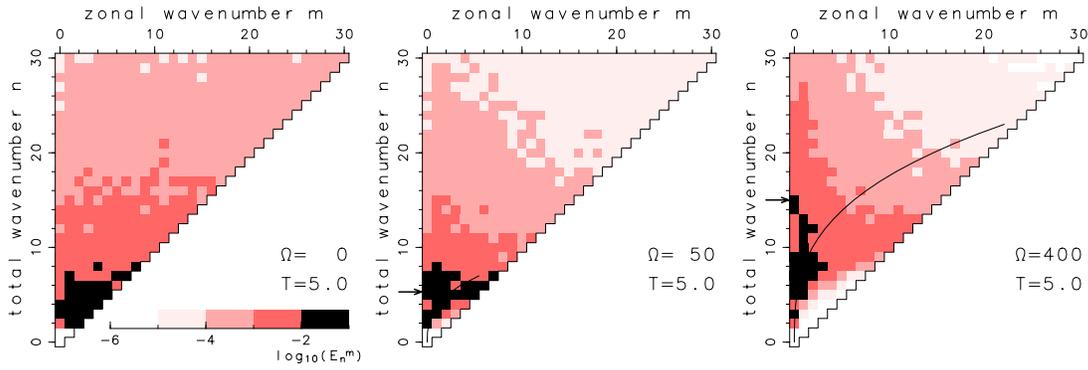


図 15.6: 回転球面上の減衰性 2 次元乱流の直接数値計算で得られた 2 次元エネルギースペクトルの一例。前図の流れ場に対応。

域においても顕著にみられる。あらゆる空間規模で南北スケールよりも東西スケールが長くなり、東西に引き伸ばされた構造となっている。このような高波数域での非等方的なエネルギー分布は、図 15.6 に示した低波数域での非等方性と非線型項を通して直接的に関連していると考えられる。

## 15.5 地衡流乱流

前節では、地球流体を念頭においた  $\beta$  平面や球面上の 2 次元乱流を扱ったが、現実の大気は純粋に 2 次元であるわけではない。Charney(1971) は中緯度対流圏でのエネルギースペクトルがある巾則を示すことに動機づけられて、準地衡近似の下で 3 次元大気の乱流理論を構築した。

### 15.5.1 準地衡近似方程式系のあらまし

Charney(1948) は、当時の計算機環境で数値天気予報を実現すべく、中緯度の高低気圧規模現象を念頭においてスケール解析を行ない、ゆっくりした準水平渦運動だけを記述する近似方程式系を構築した。今日、準地衡近似方程式系と呼ばれるものである (第 2.6 節)。運動方程式の鉛直成分は静力学平衡で近似し、さらに水平流速はほぼ地衡流  $\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \nabla_2 \psi$  に近いとして、最終的に次の準地衡ポテンシャル渦度方程式を得る (具体的な導出は、第 14.2.1 節を参照のこと)：

$$\frac{D_g q_g}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_2 \right) q_g = 0. \quad (15.34)$$

ただし、準地衡ポテンシャル渦度  $q_g$  は次のように定義される：

$$q_g \equiv \Delta_2 \psi + f + \frac{f_0^2}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho_s}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (15.35)$$

ここで、 $\psi(x, y, z, t)$  は地衡流の流線関数、 $f$  はコリオリパラメータ ( $f = f_0 + \beta y$ )、 $\rho_s(z)$  は水平平均した密度、 $N(z)$  は浮力振動数、であり、空間座標  $(x, y, z)$  は (東向き, 北向き, 鉛直上向き) にとる。

### 15.5.2 地衡流乱流理論

準地衡ポテンシャル渦度方程式 (15.34) と次の内部エネルギー方程式をもとに、この近似系でのエネルギー、エンストロフィーの保存を考える：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_2 \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{N^2}{f_0} w = 0. \quad (15.36)$$

(15.34) 式に  $-\rho_s \psi$  をかけて部分積分し、(15.36) 式では下端境界  $z = 0$  で鉛直流  $w = 0$  であることを使うと、全エネルギー  $\mathcal{E}$  が保存することがわかる：

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left[ (\nabla_2 \psi)^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \rho_s dV = 0. \quad (15.37)$$

ここで、全エネルギーは運動エネルギーと有効エネルギーの和であり、 $dV$  は体積要素である。また、(15.34) 式に  $\rho_s(q_g - f)$  をかけて、同様の手続きによりポテンシャルエンストロフィー  $\mathcal{F}$  に関する式を得る：

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} [q_g - f]^2 \rho_s dV = \frac{\beta}{2} \int_S \left( \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \rho_s \right)_{z=0} dS. \quad (15.38)$$

ここで、 $dS$  は水平の面積要素であり、南北には剛体壁 ( $\partial \psi / \partial x = 0$ ) があるとした。

もし、下端境界  $z = 0$  で温位が一定 ( $\partial \psi / \partial z = 0$ ) であるならば、(15.38) 式よりポテンシャルエンストロフィー  $\mathcal{F}$  も保存することがわかる。2次元乱流の場合と同様に考えて、このときには、3次元の準地衡流においてエネルギーの高波数へのカスケードが起こらないことになる。この場合、流れが地衡流的であるという束縛がカスケードを禁じている。さらに、水平とともに鉛直スケールも小さくて、 $\rho_s$ 、 $N$  が局所的に一定とみなせるならば、鉛直座標を  $\zeta = Nz/f_0$  と引き延ばして、準地衡ポテンシャル渦度方程式 (15.34) は次のように書ける：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_2 \right) \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + f \right] = 0. \quad (15.39)$$

ここで、 $f$  が一定とできて、流れが3次元 ( $x, y, \zeta$ ) 的に一様等方であるならば、やはり2次元乱流のアナロジーが成り立つ。すなわち、擬ポテンシャルエンストロフィーの散逸率を  $\eta$  として、エンストロフィー慣性小領域での全エネルギーのスペクトルは、

$$E(\kappa) = C'' \eta^{2/3} \kappa^{-3}, \quad (15.40)$$

となる。ここで、 $C''$  は無次元普遍定数であり、 $\kappa^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_\zeta^2$  である。

Charney(1971)の地衡流乱流理論は、地球流体力学の基本的問題として興味深い。それと同じ枠組で直接数値計算を行うことにより、理論の検証が行われているところである。しかし、ここでみたように多くの仮定のもとに導出されたエネルギースペクトルであるので、現実に観測されるスペクトルがこの枠組で説明できるかどうかは疑問である。一様等方性の仮定、下端境界や放射過程を通しての散逸、大気波動との関連、等々、理論的枠組と現実の状況とのギャップは大きい。動機となった観測結果の再検討にまで立ち返るべき段階にある、と思われる。

## 参考文献

Charney, J.G., 1948: On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ.*, **17**, 1-17.

- , 1971: Geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1087-1095.
- , 1973: Planetary fluid dynamics. *Dynamic Meteorology*, P.Morel Ed., D.Reidel Pub.Co., 97-351.
- Fjørtoft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow. *Tellus*, **5**, 225-230.
- Högström, U., 1996: Review of some basic characteristics of the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorology: 25th Anniversary Volume, 1970-1995*, Kluwer Academic Publishers, 215-246.
- Kraichnan, R.H., 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417-1423.
- 蔵本 由紀, 1986: カオスの発生とその機構. 巽 友正 (編) 「乱流現象の科学」第 4 章, 東京大学出版会, 83-119.
- Lesieur, M., 1997: *Turbulence in Fluids: Third revised and enlarged edition*. Chapter XII: Large-eddy simulations, Kluwer Academic Publishers, 375-408.
- McWilliams, J., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21-43.
- Multrad, M.E. and G.K. Vallis, 1991: Energy spectra and coherent structures in forced two-dimensional and beta-plane turbulence. *J. Fluid Mech.*, **228**, 321-342.
- Nozawa, T. and S. Yoden, 1997a: Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, **9**, 2081-2093.
- and ——, 1997b: Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, **9**, 3834-3842.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics: Second edition*. Springer-Verlag, 710pp.
- Rhines, P.B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.
- Saffman, P.G., 1971: On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number. *Stud. Appl. Math.*, **50**, 377-383.
- 佐々 浩司・千葉 修・蒔田 秀治, 1995: 接地境界層中の乱流微細構造に及ぼす安定度の影響, 第 27 回乱流シンポジウム講演論文集, 203-206.
- 巽 友正, 1982: 新物理学シリーズ 21 「流体力学」, 培風館, 453pp.
- 巽 友正, 1986: 乱流の統計理論. 巽 友正 (編) 「乱流現象の科学」第 6 章, 東京大学出版会, 165-221.
- 巽 友正, 1995: 岩波基礎物理シリーズ 2 「連続体の力学」, 岩波書店, 334pp.
- Vallis G.K. and M.E. Multrad, 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346-1362.
- Williams, G.P., 1978: Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399-1426.
- Yoden, S. and M. Yamada, 1993: A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631-643.